云南省初中学业水平考试
总复习及测试数学

云南大学出版社

目 录

第一部分 初中数学必考内容总复习

（下列的五个讲，均包含了初中数学必学必考的21节内容，其中每一节都分为内容结构归纳、课程标准要求、知识要点解读、典型例题解析、巩固达标训练五个方面循序推进复习。）

第1讲 数与式

第2讲 方程（组）与不等式（组）

第3讲 函数

第4讲 几何图形初步

第5讲 统计与概率

第二部分 考试重点题型专题讲练

（针对近几年云南省各州、市初中数学学业水平考试试题中通常出现且占分比重较大的重点题型，专题解析其题型结构，解题方法，有的放矢深入复习。）

第三部分 学业水平考试综合训练

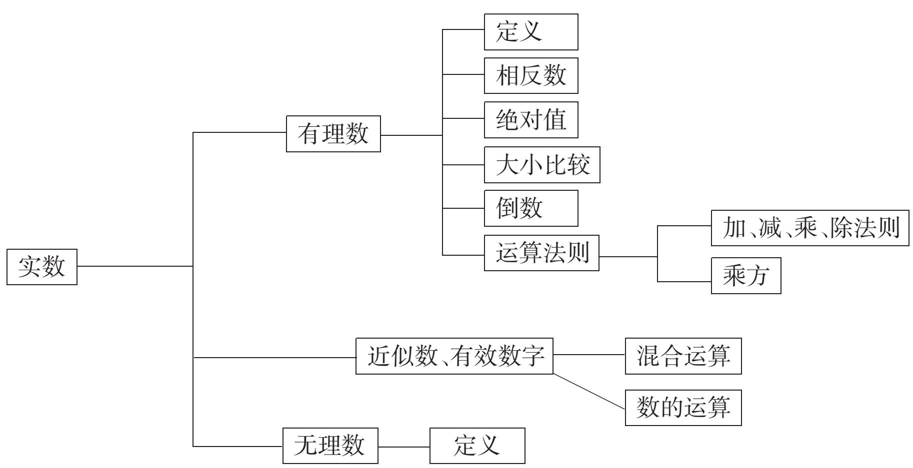
（下列的六套模拟题，均由云南省内知名数学老师和原云南省中考数学命题专家编写，这些试题模拟真题和贴近真考。请各位考生认真复习，完成此项的临考训练。）

第一部分　初中数学必考内容总复习

第1讲　数与式

第1节　实　数

一、内容结构归纳



二、课程标准要求

1. 了解有理数的意义，理解相反数、绝对值、数轴、倒数等概念.
2. 了解绝对值的几何意义，会求有理数的倒数，根据有理数在数轴上对应的位置，能比较有理数的大小.
3. 会用科学计数法、四舍五入法表示有理数及近似值.
4. 理解有理数的加、减、乘、除和乘方的意义，熟练掌握有理数的运算法则、运算顺序及运算规律.

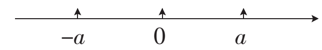
三、知识要点解读

（一）实数中的几个概念

1. 实数：有理数和无理数统称为实数.
2. 有理数：整数与分数统称为有理数.
3. 无理数：无限不循环小数称为无理数.
4. 相反数：如果两个数只有符号不同，那么我们称其中一个数是另一个数的相反数，也称这两个数互为相反

数，0的相反数是0.

从数轴上看，表示互为相反数的两个点，分别在原点的两侧，而且到原点的距离相等.



(1)实数a的相反数是$-a$；

(2)若a、b互为相反数，则$a+b=0$.

5. 绝对值：正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；0的绝对值是0.

即$|a|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$

从数轴上看，一个数的绝对值表示这个数所对应的点到原点的距离. 实数a的绝对值是一个非负数，即$|a|\geqslant 0$.

6. 倒数：乘积是1的两个数互为倒数.

(1)实数$a(a\neq 0)$的倒数是$\frac{1}{a}$；(2)倒数等于它本身的数是± 1；(3)0没有倒数.

(二)实数与数轴

1. 数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴. 原点、正方向、单位长度称为数轴的三要素.

2. 实数与数轴上的点的对应关系：每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数，因此，实数与数轴上的点一一对应.

(三)实数大小的比较

1. 数轴上两个点表示的数，右边的数总比左边的数大.
2. 正数都大于0，负数都小于0，正数大于一切负数.
3. 两个正数，绝对值大的数就大.
4. 两个负数，绝对值大的反而小.

(四)实数的运算

1. 加法：

(1)同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加；

(2)异号两数相加，绝对值相等时和为0. 绝对值不等时，取绝对值较大的数的符号，并用较大数的绝对值减去较小数的绝对值；

(3)互为相反数的两个数相加得0；

(4)一个实数与0相加仍得这个实数；

(5)加法运算律：$a+b=b+a$，$(a+b)+c=a+(b+c)$.

2. 减法：减去一个数，等于加上这个数的相反数.

3. 乘法：

(1)两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；

(2)任何数与0相乘仍得0；

(3)几个不等于0的实数相乘，积的符号由负因数的个数决定，当负因数有奇数个时，积为负；当负因数有偶数个时，积为正；

(4)乘法运算律：$ab=ba$，$(ab)c=a(bc)$，$a(b+c)=ab+ac$.

