小波分析与应用实例

徐佩霞　孙功宪　编著

中国科学技术大学出版社

小波分析与应用实例

徐佩霞　孙功宪　编著

中国科学技术大学出版社

1996·合肥

1

图书在版编目(CIP)数据

小波分析与应用实例 / 徐佩霞 孙功宪 编著.—合肥：中国科学技术大学出版社，1996 年 7 月
ISBN 7-312-00796
I 小波分析……
II ①徐佩霞 ②孙功宪
III ①分析 ②应用
IV TN

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编： 230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本： 850×1168/32 印张： 11 字数： 296 千字
1996 年 7 月第 1 版 1996 年 7 月第 1 次印刷
印数： 1 — 3 000 册
ISBN 7-312-00796-1/TN•27 定价：11.90 元

内 容 简 介

本书阐述了小波变换的基本原理和基本方法，介绍了小波分析在信号处理与信号检测、语音与图象编码、多尺度边缘提取与重建等领域的应用，并给出了许多实用程序，最后对小波分析的最新发展动向作了讨论和研究.

本书介绍的理论和方法，很多内容是作者和同事们所研究的科研成果.其特点在于避免了繁琐的数学推导，面向实际应用. 本书适合于信号与信息处理、通信与电子系统、电路与系统、应用数学等方面科技工作者使用和参考. 或者作为研究生和高年级本科生的教材和教学参考书.

小波分析与应用研究是"八·五"国家自然科学基金、中国科学院、中国石油天然气总公司、大庆油田联合资助项目

前　言

小波分析(Wavelet Analysis)或多分辨率分析(Multiresolution Analysis)作为一种新兴的理论，是数学发展史上的重要成果．它无论是对数学还是对工程应用都产生了深远的影响．小波分析已经和将要广泛应用于理论数学、应用数学、信号处理、语音识别与合成、自动控制、图象处理与分析、天体物理、分形等领域．从原则上讲,凡传统使用Fourier分析的地方，都可以用小波分析代替．小波分析在时域和频域同时具有良好的局部化特性，而且由于对高频采取逐渐精细的时域或空域步长，从而可以聚焦到分析对象的任意细节，对传统的Fourier分析提出了挑战.

本书详细论述了小波变换的基本原理和基本方法，阐述了小波分析在语音信号处理、图象信号处理、信号检测、语音与图象编码、多尺度边缘提取与重建等领域的应用，并对小波变换的快速算法和算法结构以及小波分析的最新发展动向作了讨论和研究．本书还讨论了小波包的基本原理及其应用．为了方便阅读，书后附有各种算法的C语言源程序清单.

本书的特点在于避免了繁琐的数学推导，面向实际应用，从工程角度来论述小波分析，这一点对工程技术人员非常有益.本书特别适合于信号与信息处理、通信与电子系统、语音处理与编码、图象处理与编码、电路与系统、应用数学等方面研究人员使用和参考．值得一提的是，本书中很多内容都是作者和同事们所研究的科研成果，并且吸收了国内外的最新动态，具有很强的可读性和实用性.

由于作者的水平有限和成书时间仓促，书中一定存在许多缺陷，恳请相关专家和读者指正.

本书在选撰过程中，得到了校内外的老师和项目联合资助单位的热情支持和鼓励. 特别是中国科学技术大学通信与电子系统教研室的同事们经常与作者讨论本书所涉及的学术问题，并且给了作者良好的成书环境，在此深表感谢.

作　者

1996年6月于合肥

目　次

第一章　小波分析基础

本章是小波分析(Wavelet Analysis)的理论基础，也是以后章节的基础. 这里从连续小波变换谈起，讨论了多分辨率分析(Multiresolution Analysis)和Mallat金字塔算法，并且给出了规范正交小波基和镜象滤波器的一系列描述. 本章最后还对小波的时频局部化分析作了讨论.

1.1　小波分析简介

近年来，由函数h经伸缩和平移得到的一族函数

$$h_{ab}(x) = |a|^{\frac{-1}{2}} h(\frac{x-b}{a}) \qquad a, b \in R,\ a \neq 0 \tag{1.1}$$

被广泛应用于数学理论和其它领域，此函数被称之为**小波函数族**. 式中，a为伸缩因子，b为平移因子.

