新世纪高职高专基础课教材

线性代数

经济应用数学基础之二

XIANXING DAISHU

元如林　总主编

解玉成　主　编

刘　煦　副主编

上海财经大学出版社

新世纪高职高专基础课教材

经济应用数学基础之二

线性代数

元如林　总主编

解玉成　主　编

刘　煦　副主编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/元如林总主编,解玉成主编,刘煦副主编.—上海:上海财经大学出版社,2004.11
新世纪高职高专基础课教材
ISBN 7-81098-232-X/O·005

Ⅰ.线… Ⅱ.①元…②解…③刘… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 101099 号

□ 责任编辑 李宇彤
□ 封面设计 周卫民

XIANXING DAISHU
线 性 代 数

元如林 总主编
解玉成 主 编
刘 煦 副主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)
网 址:http://www.sufep.com
电子邮件:webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
上海第二教育学院印刷厂印刷
上海叶大装订厂装订
2004 年 11 月第 1 版 2004 年 11 月第 1 次印刷

787mm×960mm 1/16 9.5 印张 202 千字
印数:0 001—5 000 定价:16.00 元

前言

QIAN YAN

本套教材是为高职高专经济类和管理类学生编写的，同时也适合各类函授大学、夜大学等成人教育专科学生使用，还可供读者自学使用.

编者参照高职高专《经济数学基础课程教学基本要求》，针对使用对象的特点，结合作者多年的教学实践和教学改革的实际经验，本着“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，对内容的取舍和编排进行了必要的处理.这套教材注意从实际问题引入概念，淡化了某些理论性的证明，充分利用图形等直观表现形式，介绍了一些数学模型，给出了较多的例题.这套教材认真贯彻启发式教学原则，强调对学生基本运算能力、分析和解决实际问题能力的培养，力求使本套教材通俗易懂、深入浅出，便于教师讲授和读者阅读.

全套教材由元如林任总主编，共分三册：第一册《微积分》，第二册《线性代数》，第三册《概率论与数理统计》.

第二册《线性代数》由解玉成任主编，刘煦任副主编，内容包括：第一章行列式、第二章矩阵、第三章向量、第四章线性方程组、第五章投入产出数学模型、第六章线性规划问题.

参加本册教材编写的有方勇(第一章)、解玉成(第二章)、洪永成(第三章)、车荣强(第四章)、李晓彬(第五章)、刘煦(第六章).全书由元如林和解玉成审阅与统稿.

本套教材的编写参考了已出版的相关教材，在此向这些教材的作者表示感谢！

在本套教材的编写过程中，得到上海财经大学出版社的大力支持，得到上海金融学院领导、基础部及有关部门的关心和支持，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，错误缺点在所难免，敬请读者批评指正.

编者

2004年6月

目录

MU LU

第一章

行列式

行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的,是研究线性方程组的有力工具.本章主要研究三个内容:行列式的定义、行列式的基本性质及其计算方法、解线性方程组的克莱姆法则.

1.1 二阶行列式与三阶行列式

用消元法解两个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}b_{21}}.$$

由此引进二阶行列式概念.

定义 1 用 2^2 个数组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1-1}$$

其中，a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 称为行列式的元素，横排称行，竖排称列.

由定义 1，两个未知数的线性方程组的解可以写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ 3x_1-x_2=-2. \end{cases}$$

解 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-2\times 3=-1-6=-7\neq 0.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-2\times(-2)=-1+4=3,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-1\times 3=-2-3=-5,$$

所以线性方程组的解为：

$$x_1=-\frac{3}{7},x_2=\frac{5}{7}.$$

类似地，讨论三个未知数线性方程组的求解问题，可以引入三阶行列式.

定义 2 用 3^2 个数组成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示数值：

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1-2}$$

根据式(1－1)可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1-3}$$

对式(1－3)三阶行列式的值可按如下的对角线法则来记忆：图1－1中凡实线所联三个元素的积相加，减去凡虚线所联的三个元素的积，它们的代数和就是三阶行列式的值.

