高等学校试用教材

概率论及数理统计

上 册

中山大学数学力学系
《概率论及数理统计》编写小组编

高等学校试用教材

概率论及数理统计

上册

中山大学数学力学系
《概率论及数理统计》编写小组编

本书是根据高等学校理科数学教材编写大纲讨论会制定的"概率论及数理统计教材编写大纲"编写的. 全书分上、下两册出版.

上册为概率论部分. 内容包括随机事件和概率、随机变数及其分布函数、随机变数的数字特征、极限定理等五章,以及排列组合补充、集合论简介、黎曼-斯蒂阶积分三个附录.

本书可作为综合大学、师范院校数学专业、计算数学专业的试用教材,也可作其它有关专业的教学参考书.

高等学校试用教材

概率论及数理统计

上　册

中山大学数学力学系

《概率论及数理统计》编写小组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 11.625　字数 280,000

1980年3月第1版　1980年10月第1次印刷

印数 00,001—36,000

书号 13012·0449　定价 0.85 元

说　明

本教材是根据1977年10月高等学校理科数学教材编写大纲讨论会上所制定的“概率论及数理统计”教材编写大纲编写的．在编写过程中，按照讨论会上提出的基本原则：(1) 这门课程是大学所设置的课程中唯一的一门研究随机现象统计规律性的基础课；(2)宜于没有学习过实变函数论课、具有初等微积分基础的读者自学；(3) 学时安排72～108学时．我们作了如下尝试：1) 保证理论的完整性与严谨性，对概率论及数理统计学中最基本的概念、定理和公式，作较为全面的且比较严格的叙述；2) 由于是一门介绍随机现象的统计规律性的学科，因此，较为注意建立随机现象及其统计规律性的基本概念和方法，尽量阐述清楚基本概念、定理和公式的客观实际意义；3) 由于学时所限，在处理教材时，对某些纯分析的有关内容，不得不采用指出参考书、用小字编写或打＊号的办法，从而保证重点；4) 在选择例子方面，采用了两种类型的例子，一种例子是比较简单且易于为人们所理解的，这种例子主要是用来便于引入或解释概念、定义及定理．另一种例子是应用于各方面的随机现象的实例，特别是有典型意义的例子，以体现这门课程的应用广泛性这一特点；5) 论证当中，尽可能用微积分的知识，避免应用较为高深的数学知识(如勒贝格积分等)．于是，必然会碰到有难于证明的命题，如关于随机变数的函数是否是随机变数？独立随机变数的函数是否仍独立？这些问题只给出条件与结论，不加证明(一般都指出了参考书)．

全书分为三部分：第一部分是概率论基础，包括第一、二、三、四、五共五章；第二部分是数理统计初步，包括第六、七、八、九共四

章；第三部分是随机过程引论及概率论与数理统计在计算方法中的应用，包括第十、十一两章.

本教材适用于综合性大学及师范院校理科和工科院校的数学、计算数学及其他有关专业的“概率论及数理统计”课，各专业可根据需要及讲授学时数，适当选择本教材中的有关内容.

本教材由梁之舜、邓集贤两同志主编，杨维权、司徒荣、邓永录三同志参加编写. 杨维权、许刘俊两同志编写全部习题和部份解答.

1979年1月在广州举行了有14个兄弟院校28名代表参加的审稿会议，与会代表认真审阅了全书，并就书的结构、选材和细节提出了十分中肯的意见，在此基础上我们又对全书作了最后修改. 谨此向主审单位南开大学以及其他参加审稿会的兄弟院校有关同志表示衷心感谢. 由于编者水平有限，时间匆促，本教材难免存在不少缺点和不当之处，恳请读者提出指正.

编　者

1979年3月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

序　言

当人们开始接触数学或把数学作为研究自然现象的工具时，人们很快就感觉到数学有一个显著的特点，就是确切性：二加一等于多少？一个等腰直角三角形的每个锐角是多少度？直角三角形勾股弦之间的关系如何？人们可以得到肯定而确切的唯一结论．当然也有不完全确定的情形，例如圆周率 π 的近似值是 3.1416 还是 3.14159？但这仅是用十进位表示中近似程度的不同而已，π 的值还应该是确定的．当时人们认为数学之所以成为研究自然现象的重要而有力的工具，是因为自然现象都应该是能肯定其结果的，因为只有这样才能应用数学作为研究的工具，并根据所作的科学结论对未来进行预测与推断．

