

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

spark® 星火·燎原

丛书主编 马德高

经济应用数学基础(一)

微积分

辅导及习题精解

(人大·第三版)

本册主编 张天德

联系考研, 渗透精讲历年考研真题

典型例题
分析

+

教材习题
答案

+

同步自测
练习

赠

《微积分重要公式及性质》手册

延边大学出版社

经济应用数学基础(一)

微积分

辅导及习题精解

(人大·第三版)

本册主编 张天德 张 锋
副主编 范立琰 侯方圆
主 审 吴 臻

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书. 第6册
/ 马德高主编. — 延吉: 延边大学出版社, 2010.6(2011.6重印)
ISBN 978-7-5634-3211-0

I. ①高… II. ①马… III. ①高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第072906号

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

主编: 马德高

责任编辑: 赵立才

出版发行: 延边大学出版社

社址: 吉林省延吉市公园路977号

邮编: 133002

网址: <http://www.ydcbs.com>

E-mail: ydcbs@ydcbs.com

电话: 0433-2732435

传真: 0433-2732434

印刷: 山东鸿杰印务有限公司

开本: 880×1230 1/32

印张: 108 字数: 2 750 千字

版次: 2011年6月第1版第2次印刷

ISBN 978-7-5634-3211-0

定价: 134.60元

前 言

微积分是经济管理专业重要的基础课程。中国人民大学赵树嫄主编的《微积分》以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为微积分这门课程的经典教材,深受广大读者欢迎,被全国许多院校采用。2007年6月推出的第三版《微积分》(以下简称《教材》)更是反映了最新教学要求,内容体例更加完善。为了帮助读者学好微积分,我们根据多年的教学经验编写了与此书配套的《微积分辅导及习题精解》,以使读者加深对基本概念的理解,加强对基本解题方法与技巧的掌握,最终提高应试能力和数学思维水平。

本书章节的划分和内容设置与《教材》一致。每节包括两大部分内容:

一、知识要点与考点 用表格形式直观形象地对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统梳理,并指出理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题,特别指出了各类考试中经常考查的重要知识点。

二、经典例题解析 广泛查阅资料,精选出了具有代表性、典型性的例题进行分类解析,使读者在具体应用中加深对基本概念的理解,熟悉对重要定理和基本方法的运用。在解题过程中,有“思路探索”来帮助读者快速找到解决问题的思路和方法;设置了“方法点击”帮助读者找到解决问题的关键、技巧与规律。

为了方便读者对每章所学过的知识进行复习巩固,在每章内容编写完成后,另外增加三部分内容:

一、本章知识结构及内容小结 以结构图形式将本章知识点有机联系起来,组成网络结构,便于学生从总体上更加系统地掌握本章知识体系和核心内容。

二、本章教材习题全解 对《教材》里的习题全部做了解答,有的习题还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。

三、同步自测题及解答 精选部分有代表性、测试价值高的题目(有些题目选自历年全国研究生入学考试试题),以此检测学习效果,提高应试水平。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到,充分体现了如下三大特色:

一、知识梳理清晰、简洁 直观、形象的图表总结,精要、准确的考点提炼,权威、独到的题型归纳,将教材内容抽丝剥茧、层层展开,呈现给读者简明扼要、层次分明的教材知识结构,以便读者快速复习、高效掌握,形成稳固、扎实的知识网,为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、互动 所有重点、难点、考点,统统归纳为一个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出丰富的精选例题、考研真题,举一反三、深入讲解,真正将知识掌握和解题能力高效结合,一举完成。

三、联系考研密切、实用 本书既是一本教材同步辅导,也是一本考研复习用书,书中处处联系考研:例题中有考研试题,同步自测中也有考研试题,更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等,为的就是让同学们同步完成考研备考,达到考研要求的水平。

本书博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分。笔者在此向这些书籍的作者表示感谢。同时,由于作者水平有限,不足之处,在所难免,敬请广大读者提出宝贵意见,以便再版时改进、修正。

编者

读者反馈表

本表兼做会员入会信息表(11)

姓 名 _____ 院系、年级 _____
电 话 _____ 邮 箱 _____
Q Q _____ 邮 编 _____
地 址 _____

微积分辅导及习题精解(配人大三版)

1. 您是从何处购买到本书的?

