郑华盛 编著

高等数学一题多解300例

- 一题多解，最多9种解题方法开拓思维
- 例题经典，典例巧妙，解法多样新颖
- 类题举一反三，拓展思路、激发兴趣
- 大学数学竞赛、考研数学进阶好帮手

科学出版社

高等数学一题多解300例

郑华盛　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要介绍高等数学中300道经典习题的一题多解，这是作者在30多年教学过程中的积累和总结. 书中的习题及其解法部分选自高等数学及数学分析类参考文献、国内外大学数学竞赛试题和研究生入学考试试题及其解答，部分源于作者多年的教学研究成果，其中有不少是作者编制的新题和给出的新颖解法，解法丰富多彩. 每道习题均包括典型例题、特别提示及类题训练三个环节，供读者拓展解题思路、思考和练习之用，以加深对相关解题方法的理解和运用. 全书例题与同类训练题总和达1500多道. 习题的典型性与广泛性、解法的多样性与新颖性、解法的普适性与拓展性、类题的针对性及习题的海量性是本书的主要特色.

本书可作为高等数学及数学分析的教学参考书，供理工、经管类等专业大学生，参加大学数学竞赛及研究生入学考试的大学生参考，也可供大学数学教师及数学工作者教学与教学研究参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学一题多解300例／郑华盛编著. —北京：科学出版社，2019.5
ISBN 978-7-03-061074-4

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①郑…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-题解　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第075016号

责任编辑：张中兴　梁　清／责任校对：杨聪敏
责任印制：张　伟／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2019年5月第　一　版　开本：720 × 1000　B5
2019年5月第一次印刷　印张：38 1/4
字数：774 000

定价：89.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

在高等数学和数学分析课程学习过程中，解题是一项非常重要的活动. 美国著名数学家和数学教育家 G. 波利亚指出:“解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋，因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动.”众所周知，一道好的典型数学习题往往比那些精心准备的课堂讲授更易于启发学生的思维. 解题训练使学生掌握和巩固所学知识. 在解题过程中，如果能多思考一题多解，那么解题就会成为一项有趣且富有挑战性的工作，对培养学生的发散思维与创新思维，提高他们的创新能力具有重要的促进作用.

本书给出高等数学中 300 道经典与重点类型习题的一题多解，使读者从多个角度审视和解决问题，一方面熟悉多个知识点，达到融会贯通，提高灵活运用知识的能力；另一方面能拓宽视野和解题思路，培养和提高创新思维及创新能力，使其触类旁通. 对于培养数学兴趣和数学审美情趣也有很好的促进作用.

本书内容主要涉及微积分学、向量代数与空间解析几何、常微分方程和级数，只有个别习题解法中涉及少量的数值分析、线性代数和概率论知识. 依据高等数学的教学内容顺序，本书主要包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、向量代数与空间解析几何、微分方程和级数等八章内容，每个章节又分为两个部分: 第一部分是章节对应的经典习题选编，以方便读者练习和查找之用，虽然并非每道习题都是难题，但其解题方法新颖、富有启发性，习题的难度基本上是先易后难，并考虑题型的分类与关联；第二部分是对所选编经典习题的一题多解，对所选的每一个习题均依序分别给出了典型例题、特别提示和类题训练等三个环节. 典型例题部分给出了每道习题的多种解法，其中部分解法选自参考文献，部分解法是作者自己完成的；特别提示是作者对该习题或解法的一般性推广，或对需要注意的问题及解法中所用结论等给出提示和补充说明；类题训练中所列的习题都是可以用该题的一种或多种解法类似求解的习题，可供读者测试与练习之用. 之所以这样安排，是希望读者针对每个章节第一部分精选的经典习题，坚持先自己做，并认真思考是否可以给出一题多解，然后再看第二部分给出的习题的多种经典解法，深刻理解并掌握其解题方法与技巧，启发和拓展自己的解题思路，并认真体会特别提示中的相关内容；最后

再借鉴一种或多种方法类似地求解类题训练中的习题.

