美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

108个代数问题：
来自AwesomeMath全年课程

108 Algebra Problems：From the AwesomeMath Year-Round Program

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)
[美] 阿迪亚·加内什(Adithya Ganesh) 著
李 鹏 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

108个代数问题：
来自AwesomeMath全年课程

108 Algebra Problems：From the AwesomeMath Year-Round Program

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)
[美] 阿迪亚·加内什(Adithya Ganesh) 著
李 鹏 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是美国著名数学竞赛专家 Titu Andreescu 教授及其团队精心编写的试题集系列中的一本.

本书从解题的视角来举例说明初等代数中的基本策略和技巧,书中涵盖了初等代数的众多经典论题,包括因式分解、二次函数、方程和方程组、Vieta 定理、指数和对数、无理式、复数、不等式、连加和连乘、多项式以及三角代换等主题.为了让读者能够对每章中讨论的策略和技巧进行实践,除例题之外,作者精选了 108 个不同的问题,包括 54 个入门问题和 54 个高级问题,给出了所有这些问题的解答,并对不同的方法进行了比较.

本书适合于热爱数学的广大教师和学生使用,也可供从事数学竞赛工作的相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

108 个代数问题:来自 AwesomeMath 全年课程/(美)蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu),(美)阿迪亚·加内什(Adithya Ganesh)著;李鹏译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.1

书名原文:108 Algebra Problems: From the AwesomeMath Year-Round Program

ISBN 978-7-5603-7592-2

Ⅰ.①1… Ⅱ.①蒂… ②阿… ③李… Ⅲ.①初等代数-问题解答
Ⅳ.①O122-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 183881 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.75 字数 309 千字
版　　次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-7592-2
定　　价 68.00 元

目 录

1 序言

本书的目的是从解题的视角来举例说明初等代数中的基本策略和技巧. 特别是在代数学中, 仅仅知道定理的内容是不够的, 大家需要熟练掌握并知道如何应用这些定理. 为了完全展现这门学科的知识, 我们提供了大量的例题, 而在答案背后的解题动机和核心思想则通过这些例题讲解出来. 我们准备了各种难度的问题, 可以满足从初学者直到具有丰富经验的解题者的需要. 这里讨论的解题方法无论是在数学奥林匹克竞赛的解题中还是在数学的其他诸多领域中都是非常重要的.

本书涵盖了初等代数的众多经典论题, 包括因式分解、二次函数、无理式、Vieta 定理、方程和方程组、不等式、连加和连乘、多项式. 本书还扩展了该系列先前的著作《105 个代数问题: 来自 AwesomeMath 夏季课程》[1] 的内容, 其特色在于增加了更多的高级主题, 包括指数和对数、复数、三角学. 关于三角代换和更多主题的特殊章节似乎探索了带有自然的几何学和三角学解释的代数问题.

为了让读者能够对每章中讨论的策略和技巧进行实践, 我们准备了 108 个不同的问题, 包括 54 个入门问题和 54 个高级问题. 书中给出了所有这些问题的解答, 并对不同的方法进行了比较.

我们要真诚地感谢 Richard Stong 博士和 Mircea Becheanu 博士, 他们帮助我们修改最初的手稿, 他们还发现了若干错误并完善了大量的解答.

让我们一起享受这些问题吧!

[1] Andreescu T. 105 Algebra Problems from the AwesomeMath Summer Program [M]. Plano: XYZ Press, 2013.——译者注

2 让我们来做因式分解

对代数表达式进行因式分解是一种基本的技巧, 它使得我们能够求解广泛类型的方程、不等式和方程组. 作为一个熟悉的例子, 因式分解经常用来求二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解, 这里 a,b,c 为实数且 $a\neq 0$.