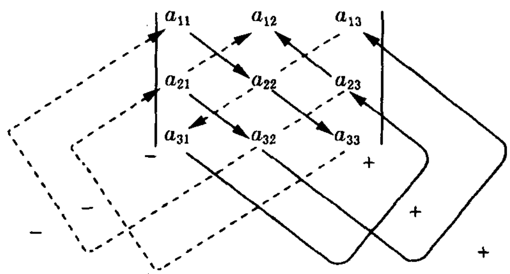

图1－1

例2　计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解　由三阶行列式的计算公式(1－3)得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1+2\times3\times(-1)+0\times(-2)\times0-(-1)\times1\times0-(-2)\times3$$

$$\times1-1\times2\times0=1-6+0-0+6-0=1$$

1.2　n阶行列式

我们来分析一下三阶行列式的定义式(1－2)，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

首先,式(1－2)右端三项,是三阶行列式 D 中第一行的三个元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 分别乘上三个二阶行列式,而所乘的二阶行列式是 D 中划去该元素所在的第一行与第 j 列元素后余下的元素所组成,$j=1,2,3$.

其次,每一项之前都要乘一个$(-1)^{1+j}$,1 和 j 正好是元素 a_{1j} 的行标和列标.

按照这一规律,我们可用三阶行列式定义四阶行列式. 以此类推,在已定义了 $n-1$ 阶行列式之后,便可得 n 阶行列式的定义.

定义 1 用 n^2 个数组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示数值

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

称为 n 阶行列式. 这种用低阶行列式定义高一阶行列式的方法,称为递推式定义法.

定义 2 在 n 阶行列式 D 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素后,剩下的元素按原来相对位置所组成的$(n-1)$ 阶行列式,称为 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}. 即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-5}$$

$(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij}. 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

这样，n 阶行列式的递推式(1－4) 可表示为：

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \qquad (1-6)$$

式(1－6) 称为 n 阶行列式按第一行元素的展开式.

例 1　求四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

中元素 a_{32} 的余子式和代数余子式，并计算行列式的值.

解　元素 a_{32} 的余子式即为划去第三行和第二列后的三阶行列式

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

元素 a_{32} 的代数余子式为：

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

又 $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 0 + 15 - 20 + 3 - 0 = -5$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -(15 - 24 - 3 + 4 - 15 + 18) = 5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 40 - 1 - 0 + 25 + 6 = 70$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -(0 - 30 + 1 - 0 - 25 - 6) = 60$$

所以 $D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

$= 3 \times (-5) + 1 \times 5 + (-1) \times 70 + 2 \times 60$

$= -15 + 5 - 70 + 120 = 40$

例 2　求下列三角形行列式 D 的值

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（此行列式称为下三角行列式）

解 因为第一行中除 a_{11} 可能不为零外，其余元素均为零，因此按第一行展开只有一项 $a_{11}A_{11}$. 以此递推按第一行展开，得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.3 行列式的性质

定义 将行列式 D 的行与列互换后，所得的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}. 即设：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则：$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

由性质 1 可知，行列式中，行与列的地位相同. 因此，在行列式中，凡对行成立的性质对列也都成立.

例 1 计算行列式 D 的值.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(此行列式称为上三角行列式)

解　由性质 1 得

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2　交换行列式的两行,行列式的值变号.

规定用 r_i,c_j 分别表示行列式的第 i 行,第 j 列. 第 i 行与第 j 行互换,记作 $r_i\leftrightarrow r_j$;第 i 列与第 j 列互换,记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

推论　如果行列式 D 中有两行的对应元素相等,则 $D=0$.

证明　交换行列式 D 中对应元素相等的两行,得到的行列式仍是 D. 由性质 2 知,行列式的值应变号,得 $D=-D$,所以 $D=0$.

性质 3　行列式 D 等于它任意一行的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

我们可以以三阶行列式为例进行证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\underline{\text{按定义}}-\left(a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right)=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23},$$

同理可证 $D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$.

推论 1　行列式 D 的某一行元素全为零,则 $D=0$.

推论 2 行列式的某一行元素与另一行对应元素的代数余子式乘积的和等于零. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j).$$

我们以三阶行列式为例证明上述性质，即证明：

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$$

作三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质2推论}} 0$$

另一方面，由性质 3，按第二行展开，得

$$D_1=a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$$

其中 A_{21}, A_{22}, A_{23} 是 D_1（也是 D）的第二行元素的代数余子式，则：

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$$

例 2 计算行列式 D 的值

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

解 因为 D 中第三行只有一个非零元素，因此按第三行展开

$$D=2A_{32}=2\times(-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-2\times 5\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=10\times(-8-4)=-120.$$

性质 4 行列式中某一行所有元素的公因子可提到行列式外面.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

上式左边按第二行展开得：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = kb_1A_{21} + kb_2A_{22} + kb_3A_{23} = k(b_1A_{21} + b_2A_{22} + b_3A_{23}) = \text{右边}.$$

性质 5　行列式 D 中如果有两行元素对应成比例，则 $D = 0$.

