世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

概率论与数理统计

（经管类·简明版·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

概率论与数理统计

（经管类·简明版·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计：经管类：简明版/吴赣昌主编．—5版．—北京：中国人民大学出版社，2017.8
21世纪数学教育信息化精品教材　大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-24584-3

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第144658号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
概率论与数理统计（经管类·简明版·第五版）
吴赣昌　主编
Gailülun yu Shuli Tongji

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司	版　　次	2006年10月第1版
规　　格	170 mm×228 mm　16开本		2017年8月第5版
印　　张	15.75 插页1	印　　次	2019年11月第5次印刷
字　　数	324 000	定　　价	35.50元

内容简介

本书根据高等院校普通本科经管类专业概率论与数理统计课程的最新教学大纲及考研大纲编写而成，并在本书第四版的基础上进行了重大修订和完善（详见本书前言）。本书包含概率论基础、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基础、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等内容模块，并特别加强了数学建模与数学实验教学环节。

本“书”远非传统意义上的书，作为立体化教材，它包含线下的“书”和线上的“服务”两部分。其中线上的“服务”用以下两种形式提供：一是书中各处的二维码，用户通过手机或平板电脑等移动端扫码即可使用；二是在本书的封面上提供的网络账号，用户通过它即可登录与本书配套建设的网络学习空间。

网络学习空间中包含与本书配套的在线学习系统，该系统在内容结构上包含教材中每节的教学内容及相关知识扩展、教学例题及综合进阶典型题详解、数学实验及其详解、习题及其详解等，并为每章增加了综合训练，其中包含每章的总结、题型分析及其详解、历届考研真题及其详解等。该系统采用交互式多媒体化建设，并支持用户间在线求助与答疑，为用户自主式高效率地学习奠定基础。

本书可作为高等院校（少课时）普通本科经管类专业的概率论与数理统计教材，并可作为上述各专业领域读者的教学参考书。

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已. 中外大量的教育实践事实充分显示了: 优秀的数学教育，乃是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自1999年开始迅速扩大招生规模，至2009年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其他国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路. 教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战. 大学数学的教育问题首当其冲受到影响. 大学数学教育过去是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年甚至上百年一贯制，仍处于经典状态. 当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求. 传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与后续课程教学的衔接，进而造成了学生"学不会，用不了"的尴尬局面. 二是在信息技术及其终端产品迅猛发展的今天，在大学数学教育领域，信息技术的应用远没有在其他领域活跃，其主要原因是: 在教材和教学建设中没能把信息技术及其终端产品与大学数学教学的内容特点有效地整合起来.

作者主编的"大学数学立体化教材"，最初脱胎于作者在2000—2004年研发的"大学数学多媒体教学系统". 2006年，作者与中国人民大学出版社达成合作，出版了该系列教材的第一版，合作期间，该系列教材经历多次改版，并于2011年出版了第四版，具体包括: 面向普通本科理工类、经管类与纯文科类的完整版系列教材; 面向普通本科部分专业和三本院校理工类与经管类的简明版系列教材；面向高职高专院校理工类与经管类的高职高专版系列教材. 在上述第四版及相关系列教材中，作者加强了对大学数学相关教学内容中重要概念的引入、重要数学方法的应用、典型数学模型的建立、著名数学家及其贡献等方面的介绍，丰富了教材内涵，初步形成了该系列教材的特色. 令人感到欣慰的是，自2006年以来，"大学数学立体化教材"已先后被国内数百所高等院校广泛采用，并对大学数学的教育改革起到了积极的推动作用.

2017年，距2011年的改版又过去了6年. 而在这6年时间里，随着移动无线通信技术 (如3G、4G等)、宽带无线接入技术(如Wi-Fi等)和移动终端设备(如智能手机、平板电脑等)的飞速发展，那些以往必须在电脑上安装运行的计算软件，如今在

普通的智能手机和平板电脑上通过移动互联网接入即可流畅运行，这为各类教育信息化产品的服务向前延伸奠定了基础.