这种伸缩和平移的思想源远流长，它已经在信号处理、信号检测、多尺度边缘等领域得到应用. 根据应用领域不同可以选择不同的参数a,b. 如果让(1.1)式中a,b在$R^* \times R$，$(R^* = R\setminus\{0\})$上连续变化，则任意函数$f \in L^2(R)$可以表示为

$$Uf(a,b) = < h_{ab}, f > = |a|^{\frac{-1}{2}} \int \overline{h(\frac{x-b}{a})} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

如果h满足约束条件

$$\int \frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{\omega} \mathrm{d}\omega < \infty \tag{1.3}$$

式中, ^表示Fourier变换

$$\hat{h}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{j\omega x}h(x)\mathrm{d}x$$

那么由(1.2)式定义的U是 $L^2(R)$ 到 $L^2(R^* \times R;\ a^{-2}dadb)$ 的映射. U称为**连续小波变换**. 满足(1.3)式的h称为**允许小波**.

(1.3)事实上表示, h有足够的衰减速度, 并且均值为0. 这也是在实际工作中所希望的结果.

$$\int h(x)\mathrm{d}x=0 \tag{1.4}$$

典型情况是h有些振荡, 例如

$$h(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{\frac{-1}{4}}(1-x^2)e^{\frac{-x^2}{2}} \tag{1.5}$$

在其它一些应用场合, 可以限制(1.1)式中参数a,b在离散值上变化. 固定**伸缩步长**$a_0>1$, **移位步长**$b_0\neq 0$. 则有

$$h_{mn}(x)=a_0^{\frac{-m}{2}}h(a_0^{-m}x-nb_0) \tag{1.6}$$

即

$$a=a_0^m,\ \ b=nb_0a_0^m$$

我们可以看到,对应于大的正的m, h_{m0}波形是展开的, 同时有大的平移因子$b_0a_0^m$与之对应. 对于大的负值m, 情况正好相反, h_{m0}波形是集中的, 小的平移因子$b_0a_0^m$就足以覆盖.

离散小波变换T是和离散小波联系在一起的, 它把函数f映射到Z^2中的数列.

$$\begin{aligned}(Tf)_{mn}&=\langle h_{mn},f\rangle\\&=a_0^{\frac{-m}{2}}\int\overline{h(a_0^{-m}x-nb_0)}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.7}$$

如果h为允许小波，并且有足够的衰减，则T把 $L^2(R)$ 映射到 $l^2(Z^2)$. 通常，T不存在逆，如果存在，即对一些$A>0, B<\infty$

$$A\|f\|^2 \le \sum_{m,n\in Z} |< h_{mn}, f >|^2 \le B\|f\|^2 \qquad f \in L^2(R)$$

则函数族$\{h_{mn}; m,n \in Z\}$称为**一个框架**. 这时可以建立从小波系数$< h_{mn}, f >$重建f 的数字方法. 特别地

$$f = \frac{2}{A+B}\sum_{mn} h_{mn} < h_{mn}, f > +R \tag{1.8}$$

这里，$\|R\| \le O(\frac{B}{A} - 1)\|f\|$.

如果B/A接近于1，则误差项R可以被忽略. 实际上，使用(1.5)式定义的小波，采用$a_0 = 2^{\frac{1}{4}}, b_0 = 5$，可以有 $\frac{B}{A} - 1 \le 10^{-5}$，重建公式 (1.8) 给出了很好的结果. 甚至对于大的$a_0 = 2$,对应的B/A-1 ≈ 0.08, 用它对语音进行分解和重建时，仍有很好的清晰度和可懂度[1].

在有些场合下，小波函数族h_{mn}是相关的，而不是相互独立的，因而离散小波变换域只是$l^2(Z^2)$的子空间. 框架相关性越强，子空间就越小，这在某些场合是有用的(如去除加性噪声). 如果a_0, b_0分别接近于1和0，则框架相关性很强，接近于连续小波，它可以用于边缘检测等领域. 在另外一些场合，则走向另一个极端，要求去除框架的相关性. 人们选取h和a_0, b_0,(a_0典型值为2), 使h_{mn}构成规范正交基. $L^2(R)$内最简单的规范正交基就是著名的Harr基.

$$h(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ -1 & \dfrac{1}{2}\le x<1\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}\tag{1.9}$$

并且 $a_0=2, b_0=1$.

$$h_{mn}(x)=2^{\frac{-m}{2}}h(2^{-m}x-n)\qquad m,n\in Z\tag{1.10}$$

构成 $L^2(R)$ 规范正交基. 对 $1<p<\infty$,它同样构成 $L^p(R)$ 规范正交基.