- 校内及周边书店 民营书店
大型零售书店 新华书店
网上书城
其他 _____

2. 您购买此书的原因(可多选):

- 星火品牌 封面设计
正文内容 答案详尽
印刷质量 图书价格
网上书评
其他(请指明) _____

3. 您购买此书的目的是:

- 辅导课程学习 考研
应付作业考试
其他(请指明) _____

4. 您身边同学会购买高数辅导书的比 例大约为:

- 20%以下 20%至50%

- 50%至80% 80%以上

5. 请根据您对本书的满意程度选择相 应等级标准,填在括号内:

满意程度:A. 很满意 B. 比较满意
C. 一般 D. 不满意 E. 很不满意

- 封面设计[] 图书内文[]
图书版式[] 印刷质量[]
图书价格[] 图书纸张[]
图书总体评价[]

结合上述答案,请提出您对本书的
改进建议

6. 您认为本书的哪些板块还需改进? (可多选)

- 知识结构 同步自测题
考点分析 全章内容小节
例题讲解 习题解答

您的改进建议_____

7. 您认为本书的优点和缺点是什么？

优点是_____

缺点是_____

8. 您还有哪些课程在市场上买不到相关辅导书,或者市场上现有的辅导书不能满足您的要求?您希望这些辅导书包括哪些内容?

9. 其他建议或意见

请将本反馈表寄至:

山东省济南市高新开发区舜华路 2000 号舜泰广场 8 号楼 15 层

山东星火国际传媒集团 读者服务部(收)

邮编:250101 电话:400-623-1860

(购书汇款地址同上)

您也可以通过电子邮件的方式和我们的编辑直接交流,我们的邮箱地址是:

sparkdushe@126.com

目 录

第一章 函 数	(1)
第一节 集合	(1)
第二节 实数集	(3)
第三节 函数关系	(5)
第四节 分段函数	(7)
第五节 建立函数关系的例题	(8)
第六节 函数的几种简单性质	(10)
第七节 反函数与复合函数	(15)
第八节 初等函数	(18)
第九节 函数图形的简单组合与变换	(21)
本章知识结构及内容小结	(22)
本章教材习题全解	(23)
同步自测题及参考答案	(45)
第二章 极限与连续	(50)
第一节 数列的极限	(50)
第二节 函数的极限	(51)
第三节 变量的极限	(54)
第四节 无穷大量与无穷小量	(55)
第五节 极限的运算法则	(57)
第六节 两个重要的极限	(61)
第七节 利用等价无穷小量代换求极限	(66)
第八节 函数的连续性	(68)
本章知识结构及内容小结	(75)
本章教材习题全解	(76)
同步自测题及参考答案	(102)
第三章 导数与微分	(108)
第一节 引出导数概念的例题	(108)
第二节 导数概念	(109)
第三节 导数的基本公式与运算法则	(115)
第四节 高阶导数	(123)
第五节 微分	(126)
本章知识结构及内容小结	(129)
本章教材习题全解	(130)

同步自测题及参考答案	(160)
第四章 中值定理与导数的应用	(167)
第一节 中值定理	(167)
第二节 洛必达法则	(173)
第三节 函数的增减性	(179)
第四节 函数的极值	(181)
第五节 最大值与最小值,极值的应用问题	(184)
第六节 曲线的凹向与拐点	(187)
第七节 函数图形的作法	(191)
第八节 变化率及相对变化率在经济中的应用——边际 分析与弹性分析介绍	(194)
本章知识结构及内容小结	(199)
本章教材习题全解	(200)
同步自测题及参考答案	(226)
第五章 不定积分	(236)
第一节 不定积分的概念	(236)
第二节 不定积分的性质	(239)
第三节 基本积分公式	(240)
第四节 换元积分法	(242)
第五节 分部积分法	(250)
第六节 综合杂例	(257)
本章知识结构及内容小结	(261)
本章教材习题全解	(261)
同步自测题及参考答案	(284)
第六章 定积分	(290)
第一节 引出定积分概念的例题	(290)
第二节 定积分的定义	(291)
第三节 定积分的基本性质	(295)
第四节 微积分基本定理	(299)
第五节 定积分的换元积分法	(307)
第六节 定积分的分部积分法	(312)
第七节 定积分的应用	(317)
第八节 广义积分与 Γ 函数	(325)
本章知识结构及内容小结	(331)
本章教材习题全解	(332)
同步自测题及参考答案	(360)
第七章 无穷级数	(369)
第一节 无穷级数的概念	(369)