我们首先回想一些最基本的恒等式, 从熟悉的平方差恒等式开始. 设 a 和 b 为实数, 则我们有

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

这很容易通过将等式右边展开而得出. 对于指数是 3 的情形, 有一个相似的立方差恒等式:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

事实上, 我们可以将其推广: 对于所有实数 a 和 b 以及正整数 n, 我们有

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

看出此式的一个方法是注意到当 $a=b$ 时 $a^n-b^n=0$, 这表明 $a-b$ 是一个因子. 若 n 是奇数, 我们可以用 $-b$ 代替 b 来得到 n 次方和的因式分解. 实际上, 若对于某个正整数 k, $n=2k+1$, 则我们有

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2-\cdots-ab^{2k-1}+b^{2k}).$$

取 $k=1$ 的特殊情形就给出了熟悉的立方和恒等式:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

我们最后来看下面这个有用的代数恒等式:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

当然, 我们原则上可以简单地将等式右边展开来证明它. 然而, 假设我们被要求对表达式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 因式分解. 那么为此, 考虑根为 a,b,c 的多项式 $P(x)$:

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

由于 a,b,c 是根, 注意到 $P(a)=P(b)=P(c)=0$ 给出了下面三个方程:

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,$$
$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,$$
$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0.$$

现在将这三个式子相加并把 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 分离在等式的一侧, 我们得到

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \end{aligned}$$

我们注意到 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geq 0$, 其等号成立当且仅当 $a=b=c$. 因此 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 当且仅当 $a=b=c$ 或 $a+b+c=0$. 本书的前篇《105 个代数问题: 来自 AwesomeMath 夏季课程》有一个小节, 其中的大量问题都是用这个恒等式解决的.

我们现在转向例题来探索这些思想如何在实践中发挥作用.

例 2.1 将下列表达式因式分解:

(a) $x^4-3x^2y^2+y^4$;

(b) $(x+y)(x-y)-4(y+1)$;

(c) $4(x^2+x-y^2)+1$;

(d) $x(x-4y)+4(y^2-1)$;

(e) $x^2-y^2+2(x+3y-4)$.

解 (a) 我们将首先试着凑平方, 写

$$x^4-3x^2y^2+y^4=x^4-2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2-y^2)^2-(xy)^2.$$

使用公式 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, 现在容易得出因式分解

$$x^4-3x^2y^2+y^4=(x^2-y^2-xy)(x^2-y^2+xy).$$

(b) 我们从展开所给的表达式并分离变量开始:

$$(x+y)(x-y)-4(y+1)=x^2-y^2-4y-4=x^2-(y^2+4y+4).$$

表达式 y^2+4y+4 应该看起来很熟悉, 它是 $(y+2)^2$. 因此使用公式 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, 我们得到

$$(x+y)(x-y)-4(y+1)=x^2-(y+2)^2=(x-y-2)(x+y+2).$$

(c) 再次从展开并分离变量开始:

$$4(x^2+x-y^2)+1=4x^2+4x-4y^2+1=(4x^2+4x+1)-4y^2.$$

我们认出了 $(2x+1)^2$ 的展开式, 从而

$$4(x^2+x-y^2)+1=(2x+1)^2-(2y)^2=(2x-2y+1)(2x+2y+1).$$

(d) 我们沿用与前面的例题相同的策略, 得到

$$x(x-4y)+4(y^2-1)=x^2-4xy+4y^2-4=(x-2y)^2-4=(x-2y+2)(x-2y-2).$$

(e) 这仍然是另一个分离变量并使用基本代数恒等式的例子, 我们得到一个快速且自然的解:

$$\begin{aligned}x^2-y^2+2(x+3y-4)&=x^2+2x+1-y^2+6y-9\\&=(x+1)^2-(y-3)^2\\&=(x+1-y+3)(x+1+y-3)\\&=(x-y+4)(x+y-2).\end{aligned}$$

例 2.2 将下列表达式因式分解:

(a) $x^3+9x^2+27x+19$;

(b) x^3+3x^2+3x-7;

(c) $(x-y)(x^2+xy+y^2+3)+3(x^2+y^2)+2$.

解 (a) 式子中有多个可以被 3 整除的系数, 因此公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

可能会有用. 我们试着来凑立方使之凑成某个形如 $(x+a)^3$ 的表达式. 从上面的公式 (令 $b=x$) 可以看出, 要使得 $(x+a)^3$ 接近于题目给出的表达式, 对 a 的一个合理的选择是 $a=3$, 这是因为

$$(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27.$$

因此我们看出

$$x^3+9x^2+27x+19=(x+3)^3-8=(x+3)^3-2^3.$$

我们使用立方差恒等式得到

$$(x+3)^3-2^3=(x+3-2)((x+3)^2+2(x+3)+4),$$

再由简单的计算给出

$$(x+3)^2+2(x+3)+4=x^2+6x+9+2x+6+4=x^2+8x+19,$$

这个式子无法再分解了, 因为它的判别式为负. 将所有这些合在一起便得到

$$x^3+9x^2+27x+19=(x+1)(x^2+8x+19).$$

(b) 我们沿用与 (a) 相同的策略, 得到

$$\begin{aligned}x^3+3x^2+3x-7&=x^3+3x^2+3x+1-8\\&=(x+1)^3-2^3\\&=(x+1-2)((x+1)^2+2(x+1)+4)\\&=(x-1)(x^2+4x+7).\end{aligned}$$

