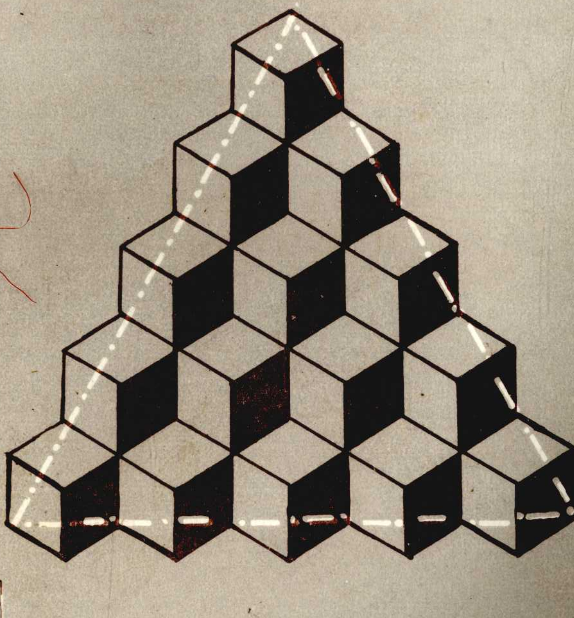
职工自修丛书

高中数学专题讲座

北京市海淀区教师进修学校 主编



地质出版社

职工自修丛书

高中数学专题讲座

（配有40课时教学录像带）

北京市海淀区教师进修学校　主编

地质出版社

职工自修丛书

高中数学专题讲座

（配有40课时教学录像带）

北京市海淀区教师进修学校　主编

*

责任编辑：赵微

地质出版社出版

（北　京　西　四）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：$787\times1092^{1}/_{32}$ 印张：$8^{13}/_{16}$ 字数：190,000

1986年12月北京第一版·1986年12月北京第一次印刷

印数：1—18,170册　定价：1.40元

统一书号：7038·新204

前　言

“七五”期间，我国职工教育战线面临着为经济振兴做好人才准备的艰巨任务．加强在职职工系统的文化和专业技术基础教育十分重要．地质、煤炭、石油、冶金等系统，都有一批野外勘察职工，他们远离城市，常年在深山老林中坚持作业，不具备长期脱产学习的条件．为了帮助这批职工通过自学，或利用冬季收队期间通过电化教育手段进行短期培训，接受优秀教师的辅导，达到高中文化程度；为升入成人高等院校或进一步接受专业技术教育打下基础，我们特请北京市海淀区教师进修学校王家骏、厉善铎、周骆良等同志组织了数十名有多年教学经验的优秀高中教师编写了这套《职工自修丛书》．

这套书共包括《高中语文专题讲座》、《高中数学专题讲座》、《高中物理专题讲座》、《高中化学专题讲座》、《高中历史专题讲座》、《高中地理专题讲座》、《高中政治专题讲座》、《高中英语专题讲座》八册，每册均配有相应的教学录像带．它们既可用于高中各门课程的系统复习，也可用于高中教师的师资培训．

从初一到高三，历经六个寒暑，十二个学期，时间之长，知识之巨，人所尽知．怎样才能提纲挈领地复习全部课程并通过复习提高活用知识的能力呢？这确实不是一个容易解决的问题．本丛书作者力求在对现行中学教材进行全面总结和系统归纳的基础上，融入亲身的实践经验，抽出知识的

规律性，通过“举一反三”、“温故知新”的方法，采用专题讲座的形式，力争在较短的时间内，使学习者能较好地掌握高中各门课程的基础知识和主要规律．各册内容均源于教材，但又绝不是教材内容的简单重复，而是突出重点难点，着重分析易犯错误和强调活用知识的技能．考虑到自学者的需要，书中还附有一定数量的练习题或思考题以及参考解答．

本丛书是《高中各科专题讲座》教学录像带的配套文字材料，又是系统复习高中各门课程的自学读本．全套书由北京市海淀区教师进修学校王家骏、厉善铎、周骆良等同志担任主编．

本册《高中数学专题讲座》，概括了高中数学的基本内容，条理清晰，重点突出，例题典型，对例题的分析启发性强．每讲后配有练习题及答案，可供读者复习之用．本册由北大附中的周沛耕、清华附中的孔令颐、北航附中的王人伟、京工附中的关民乐、四十七中的王建民、北京市海淀区教师进修学校的赵大悌等老师编写．

