基于ANSYS的机械结构有限元分析实训教程

刘杨　汪博　李朝峰　孙伟 / 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

基于 ANSYS 的机械结构有限元分析实训教程

刘 杨 汪 博 李朝峰 孙 伟 编著

机 械 工 业 出 版 社

本书共分9章，第1章主要介绍了有限单元法的发展历史，有限单元法的特点，主流有限元分析软件，有限单元法的一些基本概念（形函数、单元刚度矩阵、单元组集原理、边界条件的引入、静力学方程的求解）以及有限单元法的求解步骤；第2章介绍了有限元分析软件——ANSYS分析实际问题的分析流程、操作步骤及参数化编程技术；第3~8章从实际应用出发，以叶盘、齿轮结构、齿轮箱体、CVT无级变速器箱体、电主轴系统及机床床身-立柱系统为研究对象，采用GUI方式按步骤对操作过程进行了详细的讲解，且在每个实例的后面还列出了分析过程的命令流文件；第9章针对有限元软件分析过程中容易犯错的难点问题——接触分析进行了深入的分析和讲解，分析了常见的错误操作过程，以GUI方式详细介绍了接触分析的正确操作步骤和流程，并附上了命令流文件。

本书能够为机械设计领域的高等院校学生及科研院所的研究开发人员提供开发经验和指导。

图书在版编目（CIP）数据

基于ANSYS的机械结构有限元分析实训教程/刘杨等编著.—北京：机械工业出版社，2019.8
ISBN 978-7-111-63057-9

Ⅰ.①基… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①机械工程-结构分析-有限元分析-应用软件-教材 Ⅳ.①TH-39

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第126238号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：郑小光 责任编辑：王 良
责任校对：李 伟 封面设计：姚奋强
北京宝昌彩色印刷有限公司印刷
2019年9月第1版第1次印刷
170mm×240mm·16.75印张·370千字
标准书号：ISBN 978-7-111-63057-9
定价：58.00元

电话服务
服务咨询热线：010-88361066
读者购书热线：010-68326294

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
金书网：www.golden-book.com
教育服务网：www.cmpedu.com

前　　言

计算机辅助工程（CAE）作为一项跨学科的数值模拟分析技术，已经越来越受到科技界和工程界的重视。许多大型的CAE分析软件，尤其是ANSYS公司研制的大型通用有限元分析软件已经非常成熟，不仅在科学研究中普遍采用，而且在工程上应用得也十分广泛。计算机辅助技术已经成为高等院校本科、研究生教学体系中不可缺少的一环，是高校毕业生应当具备的基本能力之一。本书兼顾基本的有限元分析理论与方法，结合作者多年的科研经历，从实际应用出发，对操作过程和步骤进行讲解。

本书主要面向在校大学生与研究生，为其提供学习有限单元法的工具，使其能够快速掌握有限元相关基础理论，具备使用有限元软件分析处理机械工程领域实际问题的能力。本书结合作者多年的科研实践经历，以叶盘、齿轮结构、齿轮箱体、CVT无级变速器箱体、电主轴系统及机床床身－立柱系统为研究对象，合理配置了大量示例问题，对相关概念进行了深入浅出的讲解，可供相关研究开发人员参考借鉴。

本书第1、6、9章内容由东北大学机械工程与自动化学院刘杨副教授编写；第7、8章内容由汪博副教授编写；第4、5章内容由李朝峰副教授编写；第2、3章内容由孙伟教授编写。由于本书的作者都是多年讲授本科生课程《弹性力学及有限单元法》的授课讲师，对有限元分析方法及其理论有着较深入的理解和认知，可以说，对有限元理论与商用有限元分析软件操作讲解两者的兼顾是本书的独到之处。

本书为了方便读者的阅读，特地将需要单击的按钮，输入数值的文本框、勾选的单选框等操作步骤，用图框在相应步骤的屏幕截图中标示出来，以方便读者，特别是初学者在学习时能够进行图文对照的学习。

东北大学机械工程与自动化学院的闻邦椿院士对本书提出了许多建

设性的意见，在此表示衷心的感谢。东北大学机械工程与自动化学院硕士生孟庆宇、马亚新、辛喜成、明帅帅、薛曾元、赵宇来、赵思瑶、韩继远、奚方权、于双赫、鄢欣欣、李津涛在本书的编写过程中对各个例题进行了校审和修改。感谢机械工业出版社对本书的出版所做的重要贡献。

