袁绥华 编著

潜体与半潜体
波浪动力学概论

QIANTI YU BANQIANTI BOLANG DONGLIXUE GAILUN

西南师範大學出版社
国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

潜体与半潜体
波浪动力学概论

袁绥华　编著

西南大学

重庆前卫科技集团有限公司

西南师範大學出版社
国家一级出版社　全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

潜体与半潜体波浪动力学概论 / 袁绥华编著. --重庆：西南师范大学出版社, 2014.2
ISBN 978-7-5621-6691-7

Ⅰ. ①潜… Ⅱ. ①袁… Ⅲ. ①波浪－水动力学－概论
Ⅳ. ①TV139.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第034734号

潜体与半潜体波浪动力学概论

袁绥华　编著

责任编辑：尹清强
装帧设计：刘何跃
排　　版：重庆大雅数码印刷有限公司
出版发行：西南师范大学出版社
　　　　　地址：重庆市北碚区
　　　　　网址：http://www.xscbs.com
印 刷 者：重庆荟文印务有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：11.5
字　　数：175千字
版　　次：2014年2月　第1版
印　　次：2014年2月　第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5621-6691-7

定　　价：45.00元

前言

本书因应某项目理论计算需要，融合流体力学、波浪动力学、物体与波浪相互作用和海浪波谱学等知识，系统而深入浅出、明白易懂地讲解基础理论和应用方法，还补习了必需的数学知识，便于工厂和研究所工程师阅读学习，也可以作为大学水工、海工和水中兵器等专业本科和研究生的参考教材。本讲义是作者在重庆前卫科技集团有限公司大力协作下历时两年完成的。协作人员有徐猛、何兴友、杨松涛、刘科伟、程昌黎、李福明等。西安交通大学李开泰教授、清华大学吴玉林教授审阅了书稿，宜昌测试研究所研究生李孟捷先生阅读了书稿。作者在此一并致谢。

目录

1. 一些必需的数学工具 …… 001
2. 坐标系及相应的微商运算和流体力学基本定律 …… 004
3. 正弦波浪理论 …… 010
4. 面元法的理论和方法 …… 017
5. 水动力和附加质量 …… 043
6. 线性平面波 …… 049
7. 波浪中运动物体受力 …… 056
8. 不计自由面效应时定深恒速潜体受到的波浪力 …… 061
9. 计及自由面效应时浮体在规则波中受力和运动的频域分析 …… 070
10. 二维问题,切片法 …… 077
11. 浮体在规则波作用下的线性运动微分方程 …… 081
12. 三维无航速频域格林函数及其应用 …… 092
13. 留数理论和围道积分 …… 097
14. 三维无穷水深频域格林函数的围道积分表达式和二维无穷水深格林函数 …… 113
15. 势的频域解中的奇异频率问题 …… 117
16. 阻尼系数的远场表达式 …… 126
17. 一阶势作用下的各阶力 …… 127
18. 浮体(半潜体)和潜体在随机海浪中的受力与运动 …… 134
19. 应用二维切片面元Hesse-Smith方法的一个算例 …… 172
参考文献 …… 178

1 一些必需的数学工具

本书主要针对工厂和工程研究所的工程师们实际工作需要,提高相关的理论修养,掌握分析和计算潜体、半潜体与波浪相互作用的方法,为设计奠定基础而专门编写的。由于不常使用,工程技术人员的数学基础变得比较薄弱,本书专门对此予以补习。

1.1 矢量场和标量场

一个具有方向的物理量,例如力 $\vec{F}(\vec{r},t)$,连续或者不连续地在时空 $(\vec{r},t)$ 中取值和方向,这个方向量的集合 $\left\{\vec{F}(\vec{r},t)\right\}$ 称为一个矢量场。如果这个物理量没有方向(各向同性),例如温度 $T(\vec{r},t)$,集合 $\left\{T(\vec{r},t)\right\}$ 称为一个标量场。

在弹性介质或电介质中,介质对于外来激发(力或电场)的响应往往不是单向性的,例如 x 方向的形变或极化不是单单由 x 方向的激发引起,而是与 y 和 z 方向的激发也有关

$$\vec{R}(\vec{r},t)=\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\vec{\alpha} \tag{1}$$

