大學物理學

第二冊

編著者　李怡嚴

東華書局印行

大學物理學

第二册

編著者

李怡嚴

參與執筆者

石育民　李俊弘　郭義雄
呂錦文　李義發　陳振益
李正雄　沈　樸　楊鼎彬

東華書局印行

中華民國五十七年二月初版
中華民國六十八年一月七版

大學用書 大學物理學（全四册）

第二册 定價 新台幣七十元整
（外埠酌加運費滙費）

編著者	李 怡 毅
發行人	卓 鑫 淼
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號 電話：3819470 郵撥：6481
印刷者	中 臺 印 刷 廠 臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
（56038）

大 學 物 理 學

第 二 冊 目 次

7

重　力　場

古代的天文學家們經過長期的觀察與爭論，終於發現行星是繞太陽而運行的；但是，行星是以甚樣的軌道繞太陽而運行呢？更深入的疑問是，行星爲什麼會繞太陽運行？刻卜勒 (Kepler) 分析布刺 (Tycho Brahe) 死後所遺下的許多對行星運動的觀測資料，終於歸納出他的三條定律，這三條定律完全地把行星運動描繪出來。對於第二個問題，一直到牛頓才得到解決，牛頓由他所建立的力學定律出發，再加上他個人的領悟以及對刻卜勒三大定律的分析，終於得到了結論，這就是著名的**重力定律** (Gravitational law)。

§ 7-1 牛頓的重力定律

牛頓的重力定律是說：

任何兩質點(Particle)之間，在兩質點的連線上，皆有一種相互的吸引力，此力的大小與兩質點的質量乘積成正比，而與它們之間的距離平方成反比。

寫成數學形式爲：

$$\mathbf{F}_{21}=-\mathbf{F}_{12}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (7\cdot1).$$

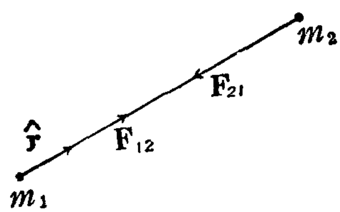

圖 7-1 兩質點間的重力相互作用

m_1 爲質點 1 的質量，m_2 爲質點 2 的質量，$\mathbf{F}_{12}$ 爲質點 2 對 1 的引力，$\mathbf{F}_{21}$ 爲質點 1 對 2 的引力，r 爲兩質點間的距離，$\hat{\mathbf{r}}$ 爲從質點 1 到質點 2 的單位向量 (Unit vector)。G 爲比例常數，稱爲**重力常數** (Gravitational constant)，經過實驗的決定，其值爲 6.670×10^{-11} Newton-m^2/kg^2，或 6.670×10^{-8}dyne-cm^2/g^2。

在這裡我們要注意一點，這裡所謂的質量，與在第二章內所定義的**慣性質量**(Inertial mass)在物理意義上並不相同，我們特稱爲**重力質量** (Gravitational mass)，(7·1) 式可視爲重力質量的定義。從物理意義上來說，重力質量可看成爲一種產生重力的**質點性質**，就好像電荷 (Charge) 爲產生靜電力 (Electrostatic force) 的質點性質一樣。很明顯的，這種意義，與慣性質量的意義截然不同。

在牛頓發表重力定律時，兩種質量的意義並不明朗，在他的定律中，他指出的是慣性質量；因此這個定律，在物理意義上是否站得住腳，就要看重力質量是否能與慣性質量相等。

1906 年伊特佛(Eötvös)對這個問題作了一個實驗，他的實驗裝置大致如圖 (7-2)，他的原理是，假若每一物質的重力質量與慣性質量相等，則每一個在地球表面上的物質，皆有相同的重力加速度。因為物質所受的重力等於其慣性質量乘以重力加速度(牛頓第二定律)。所以

$$-G\frac{M_g m_g}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = m_{in}\mathbf{g},$$

M_g 為地球的重力質量，m_g，m_{in} 分別為懸掛物的重力質量及慣性質量，$\mathbf{g}$ 為重力加速度。若 $m_g = m_{in}$，則

$$\mathbf{g} = -G\frac{M_g}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \qquad (7\cdot2)$$