第二节	无穷级数的基本性质	(371)
第三节	正项级数	(372)
第四节	任意项级数,绝对收敛	(375)
第五节	幂级数	(379)
第六节	泰勒公式与泰勒级数	(384)
第七节	某些初等函数的幂级数展开式	(386)
第八节	幂级数的应用举例	(389)
	本章知识结构及内容小结	(392)
	本章教材习题全解	(392)
	同步自测题及参考答案	(415)
第八章	多元函数	(422)
第一节	空间解析几何简介	(422)
第二节	多元函数的概念	(425)
第三节	二元函数的极限与连续	(426)
第四节	偏导数与全微分	(430)
第五节	复合函数的微分法与隐函数的微分法	(436)
第六节	二元函数的极值	(445)
第七节	二重积分	(450)
	本章知识结构及内容小结	(459)
	本章教材习题全解	(459)
	同步自测题及参考答案	(486)
第九章	微分方程与差分方程简介	(491)
第一节	微分方程的一般概念	(491)
第二节	一阶微分方程	(492)
第三节	几种二阶微分方程	(498)
第四节	二阶常系数线性微分方程	(501)
第五节	差分方程的一般概念	(507)
第六节	一阶和二阶常系数线性差分方程	(508)
	本章知识结构及内容小结	(510)
	本章教材习题全解	(510)
	同步自测题及参考答案	(528)

第一章 函数

函数是微积分的主要研究对象,后面关于微积分性质的研究都是对函数性质的研究.本章首先引入集合,然后研究两个实数集合之间的一种对应关系——函数关系,并介绍函数的基本性质和常见初等函数.

第一节

集合

一、知识要点与考点

1. 集合的描述与运算

表示法	列举法	按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号 $\{\}$ 括起来
	描述法	设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则, A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合,则记为 $A = \{a \mid P(a)\}$
全集、空集与子集	全集	由所研究的一切事物构成的集合称为全集,记为 U
	空集	不包含任何元素的集合称为空集,记为 \emptyset
	子集	如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,即“如果 $a \in A$,则 $a \in B$ ”,则称 A 为 B 的子集.记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A
运算	并集	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
	交集	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
	差集	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
	补集	$A' = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$
	笛卡尔乘积	设有集合 A 和 B , $x \in A, y \in B$,所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合,称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积,记为 $A \times B$,即 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

2. 集合运算律

交换律	$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$
结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
分配律	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
摩根律	$(A \cup B)' = A' \cap B'; (A \cap B)' = A' \cup B'$

3. 重点、难点与考点

重点	集合的描述及运算
难点	集合的运算律及笛卡尔乘积
考点	集合的运算

二、经典例题解析

基本题型 I: 集合的表示法

例 1 用列举法表示下列集合.

(1) 由 1, 3, 5, 7, 9, 11 组成的集合.

(2) 由方程 $x^2 + 6x - 27 = 0$ 的根所组成的集合.解: (1) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 或 $A = \{3, 1, 5, 7, 9, 11\}$ 等.(2) $B = \{-9, 3\}$.**【方法点击】** 在用列举法表示集合时, 必须列出集合中的所有元素, 不计较顺序, 但不能遗漏和重复.**例 2** 用描述法表示下列集合(1) 由方程 $x^2 + 6x - 5 = 0$ 的根所组成的集合.

(2) 由非负数全体组成的集合.

解: (1) $A = \{x \mid x^2 + 6x - 5 = 0\}$.(2) $B = \{x \mid x \geq 0\}$.**【方法点击】** 用描述法表示集合是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来, 用 $\{x \mid x \text{ 具有的共同属性}\}$ 表示.

基本题型 II: 集合的运算

例 3 对下面给定的集合进行相应的运算:(1) 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 7, 8\}$, 求 $A \cup B, A \cap B, A - B$.(2) 设集合 $A = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$, $B = \{x \mid x \geq 0\}$, $C = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 求 $A \cup (B \cap C)$.(3) 设 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $R = \{1, 3\}$, 求 $M', R', M' \cup R', M' \cap R', (M \cup R)' \cap M$.解: (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A - B = \{1, 3\}$.(2) $\because B \cap C = \{x \mid 0 \leq x < 3\}$ $\therefore A \cup (B \cap C) = \{-1 \leq x < 3\}$.(3) $\because M = \{2, 3\}$ $\therefore M' = U - M = \{-1, 0, 1, 4\}$ $R' = U - R = \{-1, 0, 2, 4\}$ $M' \cup R' = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ $M' \cap R' = \{-1, 0, 4\}$ 又 $M \cup R = \{1, 2, 3\}$

$$\text{故 } (M \cup R)' = U - (M \cup R) = \{-1, 0, 4\}$$

$$\text{或由 } (M \cup R)' = M' \cap R' = \{-1, 0, 4\}$$

$$\text{所以 } (M \cup R)' \cap M = \{-1, 0, 4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset.$$