例如，三阶行列式 D 中第二行与第三行元素对应成比例，

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} = k,$$

则

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 6　行列式 D 的某一行的元素都是两个数的和，则 D 等于两个行列式的和.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

性质 7　把行列式的某一行的所有元素乘以同一数 k 后加于另一行对应位置的元素上，则行列式的值不变.

规定　以数 k 乘第 i 行的元素加到第 j 行对应元素上，记作 $kr_i + r_j$；以数 k 乘第 i 列的元素加到第 j 列对应元素上，记作 $kc_i + c_j$.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{kr_1 + r_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ka_1 + c_1 & ka_2 + c_2 & ka_3 + c_3 \end{vmatrix}.$$

例 3　计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$A=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\2&-1&1&0\\1&0&0&3\\-1&0&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{(-2)r_1+r_2}\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\1&0&0&3\\-1&0&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{(-1)r_1+r_3}\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\0&0&-2&2\\-1&0&2&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{1\times r_1+r_4}\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\0&0&-2&2\\0&0&4&2\end{vmatrix}\xlongequal{2r_3+r_4}\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&-3&-2\\0&0&-2&2\\0&0&0&6\end{vmatrix}=1\times(-1)\times(-2)\times 6=12.$$

例 4 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix}0&-2&4\\2&5&-1\\6&1&7\end{vmatrix}$$

解

$$A=\begin{vmatrix}0&-2&4\\2&5&-1\\6&1&7\end{vmatrix}\xlongequal{-3r_2+r_3}\begin{vmatrix}0&-2&4\\2&5&-1\\0&-14&10\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&4\\-14&10\end{vmatrix}$$

$$=-2\times 2\times 2\begin{vmatrix}-1&2\\-7&5\end{vmatrix}=-8\times(-5+14)=-8\times 9=-72.$$

例 5 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix}3&6&12\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}$$

解 先将第一行的公因子 3 提出来

$$A=\begin{vmatrix}3&6&12\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&2&4\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[(-5)r_1+r_3]{(-2)r_1+r_2}3\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-7&-8\\0&-9&-18\end{vmatrix}$$

$$=3\times 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-7&-8\\-9&-18\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}7&8\\9&18\end{vmatrix}$$

$$=3\times 9\begin{vmatrix}7&8\\1&2\end{vmatrix}=27\times(14-8)=27\times 6=162.$$

例 6 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix}3 & 2 & -2 & 4\\ 2 & -1 & 3 & -6\\ 2 & 0 & -4 & 7\\ 5 & 6 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

解

$$A=\begin{vmatrix}3 & 2 & -2 & 4\\ 2 & -1 & 3 & -6\\ 2 & 0 & -4 & 7\\ 5 & 6 & 1 & 0\end{vmatrix}\xlongequal{2c_3+c_4}\begin{vmatrix}3 & 2 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -4 & -1\\ 5 & 6 & 1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal{2r_3+r_4}\begin{vmatrix}3 & 2 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -4 & -1\\ 9 & 6 & -7 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 9 & 6 & -7\end{vmatrix}\xlongequal[3c_2+c_3]{2c_2+c_1}\begin{vmatrix}7 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ 21 & 6 & 11\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}7 & 4\\ 21 & 11\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 11\end{vmatrix}=-7\times(11-12)=7.$$

例 7　**计算 n 列行列式**

$$D=\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a & a\\ a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & x & a\\ a & a & \cdots & a & x\end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal[k=2,3,\cdots,n]{c_k+c_1}\begin{vmatrix}x+(n-1)a & a & \cdots & a & a\\ x+(n-1)a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x+(n-1)a & a & \cdots & x & a\\ x+(n-1)a & a & \cdots & a & x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a & a\\ 1 & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & a & \cdots & x & a\\ 1 & a & \cdots & a & x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[k=2,3,\cdots n]{(-1)r_1+r_k}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a & a\\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a\end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$