若能如此阅读本书, 将一定会使读者的解题能力得到较大的提升、解题思路与方法得到丰富和拓展, 同时享受解题带来的乐趣. 这也是作者写本书的初衷, 希望能与读者分享本书中的一题多解.

本书具有以下几个特点.

(1) 习题的典型性与广泛性. 习题及其解法部分选自一些高等数学及数学分析类参考书、国内外大学数学竞赛试题及历年研究生入学考试题, 部分来源于作者多年的教学研究成果, 其中有不少是作者自己给出的解法和编制的新题.

(2) 解法的多样性与新颖性. 除了应用高等数学的知识解题, 还有少量习题利用线性代数、概率论及数值分析等知识求解, 解法丰富多彩. 所选习题都具有代表性, 且每道习题都给出了多种解法, 除个别习题只给出两种解法外, 一般都给出三种及以上解法, 有的多达九种解法, 其解题方法基本上能涵盖主要的解题方法.

(3) 解法的普适性与拓展性. 一些习题虽然是特定问题, 但在特别提示中, 给出了它们的一般性结论及推广, 使其适用于一类问题的求解. 这种对问题的一般化推广与拓展, 对于培养创新思维、激发研究问题的兴趣具有很好的促进作用.

(4) 类题的针对性. 每道习题都包含典型例题的经典解法、特别提示及类题训练等三个环节. 类题训练主要供读者练习之用, 类题的解法具有很强的针对性, 可由经典习题的一种或多种解法类似地求解, 使读者不至于无从下手. 通过能否正确解答, 检验是否掌握了该习题的解法.

(5) 习题的海量性. 虽然只是给出300道习题的多种解法, 但每道例题的类题训练部分又含有多个习题, 所以本书实际上给出了1500多道习题的解法.

本书的内容是作者从事高等数学课程30多年教学实践的积累, 凝聚了作者大量的心血, 其中有不少习题和解法是作者编制和给出的, 源于作者的教学研究成果及教学体会, 一些解法很新颖且富有创意, 希望能与读者分享, 并享受解题带来的乐趣. 作者主讲考研数学辅导班和大学数学竞赛培训课, 所指导的大学生参加全国大学生数学竞赛决赛曾获国家二、三等奖, 对高等数学解题方法有一定的研究且一直致力于高等数学一题多解的研究与收集, 编写此书是作者的夙愿. 为此, 作者一方面积极开展关于高等数学等课程的教学及教学研究工作, 特别关注一题多解; 另一方面一直注意一题多解习题及其解法的收集, 购买并参阅了一些相关的数学类书籍, 查阅了大量的文献资料, 花费了大量的时间和精力. 本书成稿经历了漫长的收集、整理、修改、补充等过程, 编著过程中参考了书后所列的参考资料. 在此, 对所有参考资料的作者表示衷心的感谢.

本书在出版过程中，得到了科学出版社张中兴编辑和梁清编辑的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！本书的出版得到了国家自然科学基金(项目编号: 11261040)及高等学校大学数学教学研究与发展中心项目(项目编号: CMC20160413)的经费支持，得到了袁达明副教授和南昌航空大学科技处的大力支持，也得到了南昌航空大学王如海教授的热情鼓励，在此一并致谢!

囿于作者水平和时间，书中难免会出现疏漏之处，恳请读者批评指正.

郑华盛

于南昌航空大学前湖校区

2018 年 10 月 8 日

目　　录

第1章 极限与连续

一、经典习题选编

1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0\in(a,b)$ 处可导，且 $a<\alpha_n<x_0<\beta_n<b(n\in\mathbf{N})$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$.

3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. (2018 年河北省大学生数学竞赛(非数学类)试题)

5 设 $x_n=\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$. (2010 年首届全国大学生数学竞赛决赛(非数学类)试题)

6 设 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi$，证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\cdot\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$. (2010 年首届全国大学生数学竞赛决赛(非数学类)试题)

8 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}$. (2003 年浙江省大学生高等数学竞赛题)

9 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\right)^{\frac{1}{n}}$，其中 $a_i>0,i=1,2,\cdots,m$.

