Sommerfeld 理论物理学（第六卷）

Partielle Differentialgleichungen der Physik

物理学中的偏微分方程

I

〔德〕Arnold Sommerfeld/著
许天周　周旺民/译　范天佑/校

科学出版社

Sommerfeld 理论物理学

(第六卷)

物理学中的偏微分方程

Partielle Differentialgleichungen der Physik

〔德〕Arnold Sommerfeld 著

许天周 周旺民 译

范天佑 校

科 学 出 版 社

北 京

内容简介

这一卷是 Sommerfeld 理论物理学的第六卷，主要介绍物理学中的偏微分方程，内容包括：Fourier 级数和积分、偏微分方程概论、热传导的边值问题、柱问题与球问题、特征函数与特征值问题和与无线电有关的数学问题. 问题的提出具有坚实的物理基础，问题的解决在数学上犀利有力，推导详尽，而且物理意义鲜明，反映了 Arnold Sommerfeld 学派的理论物理与数学物理相结合的特点. 书中的若干结果是他本人和他的学生的独创性贡献. 这一卷不仅介绍物理学中的偏微分方程，而且为《Sommerfeld 理论物理学》其他卷和 Schroedinger 波动力学的数学问题的求解服务. 读者最好结合第 1-5 卷和他的另外一本书《波动力学》学习这一卷，著者在这一卷和其他卷中都处处指明它们之间的关联.

本书适合高等院校物理专业，力学专业和数学专业的本科生、研究生和大学教师作为教材，也可供相关专业教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的偏微分方程/(德) 阿诺德·索末菲 (Arnold Sommerfeld) 著；许天周，周旺民译. —北京：科学出版社，2019.3

(Sommerfeld 理论物理学. 第六卷)

书名原文：Partielle Differentialgleichungen der Physik

ISBN 978-7-03-060812-3

Ⅰ. ①物… Ⅱ. ①阿… ②许… ③周… Ⅲ. ①偏微分方程 Ⅳ. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 044913 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：彭珍珍

责任印制：吴兆东／封面设计：无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2019 年 3 月第一次印刷 印张：17 3/4

字数：340 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

Sommerfeld 及其成就

Arnold Sommerfeld (1868—1951)

Sommerfeld 是德国伟大的理论物理学家、应用数学家、流体力学家、教育家、原子物理与量子物理的创始人之一. 他对理论物理多个领域, 包括力学、光学、热力学、统计物理、原子物理、固体物理 (包括金属物理) 等有重大贡献, 在偏微分方程、数学物理等应用数学领域也有重要贡献. 他引进了第二量子数 (角量子数)、第四量子数 (自旋量子数) 和精细结构常数, 等等. 20 世纪最伟大的物理学家之一 Planck 在获得 1918 年度诺贝尔物理学奖的颁奖典礼的仪式上的演讲中指出: “Sommerfeld ··· 便可以得到一个重要公式, 这个公式能够解开氢与氦光谱的精细结构之谜, 而且现在最精确的测量 ······ 一般地也能通过这个公式来解释 ······ 这个成就完全可以和海王星的著名发现相媲美. 早在人类看到这颗行星之前 Leverrier 就计算出它的存在和轨道.”

Sommerfeld 思想深刻, 研究成果影响深远. 例如, 他去世后发展起来的数值广义相对论和新近崛起的引力波理论研究中, 还引用 “Sommerfeld 条件”, 该条件在求解中发挥了重要作用. 这再次彰显了他的科学工作的巨大价值.