所以每一種物質皆具有相同的重力加速度。

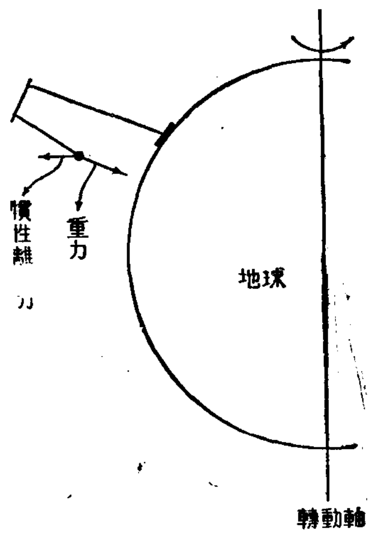

圖 7-2　伊特佛實驗的裝置情形，(其比例卻過分地誇張，這是一個過分簡化的圖。)

而由於地球的轉動，所引起的慣性離心加速度對各種懸掛物皆相同，因此，假若 $m_g = m_{in}$，則每一種不同的懸掛物，都有相同的平衡位置。

伊特佛從這個實驗上發現，在實驗的準確限度內，重力質量與慣性質量是相等的。近人狄克 (Dicke)在 1963 年也做了另外一個實驗以解決這個問題，他的結論也是和伊特佛的相同，而且準確度極高。

因此，牛頓定律在意義上是更為清晰了。因為慣性質量與重力質量相等，所以我們以後一概以質量稱它。

由 (7·2) 式可看出，具有任何質量的質點，只要對質量爲 M 的質點等距離，則所受的加速度的大小都相同。這是**廣義相對論** (General Relativity) 的基本出發點之一。愛因斯坦以爲，既然任何質點在重力的影響下皆有相同的加速度，我們可以不必說"這質點是因受重力而產生加速度"，而說"空間在質點 M 的影響下，具有使任何質點產生加速度

$$\mathbf{g}=-G\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (7\cdot3)$$

的性質"。這是處理重力現象的另一觀點。

我們再回頭來討論 (7·1) 式。假若有一物體，其質量密度爲 $\rho(\mathbf{r})$，則對質量爲 m 的質點的吸引力有多少呢？我們將這物體分成很多小體積 ΔV_i，這些體積小至可被看成爲質點，因此，第 i 個小體積，可看成質量爲 $\rho\Delta V_i$ 的質點，由圖(7-3)可知，$\rho\Delta V_i$ 對 m 的引力爲：

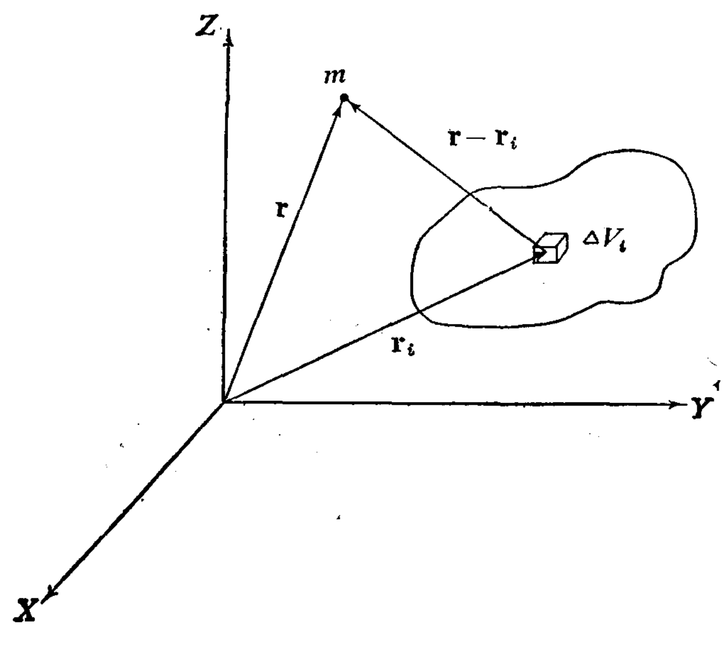

圖 7-3 質點 m 與物體中的小體積 ΔV_i 之位置關係。

$$-G\frac{m\rho(\mathbf{r}_i)\Delta V_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|},$$

所以，m 所受的總重力爲各小體積對它的重力之向量和，

$$\mathbf{F}=\sum_i -G\frac{m\rho(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\Delta V_i. \qquad (7\cdot4)$$

因 ΔV_i 甚小，故(7·4)式可被寫成

$$\mathbf{F}=-Gm\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV',$$

$\mathbf{r}'$ 爲物體內各點的位置向量。

假若，有質量密度分別爲 $\rho_1(\mathbf{r}_1)$ 及 $\rho_2(\mathbf{r}_2)$ 的兩個物體，則它們之間的重力爲

$$\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}=-G\int_{V_2}\rho(\mathbf{r}_2)dV_2\int_{V_1}\frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)dV_1, \qquad (7\cdot5)$$