4. 除法：

(1)两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除；

(2)除以一个数等于乘这个数的倒数(注意：0不能作除数)；

(3)0除以任何一个不等于0的数都得0.

5. 乘方：

(1)$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n个a}$，其运算的结果仍为实数；

(2)幂的符号法则：正数的任何次幂都是正数；负数的奇数次幂是负数，负数的偶数次幂是正数.

6. 实数的运算顺序：

(1)先算乘方，开方(三级运算)，再算乘除(二级运算)，最后算加减(一级运算)；

(2)同级运算按从左到右的顺序运算；

(3)如果有括号，先算小括号里的，再算中括号里的，最后算大括号里的.

（五）科学记数法与近似数

1. 科学记数法：就是把一个数写成 $a\times10^n$ 的形式(其中，$1\leqslant a<10$，n 是整数)，这种记数法叫做科学记数法.
   记数方法：
   (1)确定 a：a 是只有一位整数数位的数.
   (2)确定 n：①当原数是大于或等于 1 的数时，n 等于原数的整数位数减 1；②当原数是小于 1 的数时，n 是负整数，它的绝对值等于原数中左起第一个非 0 数字前 0 的个数(包括小数点前面的一个 0).
2. 近似数：通常一个近似数四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位.
3. 按精确度或有效数字取近似值一定要与科学记数法有机结合起来.

四、典型例题解析

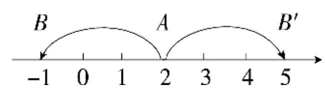
【例 1】若 a 与 -5 互为相反数，那么 a 是　　(　　)

A. -5　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{1}{5}$　　D. 5

【解析】根据相反数的概念和意义，互为相反数的两个数和为 0，可得 $a=5$，故选 D.

【答案】D

【例 2】点 A 在数轴上表示 $+2$，从点 A 沿数轴平移 3 个单位到点 B，则点 B 所表示的实数是　　(　　)



第 2 题图

A. 3 或 1　　B. -1 或 4　　C. 5 或 7　　D. -1 或 5

【解析】本题主要考查对数轴知识的理解程度，画出数轴，先找出点 A 的坐标，题设中未说明平移方向，因此考虑向左和向右两个方向的平移就可找到点 B 的坐标. 如图所示，左移三个单位到点 B，右移三个单位到点 B'，此题选 D.

【答案】D

【例 3】中国的领水面积约为 370 000 km^2，将数 370 000 用科学记数法表示为________.

【解析】科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值大于 1 时，n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时，n 是负数.

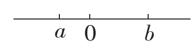
【答案】3.7×10^5

【例 4】已知 x、y 是实数，且满足 $(x+4)^2+|y-1|=0$，则 $x+y$ 的值是________.

【解析】由已知等式 $(x+4)^2\geqslant0$，$|y-1|\geqslant0$，得 $x+4=0$，$y-1=0$. $\therefore x=-4$，$y=1$，$\therefore x+y=-4+1=-3$.

【答案】-3

【例 5】实数 a、b 在数轴上的位置如图所示，化简 $|a-b|-\sqrt{a^2}$ 的结果是　　(　　)



例 5 图

A. $2a+b$　　B. b　　C. $2a-b$　　D. $-b$

【解析】根据实数 a、b 在数轴上的位置，既能比较它们的大小，又能确定 $a-b$ 和 a 的符号，从而通过运用公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 去掉根号及绝对值的符号，达到化简目的.

观察数轴，可知 $a<0$，$b>0$，且 $|b|>|a|$，$\therefore a-b<0$，$\therefore$ 原式 $=-(a-b)+a=b$.

【答案】B

【例 6】若 a、b 互为相反数，c、d 互为倒数，m 的绝对值是 2，则 $a^2-b^2+(cd)^{-1}\div(1-2m+m^2)=$________.

【解析】由题意，得 $a+b=0$，$cd=1$，$m=\pm2$，$\therefore m^2=4$，$\therefore$　$a^2-b^2+(cd)^{-1}\div(1-2m+m^2)=(a+b)(a-b)+1\div(1-2m+4)=\frac{1}{5-2m}$. 当 $m=+2$ 时，原式 $=1$；当 $m=-2$ 时，原式 $=\frac{1}{9}$.

【答案】1 或 $\frac{1}{9}$

【例 7】计算：(1) $(\sqrt{3}-2)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+4\cos30°-\left|\sqrt{3}-\sqrt{27}\right|$；(2) $\sqrt{9}+2015^0+(-2)^3+2\sqrt{3}\times\sin60°$.

【解析】(1)原式 $=1+3+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}=4$；(2)原式 $=3+1-8+2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-4+3=-1$.