人类的社会实践使人们逐步认识到自然现象和科学实验的结果等，并非都是确定的，经常碰到在相同条件下可能得到多种不同结果的情形．然而在进行了大量观察或多次重复试验后，人们逐步发现这些在一次观察或试验不能肯定结果的现象具有近乎必然的客观规律．而且发现应用数学的方法可以研究各种结果出现的可能性大小，从而发展了研究偶然现象规律性的学科——概率论和数理统计．

概率论和数理统计的概念和一些简单的方法，特别是连系于赌博和人口统计的概型和方法，可能出现比较早．但它们之所以得到发展且逐步形成一门严谨的学科，还是和社会生产力的发展有密切关系．换句话说，主要是产生于社会客观实际的需要．

在十七世纪资本主义上升的初期，关闭的封建社会经济逐渐为航海商业经济所取代．航海商业是冒风险的事业，大量投资是

否有利可图？怎样估计出现各种不幸事故与自然灾害的可能性？“概率统计”从某种意义上来说，正是从研究这一类问题开始的.

航海商业的发展，开始了为掠夺殖民地的战争而大量征兵征税，发展了人口统计学；制造枪炮，开始了弹道学的研究；天文学的观测和力学的分析，开始了对观测误差的规律的研究，所有这些都为“概率统计”的发展开辟了道路.

当代科学发展的一个特点是概率统计的方法日益渗透到各个领域. 很多力学现象都不能排除随机因素的影响；波涛翻滚的海浪只能用随机过程来描述；各种仪器设备、自动化装置、计算机等的效能估计都和可靠性理论有关；从蒲丰的针（见第一章的例 1.2.9）开始发展起来的概率计算方法（蒙特卡罗方法）是解决一些计算问题（特别是多维）和求复杂边界的微分方程解的有效工具；最优控制中对随机状态的估计更必须应用概率统计学. 生产质量控制中的抽样检查和进行科学实验都需要根据“部分”推断“总体”，这种好像“坐井观天”的方法的理论根据是什么？这都必须从概率统计的基本理论中找出答案.

这本教材只是一本概率统计学的入门书，我们希望读者通过学习本教材获得一些基础知识，为进一步学习概率统计学创造必要的条件.

目　录

第一章 随机事件和概率

§1.1 随机事件的直观意义及其运算

一、必然现象与随机现象

在自然界里，在生产实践和科学实验中，人们观察到的现象大体可归结为两种类型．一类是可事前预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的；或是根据它过去的状态，在相同条件下完全可以预言将来的发展．我们把这一类型现象称之为确定性现象或必然现象．例如重物在高处总是垂直落到地面；在一个大气压下，水在100°C时会沸腾；水稻的生长从播种到收割，总是经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段；在射击时（假设空气阻力很小可以忽略）弹道完全由射击的初始条件（如炮弹的初速、发射角和弹道参数等）决定．早期的科学就是研究这一类现象的规律性，所应用的数学工具如数学分析、几何、代数、微分方程等是大家所熟悉的．但人们逐渐还发现另一类型的现象，它是事前不可预言的，即在相同条件下重复进行试验，每次结果未必相同；或是知道它过去的状况，在相同条件下，未来的发展事前却不能完全肯定．这一类型的现象我们称之为偶然性现象或随机现象．如抛掷一个质地均匀的对称的硬币，结果可能是正面向上，或背面向上；新生的婴儿可能是男或是女；在相同海况与气象条件下，某定点海面的浪高时起时伏；当空气阻力等不能忽略时，弹道不能根据初始条件完全确定，可能向不同方向作程度不同的偏移，事前不能肯定．类似的例子还可以举出许多来．

初时人们把这种现象称为“偶然现象”是指它是“不正常的”、

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

“出乎意料的”或者是“原因不明的”，甚至对于迅雷、疾风、陨石、地震等认为是天降的灾难.