其中 $\vec{R}$ 表示“响应”(response), $\vec{\alpha}$ 表示扰动(disturbance),在三维空间中

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j,\ i,j=1,2,3,\ \hat{x}_i\text{是}\ i\ \text{方向单位矢量}\\ \text{也可以用矩阵表示},\varepsilon=[\varepsilon_{ij}],\ i,j=1,2,3\end{array}\right\} \tag{2}$$

$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\vec{r},t)$ 代表介质传递扰动的特性, $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 显然也是一个场,称为二阶张量场。矢量显然是一阶张量,而标量是零阶张量。我们研究的对象,不计潜体、半潜体(后面统称为潜体)形变时,只涉及矢量场和标量场。

不随时间变化的场称为稳态(定常)场,否则为不定常场。波浪的浪高等显然是不定常场。

1.2 场的梯度、散度、旋度

标量场 $\phi(\vec{r},t)$ 在 x,y,z 三个方向上变化率之和称为梯度

$$\nabla\phi(\vec{r},t)=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \tag{3}$$

矢量 $\vec{A}$ 在面元 $\hat{n}\mathrm{d}s$ 上的投影积 $\mathrm{d}\psi=\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}s$ 称为 $\vec{A}$ 的微通量，$\hat{n}$ 是面元 $\mathrm{d}s$ 的法向单位矢量。$\vec{A}$ 在围绕空间点 $(\vec{r},t)$ 的闭曲面 S 上的通量除以此曲面所围体积 Δ，在 $\Delta\to 0$ 时的极限称为场 $\vec{A}$ 在 $(\vec{r},t)$ 的**散度**，表示了场的发散度。

$$\vec{A}\text{的散度}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\oiint\limits_S\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}s}{\Delta}$$

计算

$$\iiint\limits_{\Delta}\nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Delta}\frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cdots=\iint\limits_{\sigma_{xy}}A_z(z_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\sigma_{xy}}A_z(z_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\cdots$$

式右前两项之和是场 $\vec{A}$ 在 z 方向在曲面 S 上的通量，类似地得到在 y 和 x 方向上的通量。因此

$$\begin{aligned}\vec{A}\text{的散度}&=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\vec{A}\text{在}S\text{上的总通量}}{\Delta}\\&=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\iiint\limits_{\Delta}\nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}v}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\Delta}{\Delta}=\nabla\cdot\vec{A}\end{aligned} \tag{4-1}$$

今后在谈到某矢量 $\vec{A}$ 的散度时，直接写成

$$\nabla\cdot\vec{A}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{4-2}$$

从散度的定义和计算方法，顺便也得到了**高斯定理**

$$\int\limits_{\Delta}\nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}v=\oint\limits_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\oint\limits_S\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}s \tag{5}$$

为了简便，没有使用多重积分号而代之以下标 Δ（体积）和 S（曲面）。$\hat{n}$ 是 S 的外法线方向单位矢量。

散度为零的场 $\vec{A}$，$\nabla\cdot\vec{A}=0$，称为**无源场**。

$\vec{A}$ 在沿平面内封闭曲线 l 投影积分与此曲线所包围的面积 σ 之比，在 $\sigma\to 0$ 时的极限称为 $\vec{A}$ 的**旋度**，其方向是与绕 l 的走向形成右手螺旋。$\vec{A}=A_x(\vec{r},t)\hat{i}+A_y(\vec{r},t)\hat{j}+A_z(\vec{r},t)\hat{k}$，$\mathrm{d}\vec{l}=\hat{i}\mathrm{d}x+\hat{j}\mathrm{d}y+\hat{k}\mathrm{d}z$。显然 $\vec{A}$ 的旋度

的 z 方向分量只能由矢量积 $A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$ 沿 l 在 xy 平面上投影曲线的积分形成,如图 1–1。

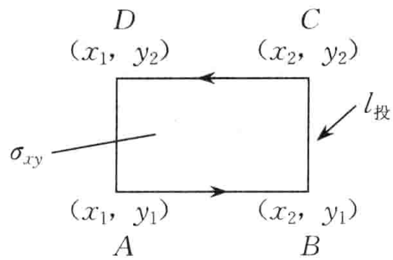

图 1–1

$$\oint_{l_{投}} A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y=\int_A^B A_x\mathrm{d}x+\int_C^D A_x\mathrm{d}x+\int_B^C A_y\mathrm{d}y+\int_D^A A_y\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\substack{x_1\\y=y_1}}^{x_2} A_x\mathrm{d}x-\int_{\substack{x_1\\y=y_2}}^{x_2} A_x\mathrm{d}x+\int_{\substack{y_1\\x=x_2}}^{y_2} A_y\mathrm{d}y-\int_{\substack{y_1\\x=x_1}}^{y_2} A_y\mathrm{d}y$$