由于水平有限，疏漏之处，敬请读者批评指正。

柯　善

1986年8月

目　录

第一篇　代　　数

第一讲　函数关系

本讲重点复习以下几方面的内容：

1．函数概念(映射，函数关系，参数，定义域，值域，对应法则，反函数)．

2．函数的性质(单调性，奇偶性，周期性，函数值的有界性，连续性等)，函数性质的应用。

3．函数的图象，相关函数图象间的关系，函数图象的应用。

4．幂函数、指数函数、对数函数的定义、性质、图象。

5．函数与方程、不等式的关系，函数的图象与方程的曲线、不等式的区域间的关系。

6．进一步理解数量关系的图形表现以及图形关系的数量背景间转换的必要性；加深对参数的理解，提高对参数分类讨论的能力；提高使用数学符号、数学语言的能力；提高数值计算、代数式的恒等变形以及逻辑推理能力．

一、幂函数、指数函数、对数函数的图象和性质

本节基本内容有如下几点：

（1）对应法则是$y=x^{\alpha}(\alpha\in Q)$的函数是幂函数．幂指数$\alpha$取定了有理数中的一个具体值，就确定了一个具体幂

函数。具体幂函数间的定义域、值域、图象、性质可能有许多差异。但全体幂函数有下列共性：

① 它们的图象都过(1,1)点；

② 两个具体的幂函数的图象如果有交点，它们的交点必是集合｛(0，0)，(1，1)，(－1，1)，(－1，－1)｝中的元素；两个幂函数图象的交点数目 n 满足 $1 \leqslant n \leqslant 3$。

③ $\alpha > 0$ 时，幂函数的图象都过(0，0)点，且在 R^+ 上是严格增函数；$\alpha < 0$ 时，幂函数的图象都不过(0，0)点，坐标轴是图象的渐近线，在R^+上是严格减函数；$\alpha = 0$ 时，图象是在(0，1)点断开且平行于 x 轴，且过(1,1)点的直线；

④ 幂函数的图象不在第四象限。

（2）对应法则是 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）的函数是指数函数。指数函数的定义域是R，值域是 R^+。当 $a>1$ 时，$y=a^x$是增函数，当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数。

函数 $y=a^x$ 和函数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称。

在 R^+上，a 越大，a^x 越大；在R^-上，a越大，a^x 越小。

指数函数的图象都过(0，1)点。指数函数的图象都在 x 轴上方。任意两个具体的指数函数的图象有且仅有一个公共点(0，1)。

（3） 对应法则是 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）的函数是对数函数。对数函数的定义域是 R^+，值域是 R。对于同一个 $a(a>0$，$a\neq 1)$，函数 $y=a^x$ 与 $y=\mathrm{loy}_a x$ 互为反函数。

$a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 是增函数，$0<a<1$ 时，它

是减函数。

函数 $y=\log_a x$ 和函数 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象关于 x 轴对称。

$x\in[1, +\infty)$，$a>1$ 时，a 越大，$\log_a x$ 越小，$0<a<1$ 时，a 越大，$\log_a x$ 越小。

任两个对数函数的图象有且仅有一个公共点：$(1,0)$ 。

例 1 $\alpha\in Q$，函数 $y=x^\alpha$ 的自然定义域是一切非零实数，写出 α 的集合。

解：对 α 分类讨论

$\alpha>0$ 时，$y=x^\alpha$ 的图象过（0，0）点，可见 $\alpha>0$ 不合要求；

$\alpha=0$ 时，$y=x^0$ 的图象是在（0，1）点处断开且平行于 x 轴的"直线"，可见 $\alpha=0$ 符合题意；

$\alpha<0$ 时，$y=x^\alpha$ 的图象是"双曲线"形。但有单支、两支两类情况：当 $\alpha=-\frac{n}{2m}$ $(m, n\in N)$ 时，$y=x^\alpha$ 的图象是单支双曲线，这样的 α 不合题意；当 $\alpha=-\frac{n}{2m-1}$ $(m, n\in N)$ 时，$y=x^\alpha$ 的图象是两支双曲线，这样的 α 合于题意。（我们规定 m，n 互质）