10 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n=\dfrac{11\cdot12\cdot13\cdots(n+10)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)},n=1,2,\cdots$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

11 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_0=1,x_{n+1}=\sqrt{2x_n},n=0,1,2,\cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限值.

12 已知 $x_1=\sqrt{6},x_n=\sqrt{6+x_{n-1}},n=2,3,\cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 有极限，并求其值.

13 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}, n=1,2,\cdots$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求其极限值. (2002年硕士研究生入学考试数学(二)试题)

14 设$0<c<1, x_1=\dfrac{c}{2}$，且$x_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}, n=1,2,\cdots$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限值.

15 设$a>0, x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right), n=0,1,2,\cdots$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限值.

16 设$a>0, x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{x_n\left(x_n^2+3a\right)}{3x_n^2+a}, n=0,1,2,\cdots$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限值. (1975年苏联大学生数学竞赛题)

17 设数列$\{x_n\}$满足$x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{C(1+x_n)}{C+x_n}, n=1,2,\cdots$，$C>1$为常数，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

18 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$，$n=1,2,\cdots$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

19 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=2$，$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，$n=1,2,\cdots$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. (1975年苏联大学生数学竞赛题)

20 已知$x_0=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4}$，$n=0,1,2,\cdots$，证明(1)数列$\{x_n\}$收敛；(2)$\{x_n\}$的极限值$a$是方程$x^4+4x-1=0$的唯一正根.

21 设数列$\{x_n\}$满足$(2-x_n)\cdot x_{n+1}=1, n=1,2,\cdots$，证明对于任意初值$x_1$，数列$\{x_n\}$皆收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. (第七届美国大学生数学竞赛题)

22 设数列$\{x_n\}$满足：$x_0=a, x_1=b, x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}, n=1,2,3,\cdots$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

23 设$k>0, l>0, a_1, a_2$为已知常数，$a_1^2+a_2^2\neq 0$，数列$\{a_n\}$由关系式$a_{n+1}=k\,a_n+l\,a_{n-1}$给出，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

24 设$\{a_n\},\{b_n\}$均为正整数数列，且满足$a_1=b_1=1$, $a_n+\sqrt{3}\,b_n=$

$\left(a_{n-1}+\sqrt{3}b_{n-1}\right)^2$，证明数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$的极限存在，并求该极限值.

25　设数列$\{p_n\},\{q_n\}$满足$p_{n+1}=p_n+2q_n, q_{n+1}=p_n+q_n, p_1=q_1=1$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}$.

26　已知$a_1=\alpha, b_1=\beta\,(\alpha>\beta), a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+b_n}{2}, n=1,2,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在且相等，并求出极限值.

27　设$a_1^{(0)},a_2^{(0)},a_3^{(0)}$为三角形各边的长，令$a_1^{(k)}=\dfrac{1}{2}\left(a_2^{(k-1)}+a_3^{(k-1)}\right)$，$a_2^{(k)}=\dfrac{1}{2}\left(a_1^{(k-1)}+a_3^{(k-1)}\right)$，$a_3^{(k)}=\dfrac{1}{2}\left(a_1^{(k-1)}+a_2^{(k-1)}\right)$，证明$\lim\limits_{k\to\infty}a_i^{(k)}=\dfrac{a_1^{(0)}+a_2^{(0)}+a_3^{(0)}}{3}, i=1,2,3$.
(1976 年苏联大学生数学竞赛题)

28　设$a_0>0, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}, n=0,1,2,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

29　设$0<x_1<1, x_{n+1}=x_n\cdot(1-x_n), n=1,2,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

30　设$a_0=0, a_1=1$，且$a_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}(na_{n+1}+a_n), n=0,1,2,\cdots$，求(1) a_n的表达式; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

31　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\cdot\left(\arctan\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

32　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[n]{n!}$.