Sommerfeld 非常重视教育, 他培养的博士生中有 Heisenberg, Debye, Pauli 和

Bethe 四人获诺贝尔物理学或化学奖, 博士后中有 Laue, Pauling 和 Rabi 三人获诺贝尔物理学或化学奖, 他的学生中还有数十位国际顶尖科学家, 如 Hopf, Meissner, Froehlich, Brillouin, Morse 等, 这在迄今所有作为研究生导师的科学工作者与教育工作者中是绝无仅有的. 这些学生中除了 Laue 的成就在晶体衍射, Hopf 等在流体力学, Morse 等在数学方法等领域之外, 绝大多数在量子物理与量子化学领域, 他被称为 "量子理论之父" 是当之无愧的. 当然其中有时代的条件, 他置身于经典物理向现代物理发展的关键时期. 20 世纪初, 德国是世界量子物理研究的中心, 而他所在的 Goettingen 大学和 Muenchen(Munich) 大学又是德国量子物理研究的中心, 他本人又居该中心的中心. 在年龄上, 他位于量子理论的开创者 Planck (1858—1947) 和集大成者 Schroedinger (1887—1961) 的中间, 承上启下. 这按中国话讲, 是 "时势造英雄". 除去客观条件外, 他本人的深邃的洞察力, 集数学物理和理论物理的才能于一身, 科学地组织讨论班, 发现人才, 提携后学, 等等, 也是他成功的原因之一. 1918 年起他担任德国物理学会主席, 1920 年创办和长期主持《德国物理学杂志》(*Zeitschrift fuer Physik*), 编委会决定任何一位有信誉的科学工作者的原始性研究论文, 不经审稿人审查就发表, 从稿件收到至发表最快仅两个星期, 这极大地推动了科学理论的发展, 其中包括使得 Heisenberg, Born 和 Jordan 等的矩阵量子力学的论文及时得以报道, 促进了量子力学在德国的发展. 他同时热诚地对奥地利青年科学家 Schroedinger 的波动量子力学给以崇高的评价, 热诚支持它的发展 (Schroedinger 的论文是由 Planck 主编的, 另一本德国物理杂志 ——《德国物理年鉴》(*Annalen der Physik*) 上得以及时报道的). 可见当时德国科学界伯乐不少, 办事公平和效率之高. 他本人当然是一位天才. Born 称赞他具有发现和发展天才的才能. Einstein 佩服他凝聚和造就了那么多青年天才. 他领导和大大推动了 1910—1930 年全世界原子结构与光谱学的研究, 这属于微观物理的领域. 同时在流体动力学等宏观领域也很有成就, 他指导 Hopf 与 Heisenberg 等在湍流方面的研究, 对后来的研究者, 包括取得很大成就的美籍中国科学家林家翘等都有重要影响, 等等. 按中国话说, 这又是 "英雄造时势".

Sommerfeld 一生的著述丰富, 其中之一是由他的讲课手稿整理的理论物理教程 (*Vorlesungen ueber theoretische Physik*), 共六卷, 包括: 第一卷力学 (*Mechanik*), 第二卷变形介质力学 (*Mechanik der Deformierbaren Medien*), 第三卷电动力学 (*Elektrodynamik*), 第四卷光学 (*Optik*), 第五卷热力学与统计学 (*Thermodynamik und Statistik*), 第六卷物理学中的偏微分方程 (*Partielle Differentialgleichungen der Physik*). 迄今各国先后出版了各种理论物理教程, 那些著者都是有成就的科学家. 像 Sommerfeld 这样对教程所涉及的各个领域都有重要贡献的著者, 还不多见. 另外, 在所有理论物理的教程中含有内容极其丰富的《光学》单独一卷,《物理学中的偏微分方程》单独一卷的, 这是唯一的一套, 因为 Sommerfeld 本人在这两个领域都有重要

贡献, 这又构成此教程的特点之一. 这套书既是教程, 又是科学专著, 包含他本人, 他的学生, 例如 Debye 对固体比热, Heisenberg 对湍流的原创性的贡献的详细讨论的珍贵资料, 等等, 它对物理学、物理学教学和物理学史都有重要意义. 这一教程早就译成英文、法文、俄文和日文等其他文种出版, 遗憾的是, 迄今尚未见中文译本. 其实, 前辈学者早就酝酿过翻译成中文工作, 由于当时条件的局限, 迟迟未能实现. 现在的译本可以说是为圆他们的梦而作的一点努力, 但是未必做得好. 不过该教程不包括量子力学. 为了弥补这一缺憾, 此套译本之外补充一卷 Sommerfeld 1929 年出版的《波动力学》(德文原名*Atombau und Spektrallinien, Wellenmechanischer Ergänzungband*—— 原子结构与光谱, 波动力学补编) 的译本, 当然不作为他的这套教程中的一本 (顺便指出, 他的《原子结构与光谱》, 共 1555 页, 是另一套伟大的科学巨著). 通过读这博大精深的七本书, 我们可以看到, Sommerfeld 对理论物理的各个领域, 从宏观力学到量子力学, 从物理到数学都有创造性贡献, 这在所有目前已经出版的各种理论物理教程的著者中可能是绝无仅有的.