五、巩固达标训练

(一)选择题(每个小题的 4 个选项中，只有 1 个选项符合题意)

1. $-\frac{1}{3}$的倒数是　　(C)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

2. 下列实数属于无理数的是　　(D)

A. 5　　B. 0　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\sqrt{2}$

3. $\sqrt{3}$的相反数是　　(D)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

4. 下列判断错误的是　　(A)

A. -1 的平方根是-1　　B. -1 的倒数是-1

C. -1 的绝对值是 1　　D. -1 的平方的相反数是-1

5. 下列各数中，互为相反数的是　　(C)

A. 2 与$\frac{1}{2}$　　B. $(-1)^2$ 与 1　　C. -1 与$(-1)^2$　　D. 2 与$|-2|$

6. 在实数$-\frac{2}{3}$，$\sqrt{7}$，0，$-\frac{\pi}{3}$中，最小的实数是　　(D)

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\sqrt{7}$　　C. 0　　D. $-\frac{\pi}{3}$

7. (2015·天水)若 a 与 1 互为相反数，则$|a+1|$等于　　(B)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

8. 已知$|a-1|=5$，则 a 的值为　　(C)

A. 6　　B. -4　　C. 6 或-4　　D. -6 或 4

9. (2015·天水)某种细胞的直径是 0.000 067 厘米，将 0.000 067 用科学记数法表示为　　(A)

A. 6.7×10^{-5}　　B. 6.7×10^{-6}　　C. 0.67×10^{-5}　　D. 6.7×10^{-6}

10. (2015·宜昌)中国倡导的“一带一路”建设将促进我国与世界各国的互利合作，根据规划，“一带一路”地区覆盖总人口约为 4 400 000 000 人，这个数用科学记数法表示为　　(B)

A. 44×10^{8}　　B. 4.4×10^{9}　　C. 4.4×10^{8}　　D. 4.4×10^{10}

(二)填空题

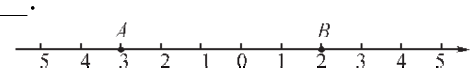
11. 4 的算术平方根是__2__，9 的平方根是__±3__，-27 的立方根是__-3__.

12. (2015·镇江)已知一个数的绝对值是 4，则这个数是__±4__.

13. -3 的绝对值是__3__.

14. 已知 x、y 是实数，且满足$(x+4)^2+|y+1|=0$，则 y^x 的值是__1__.

15. 如图，数轴上点 A，B 所表示的两个数的和的绝对值是__1__.



第 15 题图

16. (2015·铜仁)定义一种新运算：$x*y=\frac{x+2y}{x}$，如 $2*1=\frac{2+2\times1}{2}=2$，则$(4*2)*(-1)=$__0__.

17. 比较大小：$-\frac{7}{10}$__$<$__$-\frac{3}{10}$(填“>”或“<”或“=”).

18. 已知$|x|=3$，$|y|=2$，且 $xy<0$，则 $x+y$ 的值等于__±1__.

19. (2015·东莞)观察下列一组数：$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{11}$，…，根据该组数的排列规律，可推出第 10 个数是__$\frac{10}{21}$__.

20. 读一读：式子“$1+2+3+4+5+\cdots+100$”表示从 1 开始到 100 连续自然数的和，由于上述式子比较长，书写不方便，为简单起见，我们可以将“$1+2+3+4+5+\cdots+100$”表示为$\sum\limits_{n=1}^{100}$，$\sum$表示求和符号. 例如“$1+3+5+7+9+\cdots+99$”(即从 1 开始到 100 以内的连续奇数的和)可表示为$\sum\limits_{n=1}^{50}(2n-1)$.

通过对以上材料的阅读，请回答问题：

(1)$2+4+6+8+10+\cdots+100$(即从 2 开始到 100 以内的连续偶数的和)，用求和符号可表示为 $\underline{\sum\limits_{n=1}^{50} zn}$；

(2)计算：$\sum\limits_{n=1}^{3}3n=$ $\underline{\ 18\ }$.

(三)解答题

21. 计算：

(1) $|1-\sqrt{2}|+\sqrt{8}+(-2)^0$；

原式$=\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}+1=3\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{9}+(-1)^{2015}+(6-\pi)^0-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$；

原式$=3-1+1-4=-1$.

(3) $\left|4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|-(2\,017-\sqrt{2\,016})^0+(\tan60^\circ-1)^{-1}$；

原式$=|-2|-1+(\sqrt{3}-1)^{-1}$

$=2-1+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=1+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$=1+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

(4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}+(\pi+1)^0-2\sin60^\circ+\sqrt{12}$.

原式$=4+1-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}$

$=5-\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

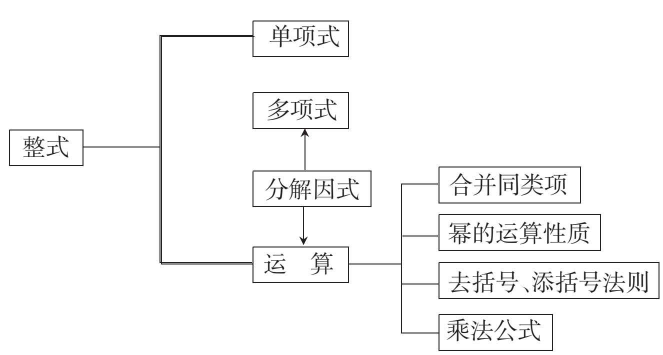
$=5+\sqrt{3}$.

22. 已知 $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$，$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{20}$，…，根据这些等式求值：$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+$，…，$+\dfrac{1}{2013\times2014}$.