作者本次启动的“大学数学立体化教材”(第五版) 的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境. 顺利实现这一宗旨，还得益于作者主持的数苑团队的另一项工作成果: 公式图形可视化在线编辑计算软件. 该软件于 2010 年研发成功时，仅支持在 Win 系统电脑中通过 IE 类浏览器运行. 2014 年10月底，万维网联盟 (W3C) 组织正式发布并推荐了跨系统与跨浏览器的HTML5.0 标准. 为此，数苑团队通过最近几年的努力，也实现了相关技术突破. 如今，数苑团队研发的公式图形可视化在线编辑计算软件已支持在各类操作系统的电脑和移动终端 (包括智能手机、平板电脑等) 上运行于不同的浏览器中，这为我们接下来的教材改版工作奠定了基础.

作者本次“大学数学立体化教材”(第五版) 的改版具体包括: 面向普通本科院校的“理工类 · 第五版”“经管类 · 第五版”与“纯文科类 · 第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类 · 简明版 · 第五版”“经管类 · 简明版 · 第五版”与“综合类 · 应用型本科版”合订本；面向高职高专院校的“理工类 · 高职高专版 · 第四版”“经管类 · 高职高专版 · 第四版”与“综合类 · 高职高专版 · 第三版”.

本次改版的指导思想是: 为帮助教材用户更好地理解教材中的重要概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验. 实验内容包括: 数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D 函数图形实验、3D 函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等. 相比教材正文所举示例，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大. 本系列教材于2017年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验，其中的大部分都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码，即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中.

大学数学按课程模块分为高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计三大模块，各课程的改版情况简介如下:

高等数学课程: 函数是高等数学的主要研究对象，函数的表示法包括解析法、图像法与表格法. 以往受计算分析工具的限制，人们对函数的解析表示、图像表示与数表表示之间的关系往往难以把握，大大影响了学习者对函数概念的理解. 为了弥补这方面的缺失，欧美发达国家的大学数学教材一般都补充了大量流程分析式的图像说明，因而其教材的厚度与内涵也远较国内的厚重. 有鉴于此，在高等数学课程的数学实验中，我们首先就函数计算与函数图形计算方面设计了一系列的数学实验，包括函数值计算实验、不同坐标系下2D函数的图形计算实验和3D 函数的图形计算实验等，实验中的函数模型较教材正文中的示例更复杂，但借助微信扫码功能可即时实现重复实验与修改实验. 其次，针对定积分、重积分与级数的教学内容设计了一系列求

和、多重求和、级数展开与逼近的数学实验. 此外，还根据相应教学内容的需求，设计了一系列数值计算实验、符号计算实验与数学建模实验. 这些数学实验有助于用户加深对高等数学中基本概念、定理与思想方法的理解，让他们通过对量变到质变过程的观察，更深刻地理解数学中近似与精确、量变与质变之间的辩证关系.

线性代数课程: 矩阵实质上就是一张长方形数表，它是研究线性变换、向量组线性相关性、线性方程组的解、二次型以及线性空间的不可替代的工具. 因此，在线性代数课程的数学实验设计中，首先就矩阵基于行 (列) 向量组的初等变换运算设计了一系列数学实验，其中矩阵的规模大多为 6~10 阶的，有助于帮助用户更好地理解矩阵与其行阶梯形、行最简形和标准形矩阵间的关系. 进而为矩阵的秩、向量组线性相关性、线性方程组及其应用、矩阵的特征值及其应用、二次型等教学内容分别设计了一系列相应的数学实验. 此外，还根据教学的需要设计了部分数值计算实验和符号计算实验，加强用户对线性代数核心内容的理解，拓展用户解决相关实际应用问题的能力.