(c) 考虑恒等式

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$

可以使 $(x-y)(x^2+xy+y^2+3)$ 这一项非常漂亮地简化. 因此题目中的表达式等于

$$x^3-y^3+3x-3y+3x^2+3y^2+2.$$

我们分离变量, 得到

$$x^3+3x^2+3x-y^3+3y^2-3y+2.$$

我们容易认出 $(x+1)^3$ 和 $(1-y)^3$ 的展开式. 从而表达式等于

$$(x+1)^3+(1-y)^3=(x+1+1-y)((x+1)^2-(x+1)(1-y)+(1-y)^2).$$

展开并化简第二个因式最终得到因式分解

$$(x-y)(x^2+xy+y^2+3)+3(x^2+y^2)+2=(x-y+2)(x^2+y^2+xy+x-y+1).$$

例 2.3 将 a^4+4b^4 因式分解.

解 注意到这两项在 $(a^2+2b^2)^2$ 的展开式中, 我们将表达式写成

$$a^4+4b^4=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2,$$

由于 $4a^2b^2=(2ab)^2$, 我们可以使用平方差恒等式, 得到

$$(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab).$$

这个恒等式被称为 *Sophie Germain* 恒等式.

例 2.4 $2012\cdot 503^{2011}+2013^4$ 是素数吗?

解 将表达式重写为

$$2013^4+4\cdot 503^{2012}=2013^4+4\cdot(503^{503})^4.$$

由 Sophie Germain 恒等式, $a^4+4b^4=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$, 这里 $a=2013$ 且 $b=503^{503}$, 这就分解为

$$(2013^2+2(503^{503})^2-2(2013\cdot 503^{503}))(2013^2+2(503^{503})^2+2(2013\cdot 503^{503})).$$

由于两个因子都是大于 1 的正整数, 所以这个数为合数.

例 2.5 将下面的表达式因式分解:

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4).$$

解 看到表达式中有 a^4,b^4,c^4 和 $2a^2b^2,2b^2c^2,2a^2c^2$ 这些项, 我们来试着凑平方. 事实上, 试过几次之后, 我们发现所给表达式等价于

$$4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2.$$

接着观察到 $4b^2c^2=(2bc)^2$ 并且使用平方差公式, 得到

$$\begin{aligned}&4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2\\=&(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2\\=&(2bc-a^2+b^2+c^2)(2bc+a^2-b^2-c^2).\end{aligned}$$

事情还没有彻底做完, 因为我们仍然可以将上式继续分解, 通过将各项重新排列并且凑平方得到

$$2bc-a^2+b^2+c^2=(b+c)^2-a^2=(b+c-a)(b+c+a)$$

和

$$2bc+a^2-b^2-c^2=a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c).$$

将所有这些合在一起便得到

$$4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2=(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c).$$

上面的例题事实上和几何中的一个经典问题有着密切的联系: 将一个三角形的面积 K 纯粹地用三边边长 a,b,c 表示. 设三边 a,b,c 的对角分别为 $\angle A,\angle B,\angle C$. 那么

$$K=\frac{bc\sin A}{2},$$

所以由余弦定理,

$$K^2=\frac{b^2c^2(1-\cos^2 A)}{4}=\frac{b^2c^2}{4}\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)$$
$$=\frac{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}{16}.$$

从而由上面的例题重新得到了著名的 Heron 公式

$$16K^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

例 2.6 求满足

$$\begin{cases}x^2+11=xy+y^4,\\ y^2-30=xy\end{cases}$$

的所有整数对 (x,y).

解 最简单的解题方法就是注意到 y 一定被 30 整除, 这可从第二个方程看出. 通过检验 30 的所有因子, 我们用第二个方程得到相应的 x 值, 然后检验这些值是否满足第一个方程. 这个方法需要分很多的情形, 因此需要相当大的计算量.