原式$=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2013}-\dfrac{1}{2014}=1-\dfrac{1}{2014}=\dfrac{2013}{2014}$

第 2 节　整　式

一、内容结构归纳



二、课程标准要求

1. 了解单项式及其系数与次数，多项式及其项数、次数、整式等概念.
2. 掌握合并同类项的方法，去括号法则，会求代数式的值.
3. 了解因式分解的步骤，掌握三种因式分解的方法.
4. 了解因式分解与整式乘法的区别与联系，学会灵活运用平方差公式与完全平方公式等运算法则进行计算.

三、知识要点解读

1. 整式是单项式和多项式的统称.
2. 整式的加减运算实质是合并同类项，对单项式进行比较，建立了同类项的概念，同类项必须满足“两同”：一是所含字母相同，二是相同字母的指数也相同. 合并同类项有两个要点：一是字母和字母的指数不变，二是系数相加.
3. 在运用去括号法则的同时，要注意幂的运算性质和整式的乘法公式.

 (1)去括号法则：$a+(b+c)=a+b+c$，$a-(b+c)=a-b-c$.

 (2)幂的运算性质：

 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$(m，n 都是正整数).

 $(a^m)^n=a^{mn}$(m，n 都是正整数).

 $(ab)^n=a^n\cdot b^n$(n 为正整数).

 $a^m\div a^n=a^{m-n}$($a\neq0$，m，n 都是正整数，且 $m>n$).

 规定：$a^0=1(a\neq0)$，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$($a\neq0$，p 为正整数).

 (3)整式乘法公式：

 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.

4. 因式分解的方法：提公因式法、运用公式法.

 注意，分解因式必须把一个多项式分解到不能分解为止，请同学们记住以下“顺口溜”：“分解因式并不难，首先提取公因式，然后考虑用公式，两种方法反复试，结果必是连乘积”. 也可简记为“一提二套三查”.

四、典型例题解析

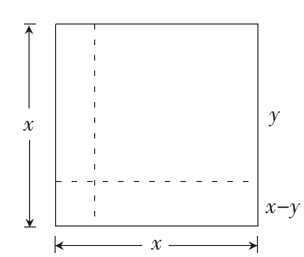
【例 1】若 $2a^mb^{2m+3n}$ 与 $a^{2n-3}b^8$ 的和仍是一个单项式，则 m 与 n 的值分别是 ( )

A. 1 2 B. 2 1 C. 1 1 D. 1 3

【解析】由题意，知 $\begin{cases}m=2n-3,\\2m+3n=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=2.\end{cases}$

【答案】A

【例 2】如图所示，请你观察图形，依据图形面积间的关系，不需要添加辅助线，便可得到一个你非常熟悉的公式，这个公式是.



例 2 图

【解析】在图形中，小正方形的面积等于大正方形的面积减去其他三部分的面积，得到公式 $(x-y)^2=x^2-2(x-y)\cdot y+y^2$，即 $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ 或者两个矩形相接得长条矩形，其面积 $(x+y)(x-y)$ 等于长正方形的面积减去边长为 y 的正方形的面积，得 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

【答案】$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ 或 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

【例 3】一次课堂练习，小敏同学做了如下 4 道因式分解题，你认为小敏做得还不够完整的一题是 ( )

A. $x^3-x=x(x^2-1)$ B. $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

C. $x^2\cdot y-xy^2=xy(x-y)$ D. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

【解析】对于 B、C、D 项分解都是正确的，只有 A 项分解时没有分解到最后一步，即 x^2-1 还可以继续分解

为$(x+1)(x-1)$，所以 A 做得不够完整.

【答案】A

【例 4】观察算式：$1=1^2$；$1+3=4=2^2$；$1+3+5=9=3^2$，$1+3+5+7=16=4^2$，$1+3+5+7+9=25=5^2\cdots$ 用代数式表示这个规律(n 为正整数)：$1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)=$________.

【解析】培养学生的观察、分析、猜想探索规律的能力是新课标中考的一大亮点，该题通过不完全归纳法引导学生用代数式表示猜想的结果，虽然不十分严密，但也符合推理的要求，这一点无疑是希望引起教师在教学中的注意.

【答案】n^2

【例 5】先化简，再求值：$(3x+2)(3x-2)-5x(x-1)-(2x-1)^2$. 其中，$x=-\dfrac{1}{3}$.

【解析】原式$=9x^2-4-5x^2+5x-(4x^2-4x+1)=9x^2-4-5x^2+5x-4x^2+4x-1=9x-5$. 当 $x=-\dfrac{1}{3}$时，

原式$=9x-5=9\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)-5=-3-5=-8$.

【例 6】计算：

(1)$(-2x)^2+(6x^3-12x^4)\div(3x^2)$；　　(2) $y(x+y)+(x+y)(x-y)-x^2$.

【解析】(1)原式$=4x^2+2x-4x^2=2x$；　　(2)原式$=xy+y^2+x^2-y^2-x^2=xy$.