概率论与数理统计课程：本课程是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其统计规律性的一门学科. 因此，在概率论与数理统计课程的数学实验中，我们首先设计了一系列服从均匀分布、正态分布、0−1 分布与二项分布的随机试验，让用户通过软件的仿真模拟试验更好地理解随机现象及其统计规律性. 其次，基于计算软件设计了常用统计分布表查表实验，包括泊松分布查表、标准正态分布函数查表、标准正态分布查表、t 分布查表、F 分布查表与卡方分布查表等. 再次，还设计了针对数组的排序、分组、直方图与经验分布图的一系列数学实验. 最后，针对经验数据的散点图与线性回归设计了一系列数学实验. 这些数学实验将会在帮助用户加深对概率论与数理统计课程核心内容的理解、拓展解决相关实际应用问题的能力上起到积极作用.

致用户

作者主编的“大学数学立体化教材”(第五版) 及 2017 年改版的每本教材，均包含了与相应教材配套的网络学习空间服务. 用户通过教材封面下方提供的网络学习空间的网址、账号和密码，即可登录相应的网络学习空间. 网络学习空间提供了远较纸质教材更为丰富的教学内容、教学动画以及教学内容间的交互链接，提供了教材中所有习题的解答过程. 在所有内容与习题页面的下方，均提供了用户间的在线交互讨论功能，作者主持的数苑团队也将在该网络学习空间中为你服务. 使用微信扫码功能扫描教材封面提供的二维码，绑定微信号，你即可通过扫描教材内容页面提供的二维码进行相关的数学实验.

在你进入高校后即将学习的所有大学课程中，就提高你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力的课程. 事实上，像微积分、线性代数、概率论与数理统计这些大学数学基础课程，

你无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将终生受益.

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间去主动学习、训练与实验，才能真正掌握所学知识.

致教师

使用本系列教材的教师，请登录数苑网“大学数学立体化教材”栏目：

http://www.sciyard.com/dxsx

作者主持的数苑团队在那里为你免费提供与本系列教材配套的教学课件系统及相关的备课资源，它们是作者团队十余年积累与提升的成果. 与本系列教材配套建设的信息化系统平台包括在线学习平台、试题库系统、在线考试及其预约管理系统等，感兴趣和有需要的用户可进一步通过数苑网的在线客服联系咨询.

正如美国《托马斯微积分》的作者G.B.Thomas 教授指出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源. 教材是死的，课程是活的. 课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程．而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方在教、学、考各方面提供充分的支持，帮助教师在教学过程中发挥其才华，帮助学生富有成效地学习.

作　者

2017 年 3 月28日

目　录

第 7 章 假设检验

第 8 章 方差分析与回归分析

附表 常用分布表

习题答案

第 1 章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象（随机现象）及其规律性的一门应用数学学科．20 世纪以来，它已广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域．本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一．

§1.1　随 机 事 件

一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**．

例如：(1) 一物体从高度为 h (米) 处垂直下落，则经过 t (秒) 后必然落到地面，且当高度 h 一定时，可由公式

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g=9.8\,(\text{米}/\text{秒}^2))$$

具体计算出该物体落到地面所需的时间 $t=\sqrt{2h/g}$ (秒).

(2) 异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥，等等．

另一类则是在一定条件下我们事先无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**．

例如：(1) 在相同的条件下抛掷同一枚硬币，我们无法事先预知将出现正面还是反面．

(2) 将来某日某种股票的价格是多少？等等.

从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用，但直到 20 世纪初，人们才认识到随机现象亦可以通过数量化方法进行研究．概率论就是以数量化方法研究随机现象及其规律性的一门数学学科．

二、随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知，初看似乎毫无规律．然而，人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性．人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**．概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一

门学科.

历史上，研究随机现象统计规律性最著名的试验是抛掷硬币的试验. 表 1–1–1 是历史上抛掷硬币试验的记录.

表 1–1–1　历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	抛掷次数 (n)	正面次数 (r_n)	正面频率 (r_n/n)
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

数学随机试验

*数学实验

实验 1.1　微信扫描右侧的二维码，可借助软件进行掷硬币仿真试验.