但这个结果与 σ_{xy} 上面积分 $\int\limits_{\sigma_{xy}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的结果是一样的。对 $\vec{A}$ 的旋度的其余两个分量也有类似的结果。所以 $\vec{A}$ 的旋度的 z 分量可以写成

$$\nabla\times\vec{A}\Big|_z=\lim_{\sigma_{xy}\to 0}\frac{\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sigma_{xy}}=\lim_{\sigma_{xy}\to 0}\frac{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

加上其他两个分量,$\vec{A}$ 的旋度为

$$\nabla\times\vec{A}=\sum_{i,j,k=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial y_j}\right)\hat{x}_k \tag{6}$$

显然,在以上过程中,当 $\sigma_{xy}\to 0$ 时,$l_{投}$ 是否为矩形无关紧要。旋度代表场的本地旋转程度。顺便得到**斯托克斯定理**

$$\iint\limits_{\sigma}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s=\oint_l\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \tag{7}$$

其中 l 是投影面 σ 的边界线。

旋度为零的场 $\vec{A}$,$\nabla\times\vec{A}=0$,称为**无旋场**或**无涡场**。注意,绕大圈子环流的场 $\vec{u}$ 也可能是无旋场,只要在每一点 $\nabla\times\vec{u}=0$,$\vec{u}$ 就无旋。矢量场还有一些重要定理,用到时将陆续介绍。必要时还将补习**复变函数**、**特殊函数**和**线性代数**,以及**微分算子随坐标系变换**等有关知识。

2 坐标系及相应的微商运算和流体力学基本定律

流体在地球上运动，潜体在流体中运动，所以经常用到三套彼此关联的坐标系，即固结在地球上的实验室坐标系(**欧拉系**)，仍然固结在地球上，但研究者跟随流体中某一微元行动并观察的坐标系(**拉格朗日系**)，和原点固结在潜体上的随动坐标系，研究者跟随坐标系运动并观察。这里先介绍前面两种坐标系。

2.1 欧拉方法

流体相对于坐标流动，在同一个空间点，流速不恒为零时，不同时刻流过不同的**流体微元**(一个微元体积小到近似于一个数学点，但又大到能包含大量流体分子)。场量，例如密度 ρ 、温度 T 、流速 $\vec{u}$ 、压强 p 等，都依附于微元，或者说是微元的性质，所以在场中一点观测场量的时间变化率时，应包含点上微元本身性质的变化率 $\frac{\partial}{\partial t}$ 和净流入本点的场量的变化率 $\vec{u}\cdot\nabla$ ，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla \tag{8}$$

称为**欧拉全导数**。

例如 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\rho$ ，即某空间点的流体密度可以因为抽取或注入而变化，也可以因在该点流入的密度变化率而变化。另一方面，密度总的变化率也可以看成本地变化率 $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 与本地密度流的发散度 $\nabla\cdot(\rho\vec{u})$ 之和。在我们的问题中，水就是这样的流体。

应用欧拉全导数 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$,可以在欧拉坐标系中写出物质守恒定律,得到流体力学的一个基本方程——**连续性方程**。

设流体充斥在体 V 中,总质量为 m ,质量守恒要求

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho \mathrm{d}v=\iiint_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{u}\right)\right]\mathrm{d}v=0$$

其中 $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 是本地净生成率, $\nabla\cdot\left(\rho\vec{u}\right)$ 是本地净流出率。由于 V 是任意选取的,所以

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{u}\right)=0 \tag{9}$$

或用欧拉导数表示为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\vec{u}=0 \tag{10}$$