综上，把 $\alpha=0$ 或 $\alpha=-\frac{n}{2m-1}$ $(m, n\in N)$，合并成一种形式：

$$\alpha=-\frac{n-1}{2m-1}\ (m, n\in N),$$

后，就可以写出答案

$$\alpha\in\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha=-\frac{n-1}{2m-1},\ m、n\in N\right\}.$$

思考题：

① 把例 1 中的“一切非零实数”改为“定义域中不包括 $x=0$”，α 值如何？（$\alpha\leqslant 0$）

② 要求“定义域总包括 $x=0$”，α 如何？（$\alpha>0$）

③ 要求 $y=x^{\alpha}$ 的图象过（-1，-1）点，α 值怎样？

$\left(\alpha=\dfrac{2n-1}{2m-1},\ m, n\in Z\right)$.

④ 在 $x\in R^{-}$ 上，函数 $y=x^{\alpha}$ 是严格减函数，α 值如何？$\left(\alpha=\dfrac{(-1)^{n}\cdot n}{2m-1},\ m, n\in N\right)$.

例 2 对任意的$a>0$，$a\neq1$，方程$a^{x}=x^{\alpha}$总无解，α 是怎样的有理数？

解： 函数$y=a^{x}$ 当 $a>0$，$a\neq1$ 时表示整个指数函数族，它们的图象在第一、二象限，且与y轴交于唯一点（0，1）。我们的任务就是要寻找 α，使函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象与函数族 $y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$）图象中任一条曲线都不相交。

$\alpha>0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象与 $y=a^{x}$ 图象总有交点（自己画出一些具体的图来观察一下）；

$\alpha<0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象与 $y=a^{x}$ 的图象总有交点（想一想，这是为什么）；

$\alpha=0$ 时，$y=x^{0}$ 的图象与 $y=a^{x}$ 的图象无公共点（见图1-1），可见题目条件中的 α 只有唯一值 0 。

思考题：

① 若 $0<a<1$，判断方程 $x^{a^{x}}=a$ 正根的数目.（1 个）.（提示：取对数，化为 $\log_{a}x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{x}$，再考察函数 $y=$

$\log_a x$ 和$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象的交点)

② 判断方程 $2^x=x^2$ 的实根数目。(3个)

③ 方程 $x^\alpha=x^\beta$ ($\alpha\neq\beta$, α、β 是有理数)恰有三个实根，指出 α、β 应当是什么样的有理数?(α、β 同为 $\frac{2m-1}{2n-1}$, m、$n\in N$ 型的有理数或α、β同为$\frac{2m}{2n-1}$, m、$n\in N$ 型的有理数)

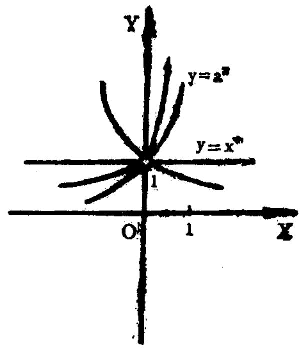


图 1-1

④ 当 $x\in(0,1)$时，不等式 $x^\alpha<x^\beta$ 总成立，判断 α，β 的大小关系。($\alpha>\beta$)

例 3 试证明方程

① $x=\log_{\frac{1}{2}}x$,

② $x=\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}x$,

③ $2^x+\log_x 2=0$

的解集相等。

分析 设方程①、②、③的解集分别是 A_1, A_2, A_3, 我们要证 $A_1=A_2=A_3$。

这三个方程中 x 的允许值条件是 $x>0$, $x\neq1$。

由 $x=\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}x\rightarrow\log_{\frac{1}{2}}x=\left(\frac{1}{2}\right)^x\rightarrow2^x$

$$=\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}=\log_x\frac{1}{2}=-\log_x 2\to 2^x+\log_x 2=0$$。可见②的解也是③的解，即 $A_2\subseteq A_3$。另一方面我们看出，上述推导过程步步可逆，又可证明③的解都是②的解，又有 $A_3\subseteq A_2$。$\therefore\ A_2=A_3$。