试验表明：虽然每次抛掷硬币事先无法准确预知将出现正面还是反面，但大量重复试验时，发现出现正面和反面的次数大致相等，即各占总试验次数的比例大致为0.5，并且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于 0.5. 这说明虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性，但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出，试验的结果是有规律可循的，这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

要对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行重复观察，我们把对随机现象的观察称为**试验**.

例如，观察某射手对固定目标所进行的射击；抛一枚硬币三次，观察出现正面的次数；记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等均为试验. 上述试验具有以下共同特征：

(1) 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

在概率论中，我们将具有上述三个特征的试验称为**随机试验**，记为 E.

三、样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的，但其所有可能结果是明确的，我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**，它们的全体称为**样本空间**，记为 S (或 Ω).

例如：(1) 在抛掷一枚硬币观察其出现正面或反面的试验中，有两个样本点：正面、反面. 样本空间为 $S=\{$正面, 反面$\}$. 若记 $\omega_1=$(正面), $\omega_2=$(反面)，则样本空间可记为

$$S=\{\omega_1, \omega_2\}.$$

(2) 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数，其样本点有可数无穷多个：i ($i=0, 1, 2, 3, \cdots$) 次，则样本空间可简记为

$$S=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

(3) 在一批灯泡中任意抽取一个，测试其寿命，其样本点也有无穷多个 (且不可数)：$t\,(0\le t<+\infty)$ 小时，则样本空间可简记为

$$S=\{t\,|\,0\le t<+\infty\}=[0, +\infty).$$

(4) 设随机试验为从装有三个白球 (记号为1, 2, 3) 与两个黑球 (记号为4, 5) 的袋中任取两球.

① 若观察取出的两个球的颜色，则样本点为ω_{00} (两个白球)，ω_{11} (两个黑球)，ω_{01} (一白一黑)，于是，样本空间为

$$S=\{\omega_{00}, \omega_{11}, \omega_{01}\}.$$

② 若观察取出的两球的号码，则样本点为ω_{ij} (取出第 i 号与第 j 号球，由于球的号码不相同，我们可以假设$i<j$)，$1\le i<j\le 5$. 于是，样本空间共有 $C_5^2=10$ 个样本点，样本空间为

$$S=\{\omega_{ij}\,|\,1\le i<j\le 5\}.$$

注：此例说明，对于同一个随机试验，试验的样本点与样本空间是根据要观察的内容来确定的.

四、随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的结果本身外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征. 在概率论中，把具有某一可观察特征的随机试验的结果称为**事件**. 事件可分为以下三类：

(1) **随机事件**：在试验中可能发生也可能不发生的事件. 随机事件通常用字母A, B, C 等表示.

例如，在抛掷一颗骰子的试验中，用 A 表示“点数为奇数”这一事件，则 A 是一个随机事件.

(2) **必然事件**：在每次试验中都必然发生的事件. 用字母 S (或 Ω) 表示.

例如，在上述试验中，“点数小于 7 ”是一个必然事件.

(3) **不可能事件**：在任何一次试验中都不可能发生的事件. 用空集符号$\varnothing$表示.

例如，在上述试验中，“点数为 8 ”是一个不可能事件.

显然，必然事件与不可能事件都是确定性事件，为讨论方便，今后将它们看作两个特殊的随机事件，并将随机事件简称为**事件**.

五、事件的集合表示

由定义，样本空间 S 是随机试验的所有可能结果 (样本点) 的集合，每一个样本点是该集合的一个元素. 一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果构

成的，所以一个事件是对应于 S 中具有相应特征的样本点所构成的集合，它是 S 的一个子集．于是，**任何一个事件都可以用 S 的某个子集来表示**．

我们说某事件 A 发生，即指属于该事件的某一个样本点在随机试验中出现．

例如：在抛掷骰子的试验中，样本空间为 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$．于是，

事件 A："点数为 5" 可表示为 $A=\{5\}$；

事件 B："点数小于 5" 可表示为 $B=\{1, 2, 3, 4\}$；

事件 C："点数为小于 5 的偶数" 可表示为 $C=\{2, 4\}$．

我们称仅含一个样本点的事件为**基本事件**；含有两个或两个以上样本点的事件为**复合事件**．显然，样本空间 S 作为一个事件是必然事件，空集 $\varnothing$ 作为一个事件是不可能事件．