考虑一个更间接、更漂亮的方法, 让我们把两个方程加起来, 得到

$$x^2+y^2-19=2xy+y^4,$$

它等价于

$$(x-y)^2-(y^2)^2=19.$$

这可作为平方差分解成

$$(y^2-(x-y))(y^2+(x-y))=-19.$$

现在由于 19 是素数, 方程处于一个很好的形式. 两个因子 $y^2-(x-y)$ 和 $y^2+(x-y)$ 一定是整数对 $(19,-1)$, $(-1,19)$, $(-19,1)$ 或 $(1,-19)$ 之一. 注意到两个因子的和是非负的:

$$y^2-(x-y)+y^2+(x-y)=2y^2\geq 0,$$

我们可以排除其中一半的情形. 因此两个因子一定是 $(19,-1)$ 或 $(-1,19)$. 在这两种情形中, 注意到因子的和是 $2y^2$, 这给出

$$2y^2=19-1=18,$$

则 $y=\pm 3$. 将这两个可能的 y 值代入方程组, 得到解

$$(x,y)=(-7,3) \quad 或 \quad (7,-3).$$

例 2.7 将下面的表达式因式分解:

$$(x^2y+y^2z+z^2x)+(xy^2+yz^2+zx^2)+2xyz.$$

解 我们观察到令 $x=-y$ 可以使得表达式等于 0, 这是因为这样做给出

$$y^3+y^2z-z^2y-y^3+yz^2+zy^2-2y^2z=0.$$

类似地, 令 $y=-z$ 和 $z=-x$ 也使得表达式等于 0.

这得出 $x+y, y+z$ 和 $z+x$ 是该式的因子. 看一下所给表达式各项的次数, 我们可以推出它的形式为 $k(x+y)(y+z)(z+x)$. 取特殊情形 $x=y=z=1$ 得到 $8k=8$, 即 $k=1$. 因此, 表达式分解为 $(x+y)(y+z)(z+x)$.

例 2.8 化简下列表达式:

(a) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}$;

(b) $\dfrac{x^4-2x^3-x^2+2x+1}{x^4-2x^3+x^2-1}$.

解 (a) 注意到由于

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

因子 $x-1$ 同时出现在两个分母中. 因此

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{3}{x^2+x+1}\right).$$

现在就没什么神秘可言了, 我们计算

$$1-\frac{3}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x-2}{x^2+x+1},$$

并且观察出 (通过解方程 $x^2+x-2=0$) 分子可以因式分解为 $(x-1)(x+2)$. 所以

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x+2)}{x^2+x+1}=\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

很明显, 这个表达式不能再进一步化简了, 因为 $x+2$ 不是分母的一个因子 (由于 -2 不是 x^2+x+1 的一个根).

(b) 很容易分析分式的分母, 这是由于我们可以简单地认出

$$x^4-2x^3+x^2=x^2(x^2-2x+1)=x^2(x-1)^2.$$

于是我们可以将分母看成一个平方差来分解:

$$x^4-2x^3+x^2-1=(x^2-x)^2-1^2=(x^2-x-1)(x^2-x+1).$$

现在很自然地要问, 分子是否可以整除 x^2-x-1 或 x^2-x+1, 如若不然, 我们能够化简表达式的机会就非常小了. 使用长除法表明, 确实有

$$x^4-2x^3-x^2+2x+1=(x^2-x-1)^2,$$

因此

$$\frac{x^4-2x^3-x^2+2x+1}{x^4-2x^3+x^2-1}=\frac{(x^2-x-1)^2}{(x^2-x-1)(x^2-x+1)}=\frac{x^2-x-1}{x^2-x+1}.$$

这里还有另外一种处理分子的方法: 观察到它有相当多的项是与分母相同的, 因此我们有

$$\begin{aligned}&x^4-2x^3+x^2-1+(-2x^2+2x+2)\\=&(x^2-x-1)(x^2-x+1)-2(x^2-x-1)\\=&(x^2-x-1)(x^2-x+1-2)=(x^2-x-1)^2.\end{aligned}$$

例 2.9 求

$$x^4-4x^3-4x^2+16x-8$$

的根的绝对值之和.

解 将要在第 5 章讨论的 Vieta 定理很容易地告诉我们这些根的和是 4. 然而, 要想得到题目中需要的这些根的绝对值之和却不是那么容易的事.