式(9)和式(10)都称为**连续性方程**。当流体不可以压缩时 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$,

$$\rho\nabla\cdot\vec{u}=0,\nabla\cdot\vec{u}=0,\rho\neq0 \tag{11}$$

是为**不可压缩流体**(如水)的**连续性方程**。流速的散度为零,流动称为是**无源**的。

如果流速的旋度为零, $\nabla\times\vec{u}=0$,流动称为是**无旋**的或**无涡**的。由于对于任何标量场 φ 都有 $\nabla\times\nabla\varphi=0$,所以假定 $\vec{u}=\nabla\varphi$,必然能满足流动无旋的条件。称 φ 是流动的**速度势**。如果流速的散度也为零

$$\nabla\cdot\vec{u}=0\Rightarrow\nabla^2\varphi=0 \tag{12}$$

则势 φ 满足**拉氏方程(拉普拉斯方程)**。

海浪是由不同频率、不同相位、不同振幅乃至不同传播方向的波浪叠加而成的,总的速度势由各个速度势叠加而成;潜体与海浪相互作用而生成的附加流动的速度势,与海浪速度势叠加而成相互作用速度势,由此可以计算潜体受力和力矩、附加质量、阻尼系数等重要的物理量。从最简单的正弦波开始,建立 φ 的求解方法,以及对海浪的统计处理方法,是本书的主要内容。

由动量守恒定律可以得到流体力学的第二个基本方程,即**动量方程**。

对于一块体积为 V 的流体，动量守恒要求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\vec{u}\mathrm{d}v=\sum\vec{F}(\text{力})=\iiint\limits_V \rho\vec{f}\mathrm{d}v+\iint\limits_S \vec{p}\mathrm{d}s \tag{13}$$

其中式右第一项为作用在流体上的体积力(如重力)，第二项为作用在流体边界面上的面积力(如潜体表面对流体的压力)。其中有的面积力反过来提供对潜体的浮力，浮力是通过静压强对潜体面作用而传递到整个潜体的。面积力中如潜体与波浪相互作用的动压强对潜体面作用使潜体运动，并带来潜体结构的附加载荷。展开

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V(\rho\vec{u})\mathrm{d}v&=\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}(\rho\vec{u})}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v+\iint\limits_S(\rho\vec{u})\vec{u}\cdot\hat{n}\mathrm{d}s\\&=\iiint\limits_V\left[\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}+\vec{u}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\vec{u}\right)\right]\mathrm{d}v\\&=\iiint\limits_V\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

式中 $\iint\limits_S(\rho\vec{u})\vec{u}\cdot\hat{n}\mathrm{d}s$ 是单位时间通过 S 面流入体积 V 中的动量，而由于连续性方程 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\vec{u}=0$ 。式(13)成为

$$\iiint\limits_V\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v=\iiint\limits_V\rho\vec{f}\mathrm{d}v+\iint\limits_S\vec{p}\mathrm{d}s \tag{14}$$

即**动量方程**。动量方程的微分形式为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\rho\vec{f}+\nabla\cdot\overleftrightarrow{\sigma} \tag{15}$$

其中 $\overleftrightarrow{\sigma}=\sum\limits_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j$ ，是流体内的应力张量，不考虑黏滞力和表面张力时，它与压强的关系是 $\vec{p}=\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n}$ ，$\hat{n}$ 是力作用点界面外法线的方向。

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\sigma}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{1j}}{\partial x_1}\hat{x}_j+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{2j}}{\partial x_2}\hat{x}_j+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{3j}}{\partial x_3}\hat{x}_j$$

2.2 拉格朗日方法

在三维空间中在时间开始时刻($t=t_0$)选取一个矢量 $\vec{\xi}$ 来表示流体微元，这个流体微元的状态是在 t_0 时刻，具有空间位置

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}\left(\vec{\xi}, t_0\right)=\vec{\xi} \\ \text{随着时光流逝，微元流动到了新的位置} \\ \vec{x}=\vec{x}\left(\vec{\xi}, t\right) \\ \text{式右括号中的}\vec{\xi}\text{只是指明所观察的那个微元。所以它的速度是} \\ \vec{u}=\left(\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_{\xi} \\ \text{加速度是} \\ \vec{a}=\left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{\xi}\end{array}\right\} \tag{16}$$

脚标指明针对所观测的微元。

连续性方程为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho \mathrm{d}v=0 \tag{17}$$

动量方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\vec{u}\mathrm{d}v=\iiint_V \rho\vec{f}\mathrm{d}v+\iint_S \vec{p}\mathrm{d}s \tag{18}$$

实际工作中通常是用拉格朗日的观点(即盯住一个流动的微元),用欧拉的方法(即在空间流场的分布中来表示这个微元的运动,例如用在空间流场中偏导数之和来表示全时间导数)来解决实际问题。