六、事件的关系与运算

因为事件是样本空间的一个子集，故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理．下面给出这些关系与运算在概率论中的提法和含义．

(1) 若 $A \subset B$, 则称事件 B **包含**事件 A, 或事件 A **包含于**事件 B, 或 A 是 B 的子事件．其含义是：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生．显然，$\varnothing \subset A \subset S$．

(2) 若 $A=B$, 则称事件 A 与事件 B **相等**．其含义是：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，即 $A \subset B$，且 $B \subset A$．

(3) 事件 $A \cup B=\{\omega | \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和** (或**并**)．其含义是：当且仅当事件 A, B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生．$A \cup B$ 有时也记为 $A+B$．

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**和事件**，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**和事件**．

(4) 事件 $A \cap B=\{\omega | \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积** (或**交**)．其含义是：当且仅当事件 A, B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生．事件 $A \cap B$ 也记作 AB．

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**积事件**，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**积事件**．

(5) 事件 $A-B=\{\omega | \omega \in A$ 且 $\omega \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差**．其含义是：当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生．

例如，在抛掷骰子的试验中，记事件

$$A=\{\text{点数为奇数}\}, B=\{\text{点数小于5}\},$$

则

$$A \cup B=\{1,2,3,4,5\};\quad A \cap B=\{1,3\};\quad A-B=\{5\}.$$

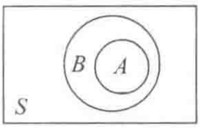
(6) 若 $A \cap B=\varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或称是**互斥**的．其含义是：事件 A 与事件 B 不能同时发生．

例如，基本事件是两两互不相容的．

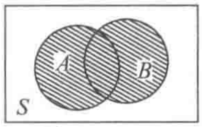
(7) 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**, 或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 其含义是：对每次试验而言, 事件 A, B 中有且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$. 于是, $\overline{A} = S - A$.

注: 两个互为对立的事件一定是互斥事件；反之，互斥事件不一定是对立事件. 而且, 互斥的概念适用于多个事件, 但是对立概念只适用于两个事件.

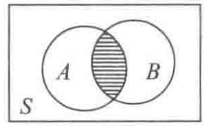
事件的关系与运算可用以下维恩图形象地表示.



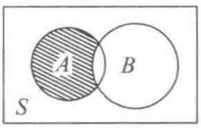
$A \subset B$



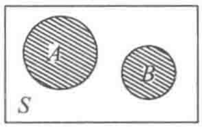
$A \cup B$ 或 $A + B$



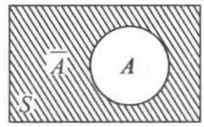
$A \cap B$ 或 AB



$A - B$



$A \cap B = \varnothing$



$\overline{A} = S - A$

注: 易见, 事件的运算满足如下基本关系:

① $A\overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = S$, $\overline{A} = S - A$;

② 若 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$, $AB = A$;

③ $A - B = A\overline{B} = A - AB$, $A \cup B = A \cup (B - A)$.

(8) 完备事件组

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是有限或可数个事件, 若其满足

① $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots$,

② $\bigcup\limits_i A_i = S$,

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一个**完备事件组**, 也称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是样本空间 S 的一个**划分**.

显然, $\overline{A}$ 与 A 构成一个完备事件组.