33　计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t$.

34　设$x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}, n=1,2,\cdots$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

35　计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

36　设$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^+$，证明数列$\{x_n\}$发散.

37　设函数$f(x)$在$x=0$的某个邻域内有连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=2$，求$f(0)$及$f'(0)$.

38 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.(2000年硕士研究生入学考试数学(二)试题)

39 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

40 确定常数 a，b，使 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b\right)=0$.

41 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\left(ax+bx^2\right)}{x^2}=2$，求常数 a，b .

42 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有一阶连续导数, 且 $f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.(2002年硕士研究生入学考试数学(一)试题)

43 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

44 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.(2011年第二届全国大学生数学竞赛(非数学类)决赛试题)

45 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a,b,c>0$.

46 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

47 设 a，$b>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}$.

48 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足 $\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$.(2002年硕士研究生入学考试数学(二)试题)

49 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

50 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

51 设 $m,n\in\mathbf{N}^+$(正整数集), 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{x^m-1}-\dfrac{n}{x^n-1}\right)$.

52 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{2-\cos x}-1-\dfrac{x^2}{6}}{x^4}$.

53 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^x-\cos\dfrac{x}{2}}{\left(\sin x-\sin\dfrac{x}{2}\right)\cdot\ln(1+x)}$.

54 设函数 $f(x)$ 有一阶连续导数, 且 $f(0)=f'(0)=1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

55 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)\neq0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$. (2005 年硕士研究生入学考试数学(二)试题)

56 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0, f(1)=1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)=-\dfrac{1}{2}$. (2016 年第八届全国大学生数学竞赛预赛(非数学类)试题)

57 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_0^1\dfrac{h}{h^2+x^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}f(0)$.

58 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\left[\dfrac{2n}{k}\right]-2\left[\dfrac{n}{k}\right]\right)$, 其中 $[x]$ 表示 x 的最大整数部分. (1976 年美国 Putnam 数学竞赛题)

59 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $a<c<d<b$, 证明至少存在一个 $\xi\in(a,b)$, 使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$, 其中 p,q 为任意正常数.

60 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$.

61 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $f[f(x)]=x$, 证明至少存在一个 $\xi\in\mathbf{R}$, 使 $f(\xi)=\xi$. (2018 年河北省大学生数学竞赛(非数学类)试题)

62 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=f(1)$, 证明对于任意自然数 n, 存在

$\xi\in[0,1)$，使得 $f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)=f(\xi)$.

63 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对于任意 $x\in[a,b]$，存在相应的 $y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$.

二、一题多解

典型例题

1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【证法 1】 不妨设 $\lambda_n=\sqrt[n]{n}-1$，则 $\lambda_n\geqslant 0$，且

$$n=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n\geqslant 1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2,$$

于是当 $n>1$ 时，有 $0\leqslant\lambda_n^2\leqslant\dfrac{2}{n}$，即得 $0\leqslant\sqrt[n]{n}-1\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n}}$. 故 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【证法 2】 当 $n\geqslant 2$ 时，由

$$n=1+(n-1)=1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n}=1+C_n^2\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2<\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n,$$

得 $1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}$，于是由夹逼准则，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【证法 3】 令 $\sqrt[n]{\sqrt{n}}-1=x_n$，则 $x_n>0\,(n>1)$，且 $\sqrt{n}=(1+x_n)^n>nx_n$，于是 $0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，从而由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\sqrt{n}}\right)^2=\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^2=1.$$

【证法 4】 利用 Heine 定理及 L'Hospital 法则，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1.$$

【证法 5】 已知算术-几何-调和平均值不等式：设 $a_i>0\,(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

因为n可看作两个$\sqrt{n}$与$n-2$个1的乘积，所以由上述不等式有

$$\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{n}}+n-2}\leqslant\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{n-2个}}\leqslant\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}}+n-2}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)=1$，故由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【证法 6】　记$x_n=n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$．于是由已知结论

“设$x_n>0\,(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.”