习近平主席 2016 年在全国高等学校思想政治工作会议上指出, 只有培养出世界一流人才的高校, 才能够成为世界一流大学. 培养优秀人才, 需要优秀教材和优秀科学专著. Sommerfeld 这套培养出 7 位诺贝尔物理奖或化学奖的理论物理教程, 会提供我们借鉴和学习的一个良好材料.

这套书能译成中文, 应该感谢德国已故物理学家 Prof. H. G. Hahn (他属于 Sommerfeld 最后一波的学生) 多年前的建议, 当时他得知 Sommerfeld 的《理论物理学》尚无中文译本, 建议今后能出中文译本, 认为它会有益于中国青年学者和学生. 也感谢德国 Stuttgart 大学理论物理研究所前所长 Prof. H-R Trebin, 他从德国寄来这套书的德文版的第四卷和第五卷, 帮助了翻译和校对工作.

最后简单介绍一下原著和翻译的情况. 原书写于 1942 年, 是第二次世界大战最激烈的时期, 结束于 1951 年. Sommerfeld 不幸死于车祸, 第五卷尚未完稿, 后来由他的学生继续完成. 当时情况困难, 写出一卷, 就出版一卷, 出版社很分散. 第二次世界大战之后, 德国分裂为德意志民主共和国 (东德) 和德意志联邦共和国 (西德), 它们分别出版 Sommerfeld 的理论物理学, 出版社更加分散, 书一版再版. 其间, 他的学生们对一些卷的内容作了增补和修订, 其中第二卷增补最大, 增加了一章 (第九章)—— 塑性与位错. 它从物理学观点分析位错, 并且把晶体变形与宇宙时间 - 空间弯曲做了类比, 也就是和 Einstein 广义相对论做了类比, 这一思想很新颖. 包括这一章的习题和习题解答以及四个附录在内, 超过 80 页, 相当于原书的四分之一的篇幅. 第三卷增补了广义相对论和引力波的内容, 等等. 1991 年两德统一前后, 由 Harri Deutsch 出版社统一出版, 现在我们采用的作为最终校对的就是这一版本.

该书首卷 1943 年出版后, 美国首先出版了英文译本, 其中许多译者是过去在

德国留学的 Sommerfeld 的学生, 翻译得很出色, 这些英文译本成为我们现在翻译的有力的资料. 鉴于这些英文译本出版时间比较早, 而且还存在许多错误, 甚至有的德文词句未能翻译, 德文版后来的增补和修订版的内容在英文翻译版中没有, 只能按照德文版翻译. 现在的中文翻译稿是按照德文原版和英文版翻译的结果, 因为我们德文水平的局限, 也只能这么做. 做的不好之处, 请读者多多批评指正.

此书中文译本的出版, 得到北京理工大学物理学院、爆炸科学与技术国家重点实验室和教务处以及某些译者个人的资助.

总　序

因受到以前学生的鼓励和出版社的多次邀请, 我决定出版一本关于理论物理学课程的书, 这也是我在 Muenchen 大学教授了长达三十二载的课程.

该课程属于基础课程, 听课的学生有的来自 Muenchen 大学和理工学院物理专业, 有的来自数学和物理学专业, 也有的来自天文学和物理化学专业, 他们大部分都是大三、大四的学生. 该课程每周四次课, 并辅以两小时的答疑时间. 本书并未涉及现代物理学的专业课程. 专业课程的讨论主要集中在我的论文和其他专著中. 虽然在研究背景和文献综述中有提及量子力学, 但这些课程的核心依然是经典物理学.