【方法点击】 求不等式所构成集合的并、交运算,最好借助于数轴表示,显得一目了然;进行并、交的混合运算应注意并、交无先后,但括号优先,先里后外;抽象集合的并、交运算特点是并集取“全部”;交集取“公共”。

例 4 集合的笛卡尔乘积.

(1) 设 $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 5\}$, 求 $A \times B, B \times B$.

(2) 设 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}, B = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$, 求 $A \times B$.

解: (1) $A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (3, 2), (3, 5), (5, 2), (5, 5), (7, 2), (7, 5)\}$

$$B \times B = \{2, 5\} \times \{2, 5\} = \{(2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5)\}.$$

(2) $A \times B = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. 它表示平面直角坐标系中如图 1-1 所示的矩形区域.

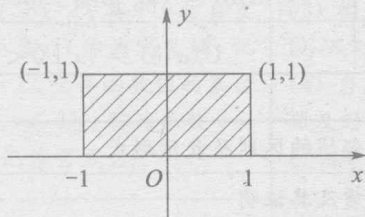


图 1-1

【方法点击】 集合的笛卡尔乘积与集合的次序有关,一般地, $A \times B$ 与 $B \times A$ 是不同的两个集合.

第二节

实数集

一、知识要点与考点

1. 实数绝对值的定义及性质

定义	一个实数 x 的绝对值定义为 $ x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
性质	$ x \geq 0 \quad x = \sqrt{x^2} \quad -x = x \quad - x \leq x \leq x $
	$\{x \mid x < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$ $\{x \mid x > b, b > 0\} = \{x \mid x < -b\} \cup \{x \mid x > b\}$
	$ x + y \leq x + y \quad x - y \geq x - y \quad xy = x y $ $ \frac{x}{y} = \frac{ x }{ y }, y \neq 0$

2. 区间与邻域

有限区间	开区间	$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
	闭区间	$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
	半开半闭区间	$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$
无限区间		$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$ $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$
邻域	点 a 的 δ 邻域	$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \mid x - a < \delta\}$
	点 a 的去心 δ 邻域	$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < x - a < \delta\}$

3. 重点、难点与考点

重点	掌握去心邻域与邻域的区别及表示形式
难点	实数绝对值的性质及其证明
考点	绝对值的运算性质

二、经典例题解析

基本题型 I : 求解含绝对值的不等式

例 1 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

(1) $|x| \leq 2$; (2) $|x - 5| \leq 1$; (3) $|x - x_0| < \varepsilon (\varepsilon > 0, x_0 \text{ 为常数})$;

(4) $|x| > 1$; (5) $|x + 2| \geq 3$; (6) $|x| > |x - 2|$.

解: (1) 即 $-2 \leq x \leq 2$, 区间为 $[-2, 2]$.

(2) 由 $-1 \leq x - 5 \leq 1$ 知 $4 \leq x \leq 6$, 区间为 $[4, 6]$.

(3) 由 $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$ 知 $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, 区间为 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

(4) 即 $x > 1$ 或 $x < -1$, 区间为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(5) 由 $x + 2 \geq 3$ 或 $x + 2 \leq -3$ 知 $x \geq 1$ 或 $x \leq -5$, 故区间为 $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$.

(6) 由 $|x| > |x - 2|$ 知 $x^2 > (x - 2)^2$, 即 $4x - 4 > 0, x > 1$, 故区间为 $(1, +\infty)$.

【方法点击】 求解含绝对值的不等式关键是要正确去掉绝对值符号.

第三节

函数关系

一、知识要点与考点

1. 函数的定义

名称	定义	说明
函数	若 D 是一个非空实数集合, 设有一个对应规则 f , 使每一个 $x \in D$, 都有一个确定的实数 y 与之对应, 则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系, 或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$. 全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记作 Z 或 Z_f .	(1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则, 而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值; (2) 表示函数的记号可以任意选取; (3) 构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f ; (4) 当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时, 两个函数相等.
隐函数	由二元方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数.	因变量能用自变量直接表示出来(如 $y = f(x)$) 的函数称为显函数, 否则为隐函数.