即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1.$$

【证法 7】　记$x_n=\sqrt[n]{n}$，则$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n(n+1)]{\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\dfrac{1}{n}}$.

而由已知$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$，所以当$n\geqslant3$时，有$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant n$，于是$x_{n+1}\leqslant x_n$，即当$n\geqslant3$时，数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$严格单调减少．又$\sqrt[n]{n}\geqslant1$，从而由单调有界原理知，数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限存在.

不妨记$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=a$，则$a\geqslant1$，且由$x_{2n}=\sqrt[2n]{2n}=\sqrt[n]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x_n}$，两边取极限，得$a=1\cdot\sqrt{a}$，解得$a=0$或$a=1$．而$a\geqslant1$，故$a=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

特别提示　该结论可当作重要极限使用.

类题训练

1. 设$a>0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$，其中$a>0$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$，其中 $a>1$，k 为正整数； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

3. 已知 $a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

典型例题

2 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0\in(a,b)$ 处可导，且 $a<\alpha_n<x_0<\beta_n<b\,(n\in\mathbf{N})$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$.

【证法 1】 记 $\lambda_n=\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}$，则 $0<\lambda_n<1$，$0<1-\lambda_n<1$，且有

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}&=\frac{f(\beta_n)-f(x_0)+f(x_0)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\\&=\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}\cdot\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}+\frac{f(x_0)-f(\alpha_n)}{x_0-\alpha_n}\cdot\frac{x_0-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}\\&=\lambda_n\cdot\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}+(1-\lambda_n)\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\min\left\{\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0},\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}\right\}&\leqslant\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\\&\leqslant\max\left\{\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0},\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}\right\}.\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}=f'(x_0),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}=f'(x_0).$$

故由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$.

【证法 2】 先证命题：设 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{c+d}{a+b}$ 介于 $\frac{c}{a}$ 与 $\frac{d}{b}$ 之间.

不妨设 $\frac{c}{a}<\frac{d}{b}$，则由已知 $a>0$，$b>0$ 得 $bc<ad$．于是

$$\frac{c}{a}=\frac{ac+bc}{a(a+b)}<\frac{ac+ad}{a(a+b)}=\frac{c+d}{a+b}<\frac{ad+bd}{b(a+b)}=\frac{d}{b}.$$

再证该题:

由上述命题, 即得 $\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$ 介于 $\dfrac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}$ 与 $\dfrac{f(x_0)-f(\alpha_n)}{x_0-\alpha_n}$ 之间. 而由已知, $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$, 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}=f'(x_0),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0)-f(\alpha_n)}{x_0-\alpha_n}=f'(x_0).$$

故由夹逼准则, 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

【证法 3】 由导数定义: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, 即得 $\forall x\in U(x_0,\delta)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+o(x-x_0).$$

于是取 $x=\alpha_n\in U(x_0,\delta)$, 有

$$f(\alpha_n)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(\alpha_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0),$$

取 $x=\beta_n\in U(x_0,\delta)$, 有

$$f(\beta_n)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(\beta_n-x_0)+o(\beta_n-x_0).$$

两式相减, 得

$$f(\beta_n)-f(\alpha_n)=f'(x_0)(\beta_n-\alpha_n)+o(\beta_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0),$$

即

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)+\frac{o(\beta_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}.$$

又因为 $0<\dfrac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}<1$, $0<\dfrac{x_0-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}<1$, 所以

$$\begin{aligned}\left|\frac{o(\beta_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}\right|&=\left|\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\cdot\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-x_0}+\frac{\alpha_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\cdot\frac{o(\alpha_n-x_0)}{\alpha_n-x_0}\right|\\&\leqslant\left|\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-x_0}\right|+\left|\frac{o(\alpha_n-x_0)}{\alpha_n-x_0}\right|\to 0\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$.

【证法 4】 因为