2.3 欧拉方程和伯努利方程

对于不可压缩、黏度为零的理想流体(海水非常近似),在流体内部(无表面张力)界面力只剩下压力。我们知道压强的大小各向同性,方向总是与被作用面的外法线方向相反,所以有 $\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}=\begin{cases}-p, i=j \\ 0, i\neq j\end{cases}$,而 $p_j=-p\delta_{ij}n_i$,即 $p_1=-p=p_2=p_3$。动量方程[式(15)]成为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\rho\vec{f}-\nabla p \tag{19}$$

这就是**欧拉方程**。我们知道,全导数 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$ 必须展开成本地时间偏导数和对本地的输运导数才能具体计算,欧拉方程变为

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{20}$$

由矢量运算法则(可以假设两个二维矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$，并注意梯度算子的性质，即 $\nabla\cdot\vec{A}\neq\vec{A}\cdot\nabla$，$\nabla\times\vec{A}\neq\vec{A}\times\nabla$ 来验证)知道

$$\left.\begin{aligned}&(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{u}\right)-\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})=\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{u}\right)-\vec{u}\times\vec{\Omega}\\&\text{其中}\vec{\Omega}=(\nabla\times\vec{u}),\text{是旋度}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

欧拉方程成为

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{u}\right)-\vec{u}\times\vec{\Omega}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{22}$$

我们看到，用欧拉方程可以研究有涡流动。我们研究的范围中，$\vec{\Omega}=0$，而且 $\vec{f}$ 就是有势的重力，$\vec{f}=\nabla G$，流动是有势的，$\vec{u}=\nabla\varphi$。再者，计算 $\mathrm{d}\vec{r}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)$，由于 $\mathrm{d}\vec{r}\cdot\nabla$ 是沿微元弧 $\mathrm{d}\vec{r}$ 的全微分，所以 $\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\nabla p=\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p$，还可以写成

$$\mathrm{d}\vec{r}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\mathrm{d}\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\mathrm{d}\vec{r}\cdot\nabla\left(\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}\right) \tag{23}$$

欧拉方程成为

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi-G\right)=0$$

两边点积 $\mathrm{d}\vec{r}$，得到标量方程

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi-G\right)=0$$

积分得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi-G=F(t)$$

$F(t)$ 对于全流场是相同的，把它吸收到 φ 之中，令 $\phi=\varphi-\int F(t)\mathrm{d}t$，$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-F(t)$，$\nabla\phi=\nabla\varphi$，不影响 φ 的结构。流体是不可压缩的，ρ 为常量，算出上式中的积分得到

$$
\left.\begin{aligned}
&p=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2+\rho G+F\\
&\text{或}\,p=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2-\rho gz+H\\
&\text{对于}\,G=-gz
\end{aligned}\right\}
\tag{24}
$$

F [不是 $F(t)$]和 H 都是常数，只不过 H 在体积力只有重力时习惯性地代替 F，称为总水头(hydro)。我们看到流体中由于运动而产生的压强即**动压强** $p_d=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2$，对于我们的研究是非常重要的。式(24)称为**伯努利方程**。

3 正弦波浪理论

海浪的**波长** λ 都远大于几厘米，不考虑水面表面张力的作用，使被变动的水面恢复原位的力只有**重力**，而重力总是作用于垂直于水平面的方向，所以波浪中水微元在垂直面内运动。设 x 轴指向波浪传播的方向，z 轴竖直向上，水微元就在 $o-xz$ 平面内做二维运动。沿 y 轴延伸出去有很多同样运动的水微元，组成一列波。海浪实际上是以对相邻海水挤压的方式传播运动，也就传递了能量。**海浪是表面重力波**。海浪非常复杂，但它的基本构成单元是具有某些频率 ω、初相位 ε 和振幅 A 的正弦波，却十分简单。建立正弦波理论，分析和得到正弦波与潜体相互作用的力和力矩，再利用已有的海浪资料，用统计方法得到这些力和力矩的统计平均值，是本章的目的。

3.1 波面方程

设二维坐标 $o-xz$ 置于静水面上，有波浪时，点 (x,z) 水面升高 $\eta(x,t)$，表示为

$$\left.\begin{array}{l} z=\eta(x,t) \\ \text{是为波面方程。也可以写成} F(x,z,t)=z-\eta(x,t)=0 \end{array}\right\} \quad (25)$$