是不是这些偶然现象都没有什么规律性可寻呢？事实上并非如此. 人们通过长期的反复观察和实践，逐渐发现所谓不可预言，只是对一次或少数几次观察或实践而言，当在相同条件下进行大量观察时，偶然现象都呈现某种规律，因而也是可以预言的. 例如根据各个国家各个时期的人口统计资料，新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是 1:1. 我国古代早在纪元前 2238 年，根据人口普查已算出了这个结果. 又如人的高度虽然各不相同，但通过大量的统计，如果在一定范围内把人的高度按所占的比例画出“直方图”，就可以连成一条和铜钟的纵剖面一样的曲线；定点海面在一段时间内的浪高，也可以画出类似的曲线，如图 1.1.1. 还有更简单的例子(大家可以立即检验的)，均匀的硬币抛掷多次，正面和背面出现的次数比例总是近似 1:1，而且大体上抛掷次数愈多，愈接近这个比值. 历史上，蒲丰掷过 4040 次，得到 2048 次正面；皮尔逊掷过 24000 次，得到 12012 次正面.

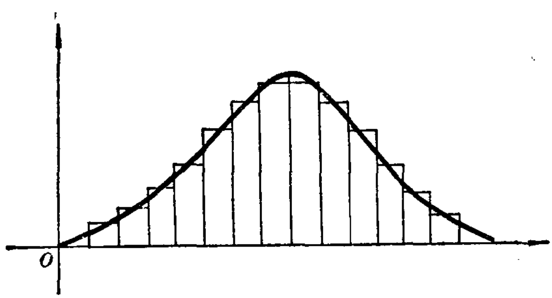

图 1.1.1

从上面的叙述中我们看到，自然界中存在着具有如下特性的现象：在一定的条件组实现时，有多种可能的结果发生，事前人们不能预言将出现那种结果，但大量重复观察时，所得的结果却呈现某

种规律，称为随机现象的统计规律性．

正如革命导师恩格斯所说："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律．"（《马克思恩格斯选集》中译本第四卷243页）．

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科．

根据马克思、恩格斯的论述，必然性与偶然性是对立统一的概念，偶然性不能理解为"碰巧的"，（为了避免作这种误解，人们往往把它称为"随机性"）它蕴含内在必然性的规律；反过来，被断定为必然的东西，是由纯粹的偶然性构成的．

例1.1.1 研究气体的性质知道，由于气体是由数目众多的分子构成，这些分子以很快的速度进行剧烈的运动，在运动的过程中相互碰撞而改变其动量和方向，因而它的运动是随机现象．而大量的分子运动呈现出的总体现象——温度、压强却满足波义耳定律．

曾经有人认为，所以会出现事前不可预言的偶然现象，是因为我们对一个现象出现的原因还缺乏全面足够的知识，认为随着科学的发展和人类认识的深化，总有一天将不再存在不可预言的随机现象．

诚然，增加条件组的条件来减少随机性是可能的．例如，人的高度按不同的年龄、地区、性别是有差异的，若限定在同一地区，在一定年龄范围内选取同性别的人来测量高度，可能会得到比一般任意选取较均匀的结果，但随机因素的影响总是不可避免的．很多现象初始条件的稍微改变，其产生的后果却差别很大．在实际中即使人们有可能把条件组的条件绝对控制到每次都一样，但影响的因素还是大量的，且互相作用错综复杂．例如在例1.1.1关

于气体分子运动的例子中，即使我们把一立方厘米气体的 2.683×10^{18} 个分子的运动方程都列出来(注意，这里在建立方程时，已经是忽略了许多次要因素)，我们要求出这组联立方程的解也是很困难的.

因此，偶然性现象是客观存在的，那种否认偶然现象的想法，是"力图用根本否认偶然性的办法来对付偶然性"(恩格斯《自然辩证法》中译本 196 页).

二、随机试验与事件

为了叙述方便，我们把对自然现象进行观察或进行一次科学试验，统称为一个试验. 如果这个试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，我们就称它为一个随机试验.

下面，我们所说的试验都是指随机试验.

进行一个试验总有一个需要观察的目的，根据这个目的，试验被观察到有多种不同的可能结果. 例如抛掷一个质地均匀的硬币，我们的目的是要观察它那一面朝上，这里只有两种不同的结果:"正面"或"背面"，至于硬币落在桌面上那一个位置，朝那个方向滚动等不在目的之列，我们不算作结果.

试验的每一个可能结果一般称为随机事件，简称为事件，我们用字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

例 1.1.2 在 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选取一个，可有十种不同的结果:"取得一个数是 0"，…"取得一个数是 9". 但还有其它可能结果:"取得一个是奇数"，"取得一个是大于 4 的数"，"取得一个数是 3 的倍数"等等.