七、事件的运算规律

由集合的运算律, 易给出事件间的运算律. 设 A, B, C 为同一随机试验 E 中的事件, 则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) 自反律 $\overline{\overline{A}} = A$;

(5) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

注：上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

例 1　甲、乙、丙三人各射一次靶，记 A 为“甲中靶”，B 为“乙中靶”，C 为“丙中靶”，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1) “甲未中靶”：$\bar{A}$；

(2) “甲中靶而乙未中靶”：$A\bar{B}$；

(3) “三人中只有丙未中靶”：$AB\bar{C}$；

(4) “三人中恰好有一人中靶”：$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(5) “三人中至少有一人中靶”：$A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$；

(6) “三人中至少有一人未中靶”：$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

(7) “三人中恰有两人中靶”：$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$；

(8) “三人中至少有两人中靶”：$AB\cup AC\cup BC$；

(9) “三人均未中靶”：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；

(10) “三人中至多有一人中靶”：$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；

(11) “三人中至多有两人中靶”：$\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$. ■

注：用其他事件的运算来表示一个事件，方法往往不唯一，如上例中的 (6) 和 (11) 实际上是同一事件，读者应学会用不同方法表示同一事件，特别是在解决具体问题时，往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

例 2　设某人用篮球投篮三次，用 A_i 表示事件“第 i 次投中”$(i=1,2,3)$，试描述下列事件：

(1) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；　　(2) $\overline{A_1\cup A_2}$；　　(3) $A_1\cup A_2\cup A_3$.

解　根据事件的运算规律，知

(1) 三次投篮中至少有一次没有投中；

(2) 第一、二次都没有投中；

(3) 至少有一次投中. ■

习题 1-1

1. 试说明随机试验应具有的三个特点.

2. 将一枚均匀的硬币抛两次，事件 A, B, C 分别表示“第一次出现正面”“两次出现同一面”“至少有一次出现正面”. 试写出样本空间及事件 A, B, C 中的样本点.

3. 掷一颗骰子的试验，观察其出现的点数，事件 A 为“偶数点”，B 为“奇数点”，C 为“点数小于 5”，D 为“点数为小于 5 的偶数”. 讨论上述事件的关系.

4. 设某人向靶子射击三次，用 A_i 表示“第 i 次射击击中靶子”($i=1, 2, 3$), 试用语言描述下列事件：

(1) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$； (2) $\overline{A_1\cup A_2}$； (3) $(A_1A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2A_3)$.

5. 判断下列各式哪个成立，哪个不成立，并说明为什么.

(1) 若 $A\subset B$, 则 $\overline{B}\subset\overline{A}$； (2) $(A\cup B)-B=A$； (3) $A(B-C)=AB-AC$.

6. 两个事件互不相容与两个事件对立有何区别？举例说明.

7. 设 A, B 为两个事件，若 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$, 问 A 和 B 有什么关系？

8. 化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}$.

9. 证明: $(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}=A-B$.

§1.2 随机事件的概率

对于一个随机事件A, 在一次随机试验中，它是否会发生，事先并不能确定. 但我们会问：在一次试验中，事件 A 发生的可能性有多大？并希望找到一个合适的数来表征事件A在一次试验中发生的可能性大小. 为此，本节首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、频率及其性质

定义1 若在相同条件下进行 n 次试验，其中事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，则称 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

易见，频率具有下述基本性质：

(1) $0\le f_n(A)\le 1$； (2) $f_n(S)=1$；

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

根据上述定义，频率反映了一个随机事件在大量重复试验中发生的频繁程度. 例如，抛掷一枚均匀硬币时，在一次试验中虽然不能肯定是否会出现正面，但大量重复试验时，发现出现正面和反面的次数大致相等（见表 1–1–1), 即各占总试验次数的比例大致为0.5, 并且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于 0.5. 这似乎表明，频率的稳定值与事件发生的可能性大小（概率）之间有着内在的联系.

例1 圆周率 $\pi=3.141\,592\,6\cdots\cdots$ 是一个无限不循环小数，我国数学家祖冲之第一次把它计算到小数点后七位，这个纪录保持了1 000多年！以后不断有人把它算得更精确. 1873 年，英国学者沈克士公布了一个 π 的数值，该数值在小数点后一共有