【例 7】老师在黑板上写出三个算式：$5^2-3^2=8\times2$，$9^2-7^2=8\times4$，$15^2-3^2=8\times27$，刘卫接着又写了两个具有同样规律的算式：$11^2-5^2=8\times12$，$15^2-7^2=8\times22\cdots$

(1)请你再写出两个(不同于上面算式)具有上述规律的算式；

(2)用文字写出反映上述算式的规律；

(3)证明这个规律的正确性.

【解析】(1)答案不唯一，如：$16^2-8^2=8\times24$，$17^2-9^2=8\times26$，$18^2-10^2=8\times28$ 等.

(2)规律：任意两个奇数的平方差等于 8 的倍数.

(3)证明：设 m，n 为整数，两个奇数可表示为 $2m+1$，$2n+1$，则$(2m+1)^2-(2n+1)^2=4(m-n)(m+n+1)$. ①当 m，n 同是奇数或偶数时，$m-n$ 一定为偶数，所以 $4(m-n)$一定是 8 的倍数；②当 m，n 一奇一偶时，$m+n+1$ 一定为偶数，所以 $4(m+n+1)$一定是 8 的倍数；所以，任意两个奇数的平方差是 8 的倍数.

五、巩固达标训练

(一)选择题(每个小题的 4 个选项中，只有 1 个选项符合题意)

1. 计算$(-2a^2b)^3$ 的结果是 (B)

A. $-6a^6b^3$　　B. $-8a^6b^3$　　C. $8a^6b^3$　　D. $-8a^5b^3$

2. 把代数式 $2x^2-18$ 分解因式，结果正确的是 (C)

A. $2(x^2-9)$　　B. $2(x-3)^2$　　C. $2(x+3)(x-3)$　　D. $2(x+9)(x-9)$

3. 将代数式 x^2+4x-1 化成$(x+p)^2+q$ 的形式为 (C)

A. $(x-2)^2+3$　　B. $(x+2)^2-4$　　C. $(x+2)^2-5$　　D. $(x+2)^2+4$

4. 计算 $2x(3x^2+1)$，正确的结果是 (C)

A. $5x^3+2x$　　B. $6x^3+1$　　C. $6x^3+2x$　　D. $6x^2+2x$

5. 已知 $x^2-2x-3=0$，则 $2x^2-4x$ 的值为 (B)

A. -6　　B. 6　　C. -2 或 6　　D. -2 或 30

6. 计算$(-a^2)^3$ 的结果是 (D)

A. a^5　　B. $-a^5$　　C. a^6　　D. $-a^6$

7. 下面的多项式在实数范围内能因式分解的是 (D)

A. x^2+y^2　　B. x^2-y　　C. x^2+x+1　　D. x^2-2x+1

8. 下列运算，正确的是 (C)

A. $4a-2a=2$　　B. $a^6\div a^3=a^2$　　C. $(-a^3b)^2=a^6b^2$　　D. $(a-b)^2=a^2-b^2$

9. 下列式子从左到右变形是因式分解的是 (B)

A. $a^2+4a-21=a(a+4)-21$　　B. $a^2+4a-21=(a-3)(a+7)$

C. $(a-3)(a+7)=a^2+4a-21$　　D. $a^2+4a-21=(a+2)^2-25$

10. 已知一个多项式与 $3x^2+9x$ 的和等于 $3x^2+4x-1$，则这个多项式是 (A)

A. $-5x-1$　　B. $5x+1$　　C. $-13x-1$　　D. $13x+1$

(二)填空题

11. 若 $x^2-9=(x-3)(x+a)$，则 $a=$__3__.
12. 化简：$(1-x)^2+2x=$__x^2+1__.
13. 因式分解：$ax^2-7ax+6a=$__$a(x-1)(x-6)$__.
14. 计算：$(9a^2b-6ab^2)\div(3ab)=$__$3a-2b$__.
15. 计算：$x^2-4x+3=(x-$__2__$)^2-1$.
16. 计算：$9x^3\div(-3x^2)=$__$-3x$__.
17. 因式分解：$2x^2+4x+2=$__$2(x+1)^2$__.
18. 因式分解：$ab^2-ac^2=$__$a(b+c)(b-c)$__.

(三)解答题

19. 先化简，再求值：$(x+1)(x-1)+x(2-x)+(x-1)^2$，其中 $x=2\sqrt{3}$.

原式$=x^2-1+2x-x^2+x^2-2x+1=x^2$. 当 $x=2\sqrt{3}$时，原式$=(2\sqrt{3})^2=12$.

20. 已知 $x=1-\sqrt{2}$，$y=1+\sqrt{2}$，求 $x^2+y^2-xy-2x+2y$ 的值.

$\because x=1-\sqrt{2}$，$y=1+\sqrt{2}$，$\therefore x-y=(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$，$xy=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$，$\therefore x^2+y^2-xy-2x+2y=(x-y)^2-2(x-y)+xy=(-2\sqrt{2})^2-2\times(-2\sqrt{2})+(-1)=7+4\sqrt{2}$.

21. 已知 $x^2+x-6=0$，求代数式 $x^2(x+1)-x(x^2-1)-7$ 的值.

$x^2(x+1)-x(x^2-1)-7=x^3+x^2-x^3+x-7=x^2+x-7$. $\because x^2+x-6=0$，$\therefore x^2+x-7=-1$，即 $x^2(x+1)-x(x^2-1)-7=-1$.