课程顺序安排如下:

1. 力学
2. 变形介质力学
3. 电动力学
4. 光学
5. 热力学和统计学
6. 物理学中的偏微分方程

力学课程由我和另一位数学专业的同事轮流讲授. 流体动力学、电动力学和热力学则由较为年轻的老师讲授. 矢量分析会在单独的课程中讲授, 本系列课程将不会涉及.

本书将会基本沿用我上课的风格, 我不会拘泥于数学论证, 而是将主要精力用来解决物理问题. 我希望通过适当的数学和物理学角度, 为读者展现物理学的生动性和趣味性. 因此, 若本书在系统论证和公理结构部分留有空白, 我也不会过于苛求. 我不希望读者被冗长繁琐的数学论证和错综复杂的逻辑推理所吓倒, 进而分散了物理学本身的趣味性. 这种风格在课堂教学中颇有成效, 故而被运用到本书的撰写中. Planck 的课程在理论框架部分是无可挑剔的, 但我相信我可以提出更广泛的题材并能更灵活地使用数学方法解决问题. 此外, 我很乐意更全面更彻底地向读者介绍 Planck 的理论知识, 尤其是热力学和统计学.

各卷末收集的问题是对正文的补充. 这些问题是学生的课下作业, 并在课堂答疑环节进行了讨论. 基础的数学问题并未收录在书末的附录内. 问题按章节进行了排序. 每个小节、每个方程都有编号. 因此, 通过给出小节和方程的编号, 便可找到每卷内引用的方程. 为了便于查询和翻阅, 每个页面左上角都标有章节号.

回顾多年的教学生涯, 我由衷感谢伦琴和菲利克斯 • 克莱因. 伦琴不仅为我的学术活动创造了外部条件, 让我得以享受优厚待遇, 并且多年陪伴在我左右, 致力于拓宽我的研究范围. 在我职业生涯早期, 菲利克斯 • 克莱因向我传授了最适合于教学的实践方法; 他深谙教学之道, 对我的教学方式产生了强烈而又潜移默化的影响. 值得一提的是, 当我在 Goettingen 大学任指导教授时, 我的课程虽不如现在的六卷那么全面, 但是却在听众中引起了很大的共鸣. 后期, 当我重新讲授这门课程时, 我的学生经常向我反馈, 他们只有在这里才真正掌握了数学结果的处理和应用, 例如傅里叶方法、函数理论的应用和边界值问题.

最后, 由衷希望这本书能激发读者对物理学的兴趣, 同时, 也希望本书带给读者的是身临其境的听课体验.

Arnold Sommerfeld

Muenchen, 1942 年 9 月

第六卷序

按计划, 我在 Muenchen 大学的六个系列讲座的最后一个主题是物理学中的偏微分方程. 事实上, 我们并不论述数学物理, 而是论述物理数学; 我们不论述物理事实的数学表示, 而是论述数学方法的物理动机. 什么是数学上的兴趣, 什么在物理上是重要的, 经常提到的这种"预稳和谐"会在每一阶段遇到, 并且优美地——应该是抽象地——吸引着我们的主题.

要处理的问题主要属于经典的数学文献, 它们与 Laplace, Fourier, Green, Gauss, Riemann 和 William-Thomson 联系在一起. 为了说明这些方法对处理实际问题是充分的, 我们在第 6 章详细地讨论无线电波的传播.

第 5 章涉及特征函数的一般方法. 这种方法最诱人的应用领域是波动力学, 在这里, 借助一些特选的特别简单的例子来展示这些应用. 特征函数的存在性及其性质严格的数学基础需要关于积分方程的定理, 这里我们不讨论; 提到的积分方程仅偶尔作为微分方程相关定理的副本.