$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$ 分別爲兩物體內各點的位置向量，$\mathbf{F}_{12}$ 爲物體 2 對 1 的吸引力，$\mathbf{F}_{21}$ 爲物體 1 對 2 的吸引力。

§ 7-2 重力場

牛頓的重力定律，在因果關係(Causality relation)上有些不恰當的地方；因爲它假定，兩質點不要任何媒介卽可發生作用，此稱爲超距作用(Action at a distance)。爲了避免這個不恰當的假定，我們換一個出發點來描述重力現象。

當質量爲 m 的質點被放在空間內的一點時，我們稱質點 m 在空間內造成一個**重力場** (Gravitational field)，而這重力場對任何別的質點 m' 都有作用力，也就是說，質點 m 以重力場爲媒介，與 m' 交換能量。假如 m' 所受的力爲 $\mathbf{F}$，則我們稱，在 m' 所在的地點的**重力場強度** (Cravitational Field intensity) 爲：

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{m'}. \tag{7·6}$$

由 (7·6) 式可知,在重力場中的一點,單位質量所受的重力就是那一點的重力場强度。

如果 m' 離 m 的距離爲 r,則由重力定律, m' 所受到的重力爲

$$\mathbf{F}=-G\frac{mm'}{r^3}\mathbf{r},$$

$\mathbf{r}$ 爲由 m 到 m' 的位置向量。

所以離 m 爲 $\mathbf{r}$ 之點的重力場强度爲:

$$\mathbf{E}=-G\frac{m}{r^3}\mathbf{r}. \tag{7·7}$$

在 C.G.S. 單位制中, $\mathbf{E}$ 的單位爲達因/克。

由(7·6)式又可以知道,假若有一重力場,其重力場强度爲 $\mathbf{E}$,而質點 m' 不影響這重力場,則 m' 所受的重力爲:

$$\mathbf{F}=m'\mathbf{E}. \tag{7·8}$$

在這種觀點下,我們不必直接去看質點與質點間的作用,整個牛頓重力定律可被(7·7)式與(7·8)式所取代。(7·7) 式表示質量 m 所產生的重力場,而(7·8)式是描述質點 m' 與重力場的交互作用。

由(7·7)式,我們立刻可以得到下述的性質:

$$\nabla\times\mathbf{E}=0, \tag{7·9}$$

將 (7·9) 式的兩邊,同時對小面積 $d\mathbf{S}$ 作純量乘積(見圖(7-4)),然後對面積 S 積分,則得

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}=0. \tag{7·10}$$

由斯鐸克定理 (Stoke's theorem)

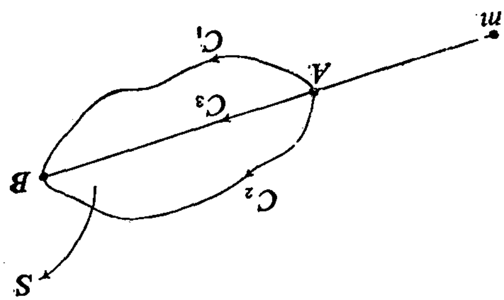

圖 7-4　由 A 點到 B 點可經由三種不同路徑 C_1, C_2, C_3。S 爲 C_1, C_2 所圍成的面積。

7·10) 式的左邊, 可寫成沿面積 S 的邊界 C 作線積分 (參看附錄丙):(
故

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}=\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0, \qquad (7\cdot11)$$

(7·11)式可被化成

$$\int_{C_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}-\int_{C_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0,$$

所以

$$\int_{C_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_{C_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}. \qquad (7\cdot12)$$

(7·12)式的左邊, 爲將單位質量由A點沿着 C_1 的路徑移到 B 點, 重力場所作的功, 右邊爲沿着 C_2 時所作的功; 所以我們得到一個結論, **將單位質量的質點由 A 點移到 B 點時, 重力場所作的功與所走的路徑無關。**

最簡單的計算法, 是沿着直線路徑 C_3, 則所作的功爲

$$W_{A\to B}=\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{r_A}^{r_B}\frac{Gm}{r^2}dr=\frac{Gm}{r}\bigg|_{r_A}^{r_B}$$

$$=\left(-\frac{Gm}{r_A}\right)-\left(-\frac{Gm}{r_B}\right). \qquad (7\cdot13)$$