3.2 波浪运动方程

从对波浪的描述中知道，由于只存在有势的力即重力的作用，波浪运动是无旋的，$\nabla\times\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\times\vec{u}=\nabla\times\nabla G=0$，$\nabla\times\vec{u}=0$。设其势为 φ，有[式(12)]

$$\nabla^2\varphi=0$$

要解这个方程，需要边界条件和初始条件。在假设正弦波的情况下，φ 是时谐的，即可以写成 $\varphi=\varphi_{\mathrm{r}}(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，其中 $\varphi_{\mathrm{r}}(\vec{r})$ 也包含了初相位部分。只

要指定 $t=t_0$ 时 η 是最大或最小,并不需要别的初始条件。由于存在**水面**(**自由面**)、**水底**等边界,边界条件是必需的。

3.3 运动学和动力学边界条件

先推导空间曲面法向单位矢量的求法。曲面可以表示为 $F(x,y,z)=0$,当在某点 (x,y,z) 作曲面的法矢量时,如图3-1所示,F 面便到了 F' 面,而梯度

$$\nabla F=\frac{\partial F}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}$$

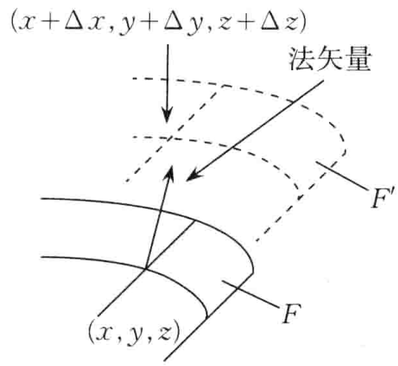

图3-1

单位法矢量即为

$$\hat{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

$\hat{n}=(n_x,n_y,n_z)$。可以证明 $\hat{n}$ 还可以表达成 $\hat{n}=\left(\frac{\partial x}{\partial n},\frac{\partial y}{\partial n},\frac{\partial z}{\partial n}\right)$,$\frac{\partial}{\partial n}$ 表示求法向导数。

运动学边界条件是说,根据物质的(宏观)不可入性,流体在固定边界面的法向分速度为零

$$u_{\mathrm{n}}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \tag{26}$$

水和大气的分界面不是固定的,水微元固然可以上、下运动,但不能穿过波面脱离波跳到大气中去,而水微元 z 方向的速度就是该点波面的速度。从波面对时间的全导数为零 $\left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z-\eta)=0\right]$(即波面可以运动,但结构不变),有

$$\frac{\partial}{\partial t}(z-\eta)+\vec{u}\cdot\nabla(z-\eta)=0$$

但 x,y,z,t 为相互独立的坐标，$\frac{\partial z}{\partial t}=0,\vec{u}\cdot\nabla(z-\eta)=u_3-u_1\frac{\partial\eta}{\partial x}$，上式成为

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial\eta}{\partial t}+u_3-u_1\frac{\partial\eta}{\partial x}=0\\ \text{或}\ &\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial z},z=\eta\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

是为**运动学边界条件**，其中 u_1，u_3 是水微元在 x 和 z 方向的流速。这里有两大困难，其一，变动的边界 $z=\eta(x,t)$ 本身就是待求量，其二，这个条件是非线性的。设波浪的振幅 A 与波长 λ 和水深 h 等相比都是小量 $(A/\lambda\ll 1,A/h\ll 1)$，$\eta,\varphi$ 等与 λ，h 比也就都是小量，也就是与一般海浪近似的**微振幅**，可以在式(27)中于 $z=\eta=0$ 处取值，并且略去二次项，得到**微幅波的运动学边界条件**为

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,z=\eta=0\tag{28}$$

自由水面的压强必然和大气压强相等，这就是**动力学边界条件**。对于微幅波，在伯努利方程式(24)中令 $p=p_a=0$（只考虑压强的相对变化），并略去二次项 $\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$，得到微幅波的动力学边界条件为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\eta=0\tag{29}$$

综合式(28)、(29)，即对式(29)求偏导，并注意到 φ 是时谐的，代入式(28)，得到做简谐运动的**自由水面边界条件**为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\omega^2}{g}\varphi=0\tag{30}$$

式(30)是实际应用的自由水面条件。

还有一个**有限水深底部边界条件**

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\tag{31}$$

其意义不言自明。

3.4 无限水体中的正弦水波

以下求解**无限水深**、**无限广大水体**（海洋）中拉氏方程[（式12）]的解，以得到正弦水波的表达式。由于已经指明了求正弦波的流速势，我们向 φ