2. 函数的三种表示法

名称	定义
解析法	把一个函数关系用解析式表示的方法称为函数解析法, 也叫公式法
表格法	把自变量所取的值和对应的函数值列成表, 用以表示函数关系, 如我们使用的各种数学用表——平方表、对数表、三角函数表等, 函数的这种表示法称为表格法
图形法	用某个坐标系中的一条曲线来表示两个变量之间的对应关系, 称为图形法或图示法

3. 重点、难点与考点

重点	求函数的定义域、函数值, 区分两个函数是否相同
难点	对函数关系的理解及值域的确定
考点	求函数的定义域

二、经典例题解析

基本题型 I: 判定两个函数是否相同

例1 下列各对函数中, 相同的一对函数是().

(A) $y = \frac{x^3}{x}$ 与 $y = x^2$ (B) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2\ln x$

(C) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = x$ (D) $y = x^2$ 与 $u = v^2$

解: 排除法可知选项(D)中的两个函数相同.

\therefore 选项(A)中两个函数的定义域 $D_1 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $D_2 = (-\infty, +\infty)$ 不相同; 选项(B)中的 $D_1 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \neq D_2 = (0, +\infty)$; 而选项(C)中的两个函数定义域虽相同, 但对应法则不相同, 其中函数 $y = x$, 当 $x > 0$ 时, $y > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y < 0$. 而函数 $y = \sqrt{x^2}$, 当 $x > 0$ 时 $y > 0$; 当 $x < 0$ 时 $y > 0$.

对于选项(D)中的两个函数, 只是变量的表示字母不同, 但定义域和对应法则完全相同.

\therefore 仅选项(D)是正确的.

【方法点击】 区分两个函数是否相同, 关键是研究确定函数关系的两个要素——定义域和对应法则, 而与变量用什么字母表示无关.

基本题型 II: 求函数的定义域

例2 求下列函数的定义域.

(1) $y = \ln(x^2 - 1) + \arcsin \frac{1}{x+1}$.

(2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} + \lg(3x - 8)$.

解: (1) 欲使函数有意义, 则 $\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x + 1 \neq 0, \\ \left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1. \end{cases}$ 由 $x^2 - 1 > 0$ 得 $x < -1$ 或 $x > 1$.

由 $\left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1$, 得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 0$, 故原函数定义域为 $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

(2) 欲使函数有意义, 则 $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ 3x - 8 > 0, \end{cases}$ 由 $x^2 - x - 6 > 0$ 得 $x > 3$ 或 $x < -2$;

由 $3x - 8 > 0$, 得 $x > \frac{8}{3}$, 故函数的定义域为 $(3, +\infty)$.

【方法点击】 求初等函数的定义域有下列原则: ① 分母不能为零. ② 偶次根式的被开方数大于等于零. ③ 对数的真数大于零. ④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x| \leq 1$. ⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

第四节

分段函数

一、知识要点与考点

1. 分段函数

名称	定义	说明
分段函数	对于其定义域内自变量 x 不同的取值,不能用一个统一的数学表达式表示,而要用两个或两个以上的式子表示的一类函数称为“分段函数”	分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数

2. 重点、难点与考点

重点	分段函数
难点	分段函数的判别与运算
考点	分段函数求值及运算

二、经典例题解析

基本题型 I: 求分段函数的定义域

例1 求函数 $y = \frac{1}{\ln|x|}$ 的定义域.

解: 绝对值函数可以化为分段函数

$$y = \frac{1}{\ln|x|} = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & x > 0 \text{ 且 } x \neq 1 \\ \frac{1}{\ln(-x)}, & x < 0 \text{ 且 } x \neq -1 \end{cases}$$

其中第一段的定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, 第二段的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, 再取各段定义域的并集 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 即定义域为 $\{x | -\infty < x < +\infty \text{ 且 } x \neq 0, x \neq \pm 1\}$.

【方法点击】 分段函数的定义域就是将每段表达式的定义域并在一起.

基本题型 II: 分段函数求值

例2 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x+1, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$ 求 $f(3), f(2), f(0), f(\frac{1}{2})$, $f(-\frac{1}{2})$ 及 $f(x+1)$.解: $f(3) = (x+1)|_{x=3} = 4$ $f(2) = (x+1)|_{x=2} = 3$ $f(0) = 2|_{x=0} = 2$ $f(\frac{1}{2}) = 2|_{x=\frac{1}{2}} = 2$