第 4 章讨论 Bessel 函数与球面调和函数, 尽管尽可能简洁地建立这些函数, 但这一章还是较长. 为简洁起见, 我们放弃了存在性的某些证明, 就像我们在其他章节所做的那样. 用专门一节介绍优美的半径倒数方法, 遗憾的是, 这种方法除了势问题, 并不能用于其他问题.

第 3 章专门讨论热传导的经典问题. 除 Fourier 方法外, 对具有平面边界的区域, 我们详细建立了反演的直观方法.

第 2 章涉及不同类型的微分方程及其边值问题; 以相当的普遍性引入了 Green 定理和 Green 函数.

第 1 章的 Fourier 级数和积分完全基于最小二乘法. 如果后者补充了一个要求, 我们称之为"终结条件", 那么不仅在三角函数情况, 而且对球面调和函数和广义特征函数, 我们能以完整且普遍的方式替代早期发展的较为正规的计算.

从这个概述可以看出, 本书的安排不是由系统性来决定的, 而是由教学性决定的. 第 1 章试图以适当的方法介绍 Fourier 展开和类似 Fourier 式的展开. 我们仅在第 2 章开始从偏微分方程引入一些概念, 这些概念对数学物理学家来说非常重要. 从系统性观点来看, 第 3 章内容从属于第 5 章的一般方法, 但是, 由于历史和教学的原因, 这里先于第 5 章介绍. 第 4 章的长度可以通过简述教科书中 Bessel 函数和球面调和函数的大部分内容加以调整, 以备应用. 由于对这两类函数教学的原因, 我们通过典型的应用例子中断了正规的数学部分.

显然在一个短的夏季学期不可能完全介绍这些内容. 事实上几个在数学上更复杂的章节在印刷时已添加, 其中某些以附录的形式出现. 在这方面我们要提的是第 5 章的附录II, 它是在完成了手稿其余部分后添加的, 这部分内容对于涉及短波与长波之间的间歇性范围, 即从几何光学到波动光学的通道问题很可能具有根本的重要性.

在准备这份手稿的过程中, 我参考了 R. Schlatterer 1935 年的讲义, 以及 J. Meixner 教授早期的讲义. 我的朋友 F. Sauter 认真地阅读了全部手稿, 并且一直非常慷慨地在许多方面给出了他自己的改进版本. 在此我无法用言语表达对他的感激. 我的同事 J. Lense 从数学观点审阅了手稿. F. Renner 博士合著了最后一章; H. Schmidt 对内容的安排向我提出了建议.

Arnold Sommerfeld

目　　录

第 1 章 Fourier 级数和积分

Fourier 所著《热的分析理论》是数学物理学家的一本权威书①. 它不仅阐述了后来的三角级数和积分, 而且以典范的方式处理了典型热传导情况的一般边值问题.

在关于 Fourier 级数的数学教程里, 通常强调的是任意函数的连续性与奇异性 (最大值与最小值的无限聚点) 概念. 这种观点在物理学应用中无关要紧. 因为这里考虑的函数的初值与边值问题, 部分由于物质及其相互作用的原子本质, 必须当作光滑平均值, 就像偏微分方程起因于许多很复杂的基本规律的统计平均. 因此, 我们关心的是相对简单的理想函数及其具有最小可能误差的近似. 后者所指的已被 Gauss 在他的《最小二乘法》一书中解释. 我们将会看到, 它不仅对 Fourier 级数, 而且对球面调和函数与柱面调和函数, 或者更一般的特征函数中的数学物理其他级数展开展示了简单且严格的方法.

§1. Fourier 级数

设在区间 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 内给定一个任意函数 $f(x)$, 即这个函数可能是一个观察的曲线, 它由充分多与充分精确的测量确定. 我们用 $2n+1$ 项三角级数的和来逼近它

$$
\begin{aligned}
S_n(x) =& A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \cdots + A_n\cos nx \\
&+ B_1\sin x + B_2\sin 2x + \cdots + B_n\sin nx.
\end{aligned} \tag{1}
$$

在处理上, 我们采用什么判据来选择系数 A_k, B_k 呢?