由(7·13)式可看出,$W_{A\to B}$ 只與兩端點的位置有關。如果 $r_B\to\infty$,則

$$W_{A\to\infty}=\left(-\frac{Gm}{r_A}\right).$$

$W_{A\to\infty}$ 爲將單位質量,由 A 點移至無窮遠點,重力場所作的功。我們定義 $W_{A\to\infty}$ 爲 A 點的重力位(Gravitational potential)$\phi(A)$與 ∞ 點的重力位 $\phi(B)$之差,

$$\phi(A)-\phi(\infty)=W_{A\to\infty}=\left(-\frac{Gm}{r_A}\right). \qquad (7\cdot14)$$

(7·14)式爲重力位的定義。假設 $\phi(\infty)=0$,即定 ∞ 點爲重力位的基準點,則在 A 點的重力位爲

$$\phi(A)=-\frac{Gm}{r_A}, \qquad (7\cdot15)$$

而(7·13)式可被寫成

$$W_{A\to B}=\phi(A)-\phi(B). \qquad (7\cdot16)$$

假若將質量爲 m' 的質點從 A 移到 B,則重力場所作的功,由(7·16)式得知爲

$$\begin{aligned} U_{A\to B}=m'W_{A\to B}&=m'\phi(A)-m'\phi(B) \qquad (7\cdot17)\\ &=U(A)-U(B). \end{aligned}$$

$m'\phi(A)$, $m'\phi(B)$ 分別稱爲 m' 在 A 點及 B 點所具有的重力位能 (Gravitational potential energy)。由 (7·15) 式得知,在 A 點的重力位能爲

$$U(A)=-\frac{Gmm'}{r_A}, \qquad (7\cdot18)$$

比較(7·15)與(7·7)式,則得

$$\mathbf{E}(r)=-\nabla\phi(r). \qquad (7\cdot19)$$

而由(7·8)式，則得

$$\mathbf{F}=m'\mathbf{E}(r)=-\nabla(m'\phi(r))=-\nabla U(r). \qquad (7\cdot20)$$

由 (7·19)，(7·20) 式，如重力場的重力位爲已知，則重力場强度或質點 m' 所受的力即可被求出。

在重力位的定義中，我們做了一個假設：$\phi(\infty)=0$，這個假設在物理意義上是否恰當呢？假若重力位的基準點不在 ∞ 點，則 $\phi(\infty)$ 不爲零，而有一定值 Δ，則

$$\phi(A)=\left(-\frac{GM}{r_A}\right)+\Delta, \qquad (7\cdot21)$$

假若重力位爲 (7·21) 式的形式，則由(7·16) 與 (7·19)式可看出，不論 Δ 爲若干，都能得到相同的 $W_{A\to B}$ 及 $\mathbf{E}(r)$。但在物理的度量上，只能够量到 $\mathbf{E}$ 與 $W_{A\to B}$，而量不到 $\phi(r)$，因此 $\phi(r)$ 只是在數學上與物理量 $\mathbf{E}$、$W_{A\to B}$ 有關聯，所以，只要能得到同一的 $\mathbf{E}$ 與 $W_{A\to B}$ 的值，任何 Δ 都是許可的。由此看來，Δ 只有數學上的意義，而沒有物理上的意義。Δ 可以爲任何值，**也就是說重力位基準點可以任意選取**，但是永遠影響不了 $\mathbf{E}$ 與 $W_{A\to B}$ 的值。爲簡單起見，一般皆令 $\Delta=0$，則重力位爲(7·15)的形式。

假若造成重力場的，不是單一個質點，而是一個由許多質點造成的物體，設此物體的質量密度爲 $\rho(\mathbf{r}')$，則由小體積 dV' 所產生的重力場，在位置 $\mathbf{r}$ 的重力位爲：(如圖 7-5)

$$d\phi(\mathbf{r})=-G\frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (7\cdot22)$$

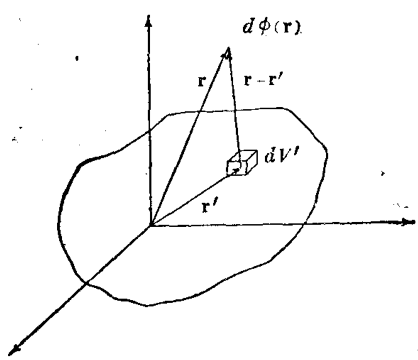

圖 7-5　物體中的小體積 dV'，在空間內的一點產生重力位 $d\phi(\mathbf{r})$

將 (7·22) 式的兩邊對物體的全體積積分，即得在 $\mathbf{r}$ 點的總重力位爲：

$$\phi(\mathbf{r})=\int d\phi(\mathbf{r})=-G\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'. \qquad (7\cdot23)$$