由 $x=\log_{\frac{1}{2}}x$，把 $x=\log_{\frac{1}{2}}x$ 代入自己右边代数式中的 x，则有 $x=\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}x$。这表明 $A_1\subseteq A_2$。

注意到 $x=\log_{\frac{1}{2}}x$ 有唯一解，这只要作出函数$y=x$和函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图象(见图1-2)后即可看出，另一方面，方程 $x=\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}x$，即方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_{\frac{1}{2}}x$ 也有唯一解(见图1-3)。可见 A_1，A_2 都是单元素集，因而由$A_1\subseteq A_2$ 可推知$A_1=A_2$

$\therefore\ A_1=A_2=A_3$。(注意推断 $A_1=A_2$ 的思考方法)

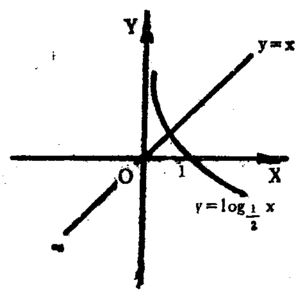


图 1-2

小结

① 注意“可逆推导过程”与“不可逆推导过程”的差别(实际上是充要条件与必要条件的差别)；

② 证明单元素集相等的判断方法：$A_1\subseteq A_2$，A_1、A_2 都是单元素集$\Rightarrow A_1=A_2$。

③ 注意函数图象的交点数与方程解数间的关系；

④ 注意指数形式、对数形式间的恒等变形转化。

二、反函数

本节复习要点为：

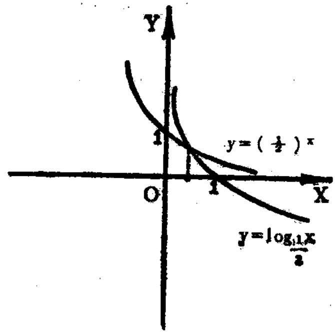


图 1-3

（1） 一一映射，逆映射；如何判断一个函数是一一映射以及证明某函数存在反函数的依据；

（2） 互为反函数的函数关系，它们的对应法则、定义域、值域之间的差别和联系。

（3） $y=f(x), x\in X, y\in Y$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Y, y\in X$，它们的图象间的关系以及这种特殊关系的应用。

（4） 利用已知函数研究它的反函数的某些性质。

例 4 已知函数$y=f(x)=x^{\frac{1}{2}}-{}^{-\frac{1}{2}}$。

（1） 证明这个函数存在反函数；

（2） 证明它的反函数是严格增函数；

（3） 证明它的反函数图象过（0，1）点，且与直线$y=x$不相交。

分析：

（1） 函数$y=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$的定义域是$R^{+}$。它的值域可以先作出函数$y_1=x^{\frac{1}{2}}$，$y_2=x^{-\frac{1}{2}}$后（在同一坐标平面内

作它们的图象，见图 1-4）由分析得出，从图中看出，函数值可取负、正实数和零，即其值域为R。这表明，函数$y=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$是由$R^+$到$R$上的映射。

若证出上述映射是一一映射，就可断定已知函数有反函数。一一映射需具备两个条件：1．原象集内的不同元素在映射下形成不同的象；2．象集内每一个元素都有原象。

作为函数，它已具备一一映射的第 2 个条件，因此只需证明它具备一一映射的第一个条件。

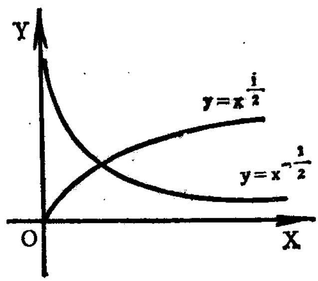


图 1-4

注意到函数$y_1=x^{\frac{1}{2}}$是R^+上的严格增函数，函数$y_2=x^{-\frac{1}{2}}$是R^+上的严格减函数，这时，任取$x_1, x_2\in R^+$且令$x_1>x_2$。由$(x_1^{\frac{1}{2}}-x_2^{\frac{1}{2}})+(x_2^{-\frac{1}{2}}-x_1^{-\frac{1}{2}})>0$知，$\left(x_1^{\frac{1}{2}}-x_1^{-\frac{1}{2}}\right)-\left(x_2^{\frac{1}{2}}-x_2^{-\frac{1}{2}}\right)>0$，这表明已知函数$y=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$是$R^+$上的严格增函数，可见这个函数满足一一映射的第一个条件，因此已知函数存在反函数。