我们用 $\varepsilon_n(x)$ 表示误差项 $f(x) - S_n(x)$, 那么

$$
f(x) = S_n(x) + \varepsilon_n(x). \tag{2}
$$

仿照 Gauss, 我们考虑均方误差

$$
M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varepsilon_n^2 \mathrm{d}x \tag{3}
$$

① Jean Baptiste Fourier, 1768—1830. 他关于热传导的书 1822 年在巴黎出版. Fourier 是著名的代数学家和工程师, 是《埃及史》作者.

下面的引证说明了他的著作在法国以外的影响: “Fourier 的激励点燃了 W. Thomson 以及 F. Neumann 时代的火花 (他那时 16 岁). ” 参考 F. Klein, Voelesungen ueber die Geschite der Mathematik in 19. Jahrhundert Bd. I.

并且通过选择 A_k, B_k, 使得 M 最小.

为了这个目的, 我们进一步注意, 用 ε_n 的一次幂作为相应的总误差度量是不合适的, 因为任意大的正误差与负误差可能互相抵消, 不会计入总误差. 另一方面, 因为非解析特性, 在积分号下用绝对值 $|\varepsilon_n|$ 代替 ε_n^2 也不方便①.

要求式 (3) 最小, 将导致方程

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial M}{\partial A_k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\{f(x)-S_n(x)\}\cos kx\mathrm{d}x = 0, \quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n, \\ -\dfrac{\partial M}{\partial B_k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\{f(x)-S_n(x)\}\sin kx\mathrm{d}x = 0, \quad k=1,\ 2,\cdots,\ n. \end{cases} \tag{4}$$

这些正好是确定 $2n+1$ 个未知量 A_k, B_k 的 $2n+1$ 个方程. 这里令人满意的特征是每一个系数 A_k, B_k 可直接确定, 而不是以递归的方式与其他 A_k, B_k 联系在一起. 这应该归功于三角函数之间的正交关系②:

$$\int \cos kx\ \sin lx\ \mathrm{d}x = 0, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int \cos kx\ \cos lx\ \mathrm{d}x \quad (5\mathrm{a}) \\ &\int \sin kx\ \sin lx\ \mathrm{d}x \quad (5\mathrm{b}) \end{aligned}\right\} = 0, \quad k \neq l.$$

为了证明它们, 不必写下繁琐的三角函数加法公式, 而只需考虑它们与指数函数 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}$ 和 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}lx}$ 的联系. 式 (5a, b) 中的被积函数仅有四种形式 $\exp\{\pm\mathrm{i}(k+l)x\}$ 或 $\exp\{\pm\mathrm{i}(k-l)x\}$, 除 $l=k$ 外, 它们的积分全部是零, 这就证明了式 (5a, b). 即使没有这种限制, 式 (5) 也是成立的, 因为对 $l=k$, 它可以归结为

$$\frac{1}{4\mathrm{i}}\int(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx})\,\mathrm{d}x = 0.$$

以类似的方法可以得到当 $l=k>0$ 时式 (5a, b) 的值 (仅 $\exp(\mathrm{i}kx)$ 与 $\exp(-\mathrm{i}kx)$ 的乘积对它有贡献): 该值简单地等于 π; 对于 $l=k=0$, 式 (5a) 中的积分值显然

① 伟大的俄罗斯数学家 Tchebycheff 在其后称之为逼近论的理论里采用了一种完全不同的方法. 他考虑的不是平均值, 而是积分区间内的最大值 $|\varepsilon_n|$, 在他的处理中, 通过选择系数使得它最小.

② 这里及下面, 所有积分的区间是由 $-\pi$ 到 $+\pi$. 为了验证正交性, 我们回顾两个矢量 u, v 在欧几里得三维空间或 n 维空间是正交的条件, 它们的标量积为零

$$(u\ v) = \sum_1^n u_i v_i = 0$$

式 (5) 中的积分可认为是无穷多项这种相同类型项的和. 参见称之为 “Hilbert 空间” 中的内容.