S.Mallat和Y.Meyer发现这些小波函数都可以用多分辨率分析统一起来. 对函数 $f\in L^2(R^d)$, 可以用一系列函数的极限来表示, $f=\lim\limits_{m\to-\infty}P_mf$, P_mf 代表了尺度 2^m 上的平滑版本. 固定m, 则 $<h_{mn},f>$ 对应于两个平滑版本的差别. Mallat算法在语音与图象的分解与重建中起到了重要作用, 就像FFT在经典Fourier分析中一样举足轻重.

1.2 多分辨率分析

多分辨率分析是在 $L^2(R)$ 函数空间内, 将函数f 描述为一系列近似函数的极限. 每一个近似都是函数f 的平滑版本, 而且具有越来越精细的近似函数. 这些近似都是在不同尺度上得到的, 多分辨率分析由此得名.

严格地说, 多分辨率分析的思想是:

① $L^2(R)$ 内一系列嵌套子空间 $V_m, m\in Z$,

$$\cdots V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\cdots\tag{1.11}$$

具有

② 逼近性 $\bigcap_{m\in Z} V_m = \{0\}, \bigcup_{m\in Z} V_m = L^2(R)$ (1.12)

③ 伸缩性 $f \in V_m \Leftrightarrow f(2\bullet) \in V_m$ (1.13)

因此，V_m依次是上一级子空间V_{m-1}的近似子空间.

④ 存在函数$\varphi \in V_0$,对所有的 $m \in Z, \varphi_{mn}$构成V_m的无条件基.即

$$V_m = span\{\varphi_{mn}, n \in Z\} \tag{1.14a}$$

⑤ 存在$0 < A \le B < \infty$，对所有的$c(n)_{n\in Z} \in l^2(Z)$,有

$$A\sum_n |c_n|^2 \le \|\sum_n c_n\varphi_n\|^2 \le B\sum_n |c_n|^2 \tag{1.14b}$$

这里，$\varphi_{mn}(x) = 2^{\frac{-m}{2}}\varphi(2^{-m}x - n)$.

令P表示向V_m上的投影，从(1.11)和(1.12)式可以看出，对任意的$f \in L^2(R)$, $\lim_{m\to-\infty} P_m f = f$.由(1.13)式保证了$V_m$对应不同尺度. $f \in V_m \Rightarrow f(\bullet - 2^m n) \in V_m, m \in Z$，则是(1.14)式必然结果.

为了讨论多分辨率分析，这里从一个简单的例子开始.

例 1.1 一个典型的例子是:

$V_m = \{f \in L^2(R);\ f$在$[2^m n, 2^m(n+1)[$上为常数$, n \in Z\}$

显然满足(1.11)~(1.13)式. 定义投影算子P为

$$P_m f|_{[2^m n, 2^m(n+1)[} = 2^{-m}\int_{2^m n}^{2^m(n+1)} f(x)\mathrm{d}x$$

随着m增加, $P_m f$是f越来越精确的近似. 可以选择

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & 其\ \ 它 \end{cases}$$

有$\varphi \in V_0, V_m = \overline{span\{\varphi_{mn}\}}$.

由(1.13)式知，(1.14)式可以用更弱条件$V_0 = \overline{span\{\varphi_{0n}\}}$代替．不失一般性，$\varphi_{0n}$是规范正交的（对任意$m, \varphi_{mn}$也是）．如果不是规范正交的，可以令

$$(\tilde{\varphi})^{\wedge}(\omega) = c\hat{\varphi}(\omega)\left(\sum_{k\in Z}\left|\tilde{\varphi}(\omega + 2k\pi)\right|^2\right)^{\frac{-1}{2}} \tag{1.15}$$

有$\overline{span\{\varphi_{0n}\}} = \overline{span\{\tilde{\varphi}_{0n}\}}$．并且$\tilde{\varphi}_{0n}$为规范正交的．

定义

$$c_{mn}(f) = <\varphi_{mn}, f> = 2^{\frac{-m}{2}}\int_{2^m n}^{2^m(n+1)} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.16}$$

$$P_m f = \sum_n c_{mn}(f)\varphi_{mn}$$

下面我们来看两个不同的近似$P_m f$和$P_{m+1} f$之间的差．

很容易验证

$$\varphi_{m+1n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{m2n} + \varphi_{m2n+1})$$

因而

$$c_{m+1n}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}[c_{m2n}(f) + c_{m2n+1}(f)]$$

两个近似之差为

$$P_m f - P_{m+1} f = \frac{1}{2}\sum_n [c_{m2n}(f) - c_{m2n+1}(f)][\varphi_{m2n} - \varphi_{m2n+1}]$$

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{其　它} \end{cases} \tag{1.17}$$