（2） 我们来证已知函数的反函数是严格增函数。这只要任取x_1、$x_2\in R$（这是反函数的定义域），设$f^{-1}(x_1)$、$f^{-1}(x_2)$是与x_1, x_2分别对应的反函数值，则$f^{-1}(x_1)$、$f^{-1}(x_2)\in R^+$。根据反函数$y=f^{-1}(x)$也是一一映射的特点

知，当 $x_1 \neq x_2$ 时，$f^{-1}(x_1) \neq f^{-1}(x_2)$。假如当 $x_1 > x_2$ 时，$f^{-1}(x_1) \leqslant f^{-1}(x_2)$。根据已知函数是严格增函数的特点，我们知道：当 $f^{-1}(x_1) \leqslant f^{-1}(x_2)$ 时，必然有 $f[f^{-1}(x_1)] \leqslant f[f^{-1}(x_2)]$，即 $x_1 \leqslant x_2$。这与题设矛盾.矛盾表明 $f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$。因而反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是 R 上严格增函数.

（3）$y=f(x)$ 的图象与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，要证明反函数图象过（0，1）点，并且与直线 $y=x$ 不相交，即只要证明已知函数的图象过（1，0）点，并且已知函数的图象与直线 $y=x$ 不相交．也就是说，只要证明 $f(1)=0$，并且方程 $f(x)=x$ 无实根．注意到：

$$f(1)=1^{\frac{1}{2}}-1^{-\frac{1}{2}}=0；$$

$$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=x，\text{即是 } x(1-\sqrt{x})=1.$$

由 $x(1-\sqrt{x})=1$ 知，x 的允许值（如果存在的话）范围是 $0<x<1$。但这时又有 $0<1-\sqrt{x}<1$，$\therefore 0<x(1-\sqrt{x})<1$。可见方程 $x(1-\sqrt{x})=1$ 无实根，因此 $f(x)=x$ 无实根.

思考题：

① 求出本题中已知函数的反函数.（反函数是 $y=\frac{1}{2}\cdot(x+\sqrt{x^2+4})$，$x \in R$）

② 用函数图象的观点证明方程 $x(1-\sqrt{x})=1$ 无实根.$\left(\text{考虑函数 } y_1=x^{\frac{1}{2}}，y_2=1-\frac{1}{x} \text{ 的图象}\right)$

小结

① 一个函数若有反函数，这两个函数间有密切的内在

联系。反函数的某些性质可由原来的函数的性质得到。

② 注意图形关系与数量关系间的联系与转化，总结它们之间的相互作用。

③ 做完本题后，你对函数及反函数的性质又有什么新的认识？（例如单调函数必有反函数；函数与它的反函数具有相似的单调状况；一个增函数减去一个减函数后形成的函数是增函数等）。

例 5 求函数 $y=2-\frac{1}{3}\sqrt{5+4x-x^2}$，$x\in[-1,2]$ 的反函数。

分析 一般来说，求给定函数的反函数要经过"反解"（即把 $y=f(x)$ 中的 y 看成已知数，x 看成未知数，由 $y=f(x)$ 解出用 y 表示 x 的式子）、"交换"（即把上面求出的用 y 表示 x 的式子中的 x、y 互换）这样两个步骤，再求出反函数的定义域（一般来说要通过求已知函数的值域得到）按上述过程求本题中的反函数的解答过程如下：

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$0\leqslant(1+x)(5-x)\leqslant 9$，

则 $1\leqslant 2-\frac{1}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)}\leqslant 2$，

这表明已知函数的值域为 $[1,2]$。这个区间是反函数的定义域。

由已知函数式，可以解出：

$$[3(2-y)]^2=5+4x-x^2=-(x-2)^2+9,$$

$\therefore$ $|x-2|=3\sqrt{1-(2-y)^2}=3\sqrt{-y^2+4y-3}$.

注意到 $x\in[-1,2]$ 时，$|x-2|=2-x$，上式成为

$$2-x=3\sqrt{-y^2+4y-3},$$