22. 观察下列关于自然数的等式：$3^2-4\times1^2=5$ ①，$5^2-4\times2^2=9$ ②，$7^2-4\times3^2=13$ ③，…，根据上述规律解决下列问题：

(1)完成第四个等式：$9^2-4\times$__4__$^2=$__17__；

(2)写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示)，并验证其正确性.

$(2n+1)^2-4n^2=2(2n+1)-1$. 左边$=(2n+1)^2-4n^2=4n^2+4n+1-4n^2=4n+1$，右边$=2(2n+1)-1=4n+2-1=4n+1$. $\because$左边$=$右边，$\therefore(2n+1)^2-4n^2=2(2n+1)-1$.

第3节 分 式

一、内容结构归纳

- 分式
  - 概念
  - 分式有意义的条件
  - 分式的基本性质
  - 分式的运算

二、课程标准要求

1. 了解分式，最简公分母等概念，掌握分式的基本性质，会熟练地进行通分和约分.
2. 掌握分式的加、减、乘、除与乘方的运算法则，会进行简单的分式运算.

三、知识要点解读

1. 分式的概念：用 A、B 表示两个整式，$A\div B$ 改写成$\frac{A}{B}$的形式，若 B 中含有字母，则形如式子$\frac{A}{B}$叫分式.
2. 分式有意义的条件是分母的值不能为零.
   分式的值为零的条件是：分子的值为零，分母的值不为零.
3. 分式的基本性质——将分式的分子与分母都乘上(或除以)同一个不等于零的整式，分式的值不变.
   即：$\frac{A}{B}=\frac{A\times m}{B\times m}=\frac{A\div m}{B\div m}$($m\neq0$ 的整式).
   注意：利用分式的基本性质可得，分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变. 如：$-\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$，$-\frac{1}{b-a}=\frac{1}{a-b}$.
4. 约分：将分子与分母的公因式约去，叫约分.
5. 最简公分母必须满足的三个条件.
   (1)系数取各分母系数的最小公倍数；
   (2)因式取各项所有不同的因式；
   (3)因数的指数取次数最高的.
   注意：在找最简公分母之前，必须将各分母因式分解.
6. 通分：根据分式的基本性质，把异分母的分式化成和原来的分式相等的同分母的分式，这个过程叫做通分，通分的关键是找出各分母的最简公分母.
7. 分式的运算：
   (1)分式的加减法：同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减，即：$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$.
   异分母分式相加减，先通分，变成同分母的分式，再相加减，即：$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.
   (2)分式的乘法：将分子与分子的积作为分子，分母与分母的积作为分母，即：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

(3)分式的除法：除以一个分式等于乘以它的倒数．即：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

(4)分式的乘方：把分子与分母分别乘方，即：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

(5)分式的混合运算：先算乘方再算乘除，最后算加减，有括号的先算括号里的整式．

注意：①最后的结果要化成最简分式；

②各种运算律也符合分式的运算．

四、典型例题解析

【例 1】填空：

(1)分式$\frac{x}{2x-4}$有意义的 x 的取值范围________；

(2)分式$\frac{3x^2-6x}{2-x}$的值为 0，则 x 的值为________；

(3)已知分式$\frac{|x|-2}{x^2-x-2}$，当 x________时，分式无意义；当________时，分式值为 0.

【解析】(1)由 $2x-4\neq0$，得 $x\neq2$，此时分式有意义；　(2)由$\begin{cases}2-x\neq0,\\3x^2-6x=0,\end{cases}$得 $x=0$，此时分式的值为 0；

(3)由 $x^2-x-2=0$，得$(x-2)(x+1)=0$，即 $x=2$ 或 $x=-1$，此时分式无意义．由 $|x|-2=0$ 且 $x^2-x-2\neq0$,得 $x=-2$，此时分式值为 0.

【答案】(1)$x\neq2$　(2)$x=0$　(3)$x=2$ 或 $x=-1$　$x=-2$

【例 2】(1)化简，求值：$\left(\frac{3x}{x+2}-\frac{x}{x-2}\right)\div\frac{x}{x^2-4}$．其中，$x=-3$.

(2)先化简代数式：$\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}\right)\div\frac{1}{x^2-1}$，再选取一个使原式有意义的 x 的值代入求值．

【解析】(1)此题可先用分配律：原式$=\left(\frac{3x}{x+2}-\frac{x}{x-2}\right)\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x}=3(x-2)-(x+2)=2x-8$.

当 $x=-3$ 时，原式$=-14$.

(2)原式$=\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{2x}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot(x+1)(x-1)=(x-1)^2+2x=x^2+1$,

当 $x=2$ 时，原式$=5$.

【例 3】先化简，再求值：

(1)$\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-2a+1}\div\frac{1}{a^2-1}$．其中，$a$ 满足 $a^2-a=0$；

(2)先化简，再求值：$\frac{a^2-1}{a^2-a}\div\left(2+\frac{a^2+1}{a}\right)$，其中 $a=\sqrt{2}$.

【解析】(1)原式$=\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{(a-1)^2}\cdot(a+1)(a-1)=(a-2)(a+1)=a^2-a-2$.