用同樣的方法可以求出，在 $\mathbf{r}$ 點的重力場强度爲:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-G\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV'. \qquad (7\cdot24)$$

(7·24)式爲向量積分，而 (7·23) 式爲純量積分，故 (7·23) 式遠較 (7·24)式容易計算，因此，在一般的計算上，不用 (7·24) 式去算 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$，而先用(7·23)式求出 $\phi(\mathbf{r})$，再用(7·19)去求出 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$。

【例 7-1】 試求一均勻的球形薄殼與一質點間的作用力。

【解】 如圖(7-6)所示，設該球殼的半徑爲 R，每單位面積的質量爲 σ，質點的質量爲 M_1，爲距球心的距離爲 r。

先考慮球殼上的一個環，如圖 (7-6) 所示，此環對球心的張角爲 $d\theta$，所以其寬度爲 $Rd\theta$，環上每一點距 M_1 的距離皆爲 r_1，環的半徑爲 $R\sin\theta$，因此其圓

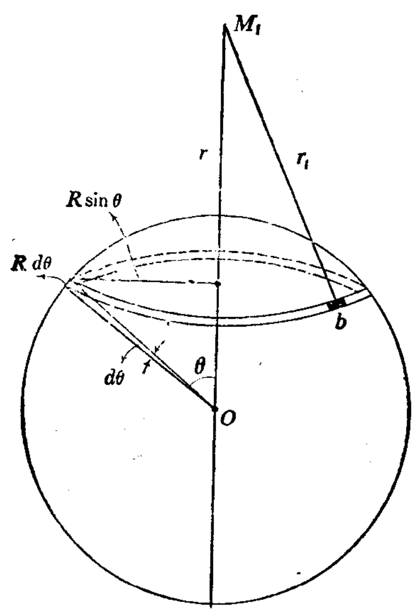

圖 7-6 一質量爲 M_1 的質點與一薄球殼之間的重力作用

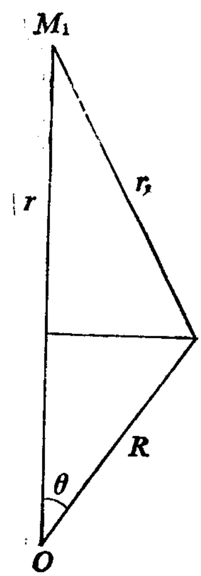

圖 7-7 r_1, r 與 R 之關係

周長爲 $2\pi R\sin\theta$, 而環的面積爲 $(2\pi R\sin\theta)(R\,d\theta)=2\pi R^2\sin\theta\,d\theta$。

所以環的質量爲：

$$M=(2\pi R^2\sin\theta\,\sigma\,d\theta).$$

因爲環上各點距 M_1 都是 r_1, 所以 M_1 對環的重力位能爲

$$dU=-\frac{\sigma GM_1(2\pi R^2\sin\theta\,d\theta)}{r_1};$$

由圖(7-7)可知,

$$r_1^2=r^2+R^2-2Rr\cos\theta.$$

因爲 r, R 都是常數。微分上式, 得:

$$2r_1\,dr_1=-2Rrd(\cos\theta)=2rR\sin\theta\,d\theta,$$

所以
$$dU=-\frac{GM_1\,\sigma 2\pi\,R\,dr_1}{r}.$$

在球殼的重力場中, M_1 的總位能等於球殼上每一環所產生的位能的總和, 故

$$U=\int dU=-\frac{GM_1\sigma\,2\pi R}{r}\int dr_1.$$

$\int dr_1$ 爲在 r_1 的範圍内的積分。

（I） 當 M_1 在球殼外時, r_1 的範圍是由 $r-R$ 到 $r+R$。所以

$$\int_{r-R}^{r+R}dr_1=r_1\Big|_{r-R}^{r+R}=2R,$$

故,
$$U=-\frac{GM_1\,4\pi R^2\sigma}{r}.$$

但是, $4\pi R^2\sigma$ 爲球殼的總質量 M_s, 所以

$$U=-\frac{GM_1M_s}{r}.\quad (r>R) \tag{7·25}$$

（II） 當 M_1 在球殼内時, r_1 的範圍爲由 $R-r$ 到 $R+r$, 所以

$$\int_{R-r}^{R+r}dr_1=2r,$$

故,