我们把不可能再分的事件称为基本事件. 例如在例 1.1.2 中，"取得一个数是 0"，"取得一个数是 1"，…"取得一个数是 9"都是基本事件. 由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件. 例

如"取得一个数为 3 的倍数"是一个复合事件，它由"取得一个数是 3"，"取得一个数是 6"，"取得一个数是 9"三个基本事件组合而成.

一个事件是否称为基本事件是相对于试验的目的来说的. 例如量度人的身高，一般说，区间(0,4)中的任一实数，都可以是一个基本事件，这时，基本事件有无穷个；但如果量度高度是为了了解乘车是否需要买全票、半票或免票，这时就只有三个基本事件了.

三、事件的关系与运算

进行一个试验，有这样或那样的事件发生，它们各有不同的特性，彼此之间又有一定的联系. 下面我们引进事件之间的一些重要关系和运算，这将有利于今后对事件和它的概率的叙述和研究.

1. 在一定条件组下必然发生的事件称为必然事件. 在一定条件组下必然不发生的事件称为不可能事件. 必然事件用符号Ω表示(Ω汉语拼音为 oumiga)，不可能事件用符号$\varnothing$表示. 把必然事件和不可能事件也算作随机事件，这对我们讨论问题是方便的.

例如，就目前世界上人高来说"人的高度小于 4 米"是必然事件，而"人的高度大于 4 米"则是不可能事件.

2. 如果两个事件A与B不可能同时发生，则称事件A与B为互不相容. 例如必然事件Ω与不可能事件$\varnothing$是互不相容的，又例如在例 1.1.2 中"取得一个数是 0"和"取得一个数是 1"是互不相容的.

如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$中的任意两个事件是互不相容的，则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容.

3. 如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件A含于事件B，或称事件B包含事件A，并记为$A \subset B$. 如例 1.1.2 中，令A表示"取得一数为 4 的倍数"，B表示"取得一数为偶数"，则$A \subset B$.

又如对任一事件A，有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

$A\subset B$的一个等价说法是，如果事件B不发生则事件A必然不发生.

如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B相等，记为$A=B$.

4. 如C表示"事件A与B中至少有一个发生"这一事件，称它为A与B的和，记为$C=A\cup B$. 如在例1.1.2中，令A表示"取出一数为偶数"[①]，B表示"取得一数大于5"，则$C=A\cup B$表示"取得一数或者大于5，或者是偶数"，即等价于"取出一数为0,2,4,6,7,8,9中之一数".

5. 如D表示"事件A与B同时发生"这一事件，称它为A与B的积，记为$D=A\cap B$. 用上例，则D表"取得一数为6或8".

由事件积的定义，立即得到：

a) 对任一事件A，有$A\cap\Omega=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

b) 若A_1,A_2互不相容，则$A_1\cap A_2=\varnothing$.

6. 如E表示"事件A发生而事件B不发生"这一事件，则称E为A与B之差，记为$E=A-B$. 用前例，$E=A-B$表示"取得一个数为0,2,4中之一数".

由二事件之差的定义立即得到：对任意事件A有

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;$$
$$A-\Omega=\varnothing.$$

7. Ω与A之差$\Omega-A$这一事件称为A的逆事件，记为$\bar{A}$，它表示"A不发生"这一事件. 用前例，$\bar{A}$表示"取出一数为奇数".

事件的和与事件的积都可以推广到有限多个事件，即

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$表示"$A_1$, A_2, …, A_n中至少有一事件发生"这一

① 为方便起见，以后均把数0算作偶数.

事件.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示"$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 同时发生"这一事件.

我们有时需要考虑无穷多个事件，需要把事件的和与积推广到可列无穷多个的情形，即考虑

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \text{ 与 } B=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i.$$

为了说明这一需要，现举一例: 一人进行科学实验，直到试验成功为止，若 A 表实验成功，A_i 表实验到第 i 次才成功，则显然有

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

可以验证一般事件的运算满足如下关系:

1) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

2) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

3) 分配律: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

分配律可以推广到有穷或可列无穷的情形，即

$$A\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(A\cap A_i),\quad A\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(A\cup A_i);$$

4) $A-B=A\cap\bar{B}$;

5) 对有限个或可列无穷个 A_i，恒有

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\bar{A}_i,\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\bar{A}_i.$$

四、事件的集合与几何图形表示，样本空间

对于事件及其运算，如果应用点集的概念和几何图示法，则较直观且易于理解.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com