将 $a^2-a=0$ 整体代入，原式$=-2$.

(2)原式$=\frac{(a+1)(a-1)}{a(a-1)}\div\frac{2a+a^2+1}{a}=\frac{(a+1)(a-1)}{a(a-1)}\cdot\frac{a}{(a+1)^2}=\frac{1}{a+1}$，当 $a=\sqrt{2}$时，原式$=\sqrt{2}-1$.

【例 4】化简：(1)$\left(y-1-\frac{8}{y+1}\right)\div\frac{y^2-6y+9}{y^2+y}$；

(2)$\left(\frac{x^2}{x-1}-x+1\right)\div\frac{4x^2-4x+1}{1-x}$.

【解析】(1)原式$=\left[\frac{(y+1)(y-1)}{y+1}-\frac{8}{y+1}\right]\div\frac{(y-3)^2}{y(y+1)}=\frac{(y+3)(y-3)}{y+1}\cdot\frac{y(y+1)}{(y-3)^2}=\frac{y^2+3y}{y-3}$

(2)原式$=\left[\frac{x^2}{x-1}-(x-1)\right]\cdot\frac{1-x}{(2x-1)^2}=\left[\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right]\cdot\frac{1-x}{(2x-1)^2}$

$=\frac{2x-1}{x-1}\cdot\frac{1-x}{(2x-1)^2}=\frac{1}{1-2x}$.

五、巩固达标训练

(一)选择题(每个小题的 4 个选项中，只有 1 个选项符合题意)

1. 化简$\frac{a-1}{a}\div\frac{a-1}{a^2}$的结果是 (B)

A. $\frac{1}{a}$　B. a　C. $a-1$　D. $\frac{1}{a-1}$

2. 要使分式$\frac{x+1}{x-2}$有意义，则 x 的取值应满足 (A)

A. $x\neq2$　B. $x\neq-1$　C. $x=2$　D. $x=-1$

3. 化简$\frac{m^2}{m-3}-\frac{9}{m-3}$的结果是 (A)

A. $m+3$　B. $m-3$　C. $\frac{m-3}{m+3}$　D. $\frac{m+3}{m-3}$

4. 若分式$\frac{x^2-1}{x-1}$的值为零，则 x 的值为 (C)

A. 0　B. 1　C. -1　D. ±1

5. 下列约分正确的是 (D)

A. $\frac{a^6}{a^2}=a^3$　B. $\frac{a+x}{b+x}=\frac{a}{b}$　C. $\frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$　D. $\frac{-x-y}{x+y}=-1$

6. 分式$-\frac{1}{1-x}$可变形为 (D)

A. $-\frac{1}{x-1}$　B. $\frac{1}{1+x}$　C. $-\frac{1}{1+x}$　D. $\frac{1}{x-1}$

7. 下列运算正确的是 (D)

A. $\frac{y}{-x-y}=-\frac{y}{x-y}$　B. $\frac{2x+y}{3x+y}=\frac{2}{3}$　C. $\frac{x^2+y^2}{x+y}=x+y$　D. $\frac{y+x}{x^2-y^2}=\frac{1}{x-y}$

8. 分式$\frac{1}{a+b}$，$\frac{2a}{a^2-b^2}$，$\frac{b}{b-a}$的最简公分母为 (D)

A. $(a^2-b^2)(a+b)(b-a)$　B. $(a^2-b^2)(a+b)$　C. $(a^2-b^2)(b-a)$　D. a^2-b^2

9. 计算$\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}$的结果是 (D)

A. $x+2$　B. $x-2$　C. $\frac{1}{x+2}$　D. $\frac{1}{x-2}$

10. 如果$\frac{a+2b}{b}=\frac{5}{2}$，那么$\frac{a}{b}$的值是 (D)

A. 5　B. 2　C. $\frac{1}{5}$　D. $\frac{1}{2}$

(二)填空题

11. 当 $x=$ <u>−1</u> 时，分式$\frac{x+1}{x-2}$的值为 0.

12. 计算：$\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x+1}=$ <u>x−1</u>.

13. 计算：$\frac{2a-1}{a}+\frac{1}{a}=$ <u>2</u>.

14. 在$\frac{1}{a}$，$\frac{a+b}{\pi}$，$\frac{3x^2y}{7}$，$1-\frac{1}{x+y}$中，属于分式的有 <u>$\frac{1}{a}$，$1-\frac{1}{x+y}$</u> .

15. 当 $x=$ <u>−3</u> 时，分式$\frac{|x|-3}{x-3}$的值为零，当 x <u>$\neq3$</u> 时，分式有意义.

16. 化简$\frac{2}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}$的结果是 <u>$-\frac{1}{a+1}$</u> .

17. 分式 $-\dfrac{5}{6x^2y}$ 与 $\dfrac{3}{4xyz}$ 的最简公分母为 $\underline{12x^2yz}$. $\dfrac{1}{x^2-4x+4}$ 与 $\dfrac{x}{2x^2-8}$ 的最简公分母为 $\underline{2(x-2)^2(x+2)}$.