为了化简这个四次式, 我们来试着凑平方. 事实上, 注意到前三项 $x^4-4x^3-4x^2$ 看起来与 $x^4-4x^3+4x^2=x^2(x-2)^2$ 相似, 我们可以将表达式重新写为

$$\begin{aligned}x^4-4x^3-4x^2+16x-8&=(x^4-4x^3+4x^2)-(8x^2-16x+8)\\&=x^2(x-2)^2-8(x-1)^2\\&=(x^2-2x)^2-(2\sqrt{2}x-2\sqrt{2})^2,\end{aligned}$$

这样我们就可以使用平方差公式了. 那么表达式等于

$$(x^2-(2+2\sqrt{2})x+2\sqrt{2})(x^2-(2-2\sqrt{2})x-2\sqrt{2}).$$

我们可以通过再次凑平方重复这样一个相似的过程, 使用事实 $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ 得到

$$\begin{aligned}x^2-(2+2\sqrt{2})x+2\sqrt{2}&=x^2-(2+2\sqrt{2})x+3+2\sqrt{2}-3\\&=(x-(1+\sqrt{2}))^2-(\sqrt{3})^2\\&=(x-1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

类似地处理另一个因子, 我们有

$$x^2-(2-2\sqrt{2})x-2\sqrt{2}=(x-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}).$$

因此, 表达式的根为 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}, 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 和 $1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. 使用近似值 $\sqrt{2}\approx 1.414$ 和 $\sqrt{3}\approx 1.732$, 容易看出只有 $1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 是负根. 所以, 需要求的和为

$$\begin{aligned}&(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})+(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-1)(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})\\=&2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

例 2.10 证明对于任何正整数 n, $(n+1)^5+n$ 不是一个素数.

解 令 $n+1=m$. 那么它的项数就要比我们展开 $(n+1)^5$ 后得到的项数少多了.

$$(n+1)^5+n=m^5+m-1.$$

我们试着将它因式分解来证明这个量总是合数.

$$m^5+m-1=m^5+m^2-m^2+m-1=m^2(m^3+1)-m^2+m-1.$$

可以看出, 在最后一个表达式中我们得到了一个立方和. 将其因式分解, 我们得出 m^2-m+1 项是公因子:

$$\begin{aligned}&m^2(m^3+1)-m^2+m-1\\=&m^2(m+1)(m^2-m+1)-(m^2-m+1)\\=&(m^2-m+1)(m^3+m^2-1).\end{aligned}$$

为了完成证明, 我们需要验证这两个因子都不是 1, 因为在这种情形下乘积可能会是素数. 由于 n 是正整数, 我们有 $m=n+1\geq 2$. 对于第一个因子, $m^2-m+1=1$ 推出 $m^2-m=m(m-1)=0$, 因此第一个因子当 $m=0$ 或 1 时等于 1, 而这不可能发生.

对于第二个因子, $m^3+m^2-1=1$ 推出 $m^3+m^2-2=0$. 由于 1 是该多项式的一个根, 我们知道 $m-1$ 是它的一个因子, 于是得到 $m^3+m^2-2=(m-1)(m^2+2m+2)=0$. 其中的二次式没有实根, 因为它的判别式 Δ 是负的: $\Delta=2^2-4\cdot 2<0$. 因此第二个因子仅当 $m=1$ 时等于 1, 而这不可能发生. 所以两个因子都不等于 1, 我们得到了希望的结果.

例 2.11 化简分式

$$\frac{a^5+(a-1)^4}{(a-1)^5-a^4}.$$

解 我们称所给的分式为 $F(a)$. 对表达式加一个量 a 使得 $(a-1)^4$ 成为公因子:

$$a+F(a)=\frac{a(a-1)^5+(a-1)^4}{(a-1)^5-a^4}.$$

从分子中提取 $(a-1)^4$ 给出

$$\frac{a(a-1)^5+(a-1)^4}{(a-1)^5-a^4}=\frac{(a-1)^4(a^2-a+1)}{(a-1)^5-a^4}.$$

分母显然不能被 $a-1$ 整除, 所以我们尝试将 a^2-a+1 作为因子. 事实上, 由长除法, 我们得到 $(a-1)^5-a^4=(a^2-a+1)(a^3-5a^2+4a-1)$. 因此

$$a+F(a)=\frac{(a-1)^4}{a^3-5a^2+4a-1}.$$

解出 $F(a)$, 我们得到

$$\begin{aligned}F(a)=\frac{(a-1)^4}{a^3-5a^2+4a-1}-a&=\frac{a^4-4a^3+6a^2-4a+1}{a^3-5a^2+4a-1}-a\\&=\frac{a^3+2a^2-3a+1}{a^3-5a^2+4a-1}.\end{aligned}$$

例 2.12 设 a,b,c 是互不相同的实数, 满足

$$a^2(1-b+c)+b^2(1-c+a)+c^2(1-a+b)=ab+bc+ca.$$

证明

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=1.$$

解 首先, 观察到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2\\=&\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\\&+2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}\right)\\=&\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+2\cdot\frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\=&\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}.\end{aligned}$$

现在只需证明

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=1 \quad 或 \quad \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=-1.$$

我们现在来证明上面的第一个等式等价于题目中所给的条件. 事实上, 所给的条件可以写成

$$a^2(-b+c)+b^2(-c+a)+c^2(-a+b)=-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca,$$

它可以通过因式分解变为

$$(a-b)(b-c)(c-a)=(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c).$$

这等价于

$$1=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a},$$

正如我们所需要的.

例 2.13 将下列表达式因式分解:

(a) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$;

(b) $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$.

解 (a) 因为 $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$, 我们可以从当 $a+b+c=0$ 时 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 这一事实立刻得到因式分解 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

另一种方法, 观察到将 $x=y$ 代入可以使得表达式等于 0. 类似地, 将 $y=z$ 或 $z=x$ 代入同样使该式为 0. 我们记

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=a(x-y)(y-z)(z-x),$$

其中 a 为某个常数. 将等式两边对应项的系数置为相等, 我们得到 $3xy^2=axy^2$, 这显示出 $a=3$. 为了验证, 我们将等式的右边展开, 得出其确实等于左边. 因此

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

(b) 设 $a'=(x-a)(b-c)$, $b'=(x-b)(c-a)$, $c'=(x-c)(a-b)$. 将它们展开后可以验证 $a'+b'+c'=0$. 从而

$$a'^3+b'^3+c'^3=3a'b'c',$$

或

$$\begin{aligned}&(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3\\=&\,3(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c).\end{aligned}$$

例 2.14 设 a, b, c 为互不相同的非零实数. 如果

$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}, \quad \frac{b^2-ca}{b(1-ca)}, \quad \frac{c^2-ab}{c(1-ab)}$$

中的两个分式相等, 证明这三个分式都相等, 并且它们的共同值为 $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

解 我们使用比例的一个基本性质: 如果 $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}$ 且 $y \neq w$, 那么 $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}=\frac{x-z}{y-w}$. 因此, 若我们不失一般性假设

$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\frac{b^2-ca}{b(1-ca)},$$

则

$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\frac{b^2-ca}{b(1-ca)}=\frac{a^2-bc-b^2+ca}{a-abc-b+abc}.$$

我们认出了平方差 a^2-b^2, 将分子写为 $a^2-bc-b^2+ca=(a-b)(a+b)+c(a-b)$ 可以使得我们将其因式分解, 于是有:

$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\frac{a^2-bc-b^2+ca}{a-abc-b+abc}=\frac{(a-b)(a+b+c)}{a-b}=a+b+c.$$

由上式的最左边和最右边相等, 我们得到 $a^2-bc=a(1-bc)(a+b+c)$, 推出

$$-bc-ca-ab=-abc(a+b+c).$$

等式两边同时除以 $-abc$ 给出

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c.$$

我们几乎做完了. 我们已经证明了前两个分式等于 $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, 现在要来证明第三个分式也等于这个共同的值. 观察到

$$\begin{aligned}\frac{c^2-ab}{c(1-ab)}-a-b-c&=\frac{c^2-ab-ac-bc-c^2+abc(a+b+c)}{c(1-ab)}\\&=\frac{-(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)}{c(1-bc)}=0,\end{aligned}$$

上式的最后一步由 $-bc-ca-ab=-abc(a+b+c)$ 推出, 这个事实我们前面已经证明了. 所以,

$$\frac{c^2-ab}{c(1-ab)}=a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

它也等于另外两个分式, 正如我们所需要的.