18. 计算：$\dfrac{3a+2b}{a^2-b^2}-\dfrac{a}{a^2-b^2}=$ $\underline{\dfrac{2}{a-b}}$.

19. 若 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3$，则 $\dfrac{a-3ab+b}{a+2ab+b}=$ $\underline{0}$.

（三）解答题

20. (2015·漳州)先化简：$\dfrac{m^2}{m-1}-\dfrac{1-2m}{1-m}$，再选取一个适当的 m 的值代入求值.

原式 $=\dfrac{m^2}{m-1}-\dfrac{2m-1}{m-1}=\dfrac{m^2-2m+1}{m-1}=\dfrac{(m-1)^2}{m-1}=m-1$，当 $m=2016$ 时，原式 $=2016-1=2015$.(答案不唯一，只要 $m\neq1$ 即可).

21. 化简：$\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{2x+6}{x^2-1}\div\dfrac{x+3}{x^2-2x+1}$.

原式 $=\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{2(x+3)}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{(x-1)^2}{x+3}=\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{2(x-1)}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}$.

22. 化简求值：$\dfrac{x^2-x}{x^2-2x+1}\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，其中 $x=\dfrac{1}{5}$.

原式 $=\dfrac{x(x-1)}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}=x+1$，当 $x=\dfrac{1}{5}$ 时，原式 $=\dfrac{6}{5}$.

23. 先化简，再求值：$(a^2b+ab)\div\dfrac{a^2+2a+1}{a+1}$，其中 $a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$.

原式 $=ab(a+1)\cdot\dfrac{a+1}{(a+1)^2}=ab$. 当 $a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$ 时，原式 $=3-1=2$.

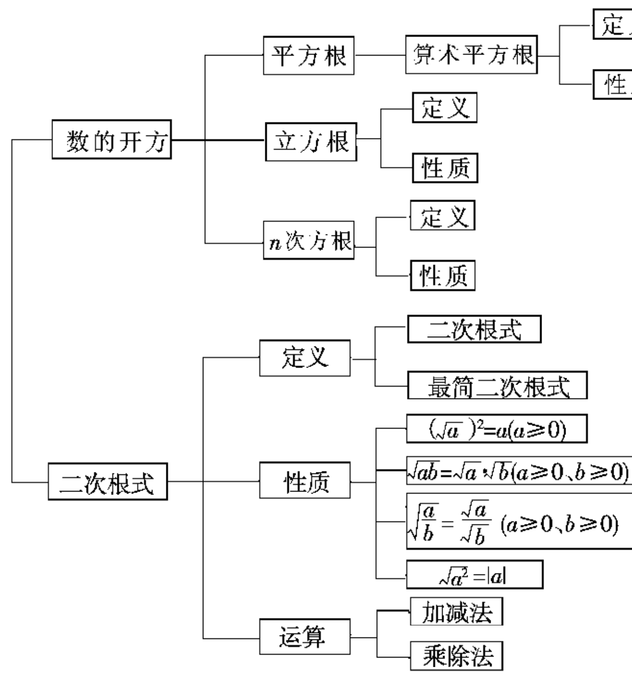
24. 先化简，再求值：$\left(a+\dfrac{1}{a+2}\right)\div\left(a-2+\dfrac{3}{a+2}\right)$，其中，$a$ 满足 $a-2=0$.

原式 $=\dfrac{a(a+2)+1}{a+2}\div\dfrac{a^2-4+3}{a+2}=\dfrac{(a+1)^2}{a+2}\cdot\dfrac{a+2}{(a+1)(a-1)}=\dfrac{a+1}{a-1}$. 当 $a-2=0$，即 $a=2$ 时，原式 $=3$.

57000000

第 4 节　数的开方与二次根式

一、内容结构归纳



二、课程标准要求

1. 了解平方根、立方根的概念，掌握其性质，并灵活运用于计算中，了解实数的分类，并熟练地掌握各级运算的基本法则.
2. 了解二次根式的概念及性质，并熟练地化简二次根式.
3. 掌握二次根式的加、减、乘、除的运算法则，会用它们进行计算.
4. 会用平方运算求百以内整数的平方根，会用立方运算求百以内整数(对应的负整数)的立方根；能求实数的相反数和绝对值 .

三、知识要点解读

1. 平方根与算术平方根的区别与联系.

(1)区别

①定义不同：如果 $x^2=a$，那么 x 叫 a 的平方根；如果 $x^2=a$ 且 $x\geqslant 0$，那么 x 叫 a 的算术平方根，即正数 a 的正的平方根；

②个数不同：一个正数有两个平方根，它们互为相反数，一个正数的算术平方根只有一个且是正数；

③表示方法不同：正数 a 的平方根表示为 $\pm\sqrt{a}$，正数 a 的算术平方根表示为$\sqrt{a}$；

④结果性质不同：非负数的算术平方根一定是非负数，非负数的平方根则是一对相反数；

⑤平方根等于它本身的数是 0，而算术平方根等于它本身的数是 0 或 1.

(2)联系

①包含关系：平方根包含算术平方根，算术平方根是平方根中的一个；

②存在条件，平方根和算术平方根都只有非负数才具有；

③运算关系：求平方根和算术平方根都是开平方运算且都是平方运算的逆运算；