在此，作者向所有关心本书出版的领导、老师、亲人和朋友致以诚挚的谢意。

由于作者水平有限，所写的教程难免会出现不少的错误，敬请读者提出批评。

作者

2019 年 4 月

目　　录

前言

第 1 章　有限单元法简介

1.1　有限单元法的发展历史

有限单元法（Finite Element Method，FEM），又称为有限元法，是一种有效解决数学问题的解题方法，其基础是变分原理和加权余量法，是由力学和计算机技术相结合而逐步发展起来的一种进行工程分析的强有力的数值计算方法（图 1.1）。有限单元法主要应用于机械制造、土木建筑、航空航天、电子电器、材料加工、国防军工、船舶、交通和石化能源等工程领域。商业化有限元软件已经在固体力学、流体力学、热传导、电磁学、声学和生物力学等领域得到广泛应用，并已经成为数学、物理等领域通用的重要分析工具，具有准确、灵活、快速等特点。

有限单元法的基本思想提出可以追溯到 20 世纪 40 年代初，有人尝试使用一维单元（杆和梁）求解连续体中的应力，并提出了变分形式的应力解。20 世纪 50 年代中期以后，Turner 等人首次推导并使用了二维单元（二维三角形单元和矩形单元）进行平面问题的求解，并得出了总体刚度矩阵。Clough 在 1960 年使用平面单元对平面问题进行应力分析时，首次提出了“有限元”这一术语。20 世纪 70 年代以后，随着计算机技术的不断发展，有限单元法也随之迅速地发展起来。当前，有限单元法技术蓬勃发展，不仅已经成为结构分析中必不可少的工具，而且其应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、渗流与固结理论、热传导与热应力问题、磁场问题以及建筑声学与噪声问题。

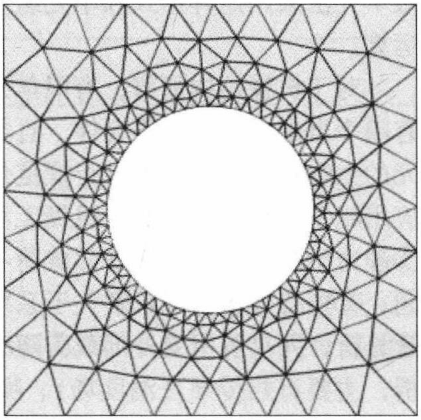

图 1.1　有限单元法示意

1.2　有限单元法的特点

有限单元法的实质是最小势能原理的应用，其核心在于使用离散的方式组合表

达全几何场上的形函数而不是直接寻找全场上的形函数，即对连续体的求解域进行单元剖分与分片近似，通过边缘节点相互连接成为一个整体，然后利用各单元内假设的近似场函数来分片表示整个求解域内的未知场变量，结合相邻单元公共节点场函数值相同的条件，将待求解场函数的无穷自由度问题，转化为求解场函数节点值的有限自由度问题。最后采用与原问题等效的变分原理或加权余量法，建立求解场函数节点值的代数方程组或常微分方程组，并采用各种数值方法求解，从而得到问题的解答。

有限单元法的优点如下：①适用范围广。有限单元法的场函数选择灵活，一般能够应用于固体、流体、热传导、电磁学和声学等多种场问题的分析。②边界几何形状适应性强。可以处理任意的几何形状和一般的边界条件，还可以处理非均匀的和各向异性的材料，即可以处理由各种不同材料组成的、任意几何形状的对象。③具有较好的稳定性和收敛性。有限单元法的数学基础是积分形式的变分原理或加权余量法，把数理方程的求解等效为定积分运算和线性代数方程组或常微分方程组的求解。只要保证数学模型的正确性和方程组求解算法的稳定性和收敛性，并选择收敛的单元形式，其近似解总能收敛于数学模型的精确解。④便于计算机处理。有限单元法采用矩阵形式和单元组装方法，每一个步骤都便于实现计算机软件模块化运算。

对于机械结构而言，有限单元法能够将具有多个自由度的结构连续体离散化为有限个自由度的单元集合体，且单元之间仅在节点处相连接。这样，只要确定了单元的力学特性，就可以进行规范化的求解。随着计算机技术的发展，有限单元法的应用越发广泛和普遍。在机械工程领域中，有限单元法的应用包括以下几个方面：①静力学分析，即求解外部载荷不随时间变化或随时间变化缓慢的机械系统平衡问题；②模态分析，即求解关于系统的某种固有特征值或稳定值的问题；③瞬态动力学分析，即求解所受外部载荷随时间发生变化的动力学响应问题；④非结构力学分析，主要有热传导（温度场）、噪声分析与控制、结构、热和噪声等多维场有限元耦合分析。在机械工程领域，能够求解由杆、梁、板、壳和块体等各类单元构成的弹性（线性和非线性）、弹塑性或塑性问题（包括静力和动力问题），求解各类场分布问题（流体场、温度场、电磁场等的稳态和瞬态问题），求解水流管路、电路、润滑、噪声以及固体、流体、温度相互作用等问题。

1.3 有限单元法的部分基本概念

有限单元法的基本原理是变分原理，求解的问题可以简化为弹性力学问题。弹性力学问题的求解方法可以按求解方式分为两类，即解析方法和数值算法。解析方法是通过弹性力学的基本方程和边界条件简化处理的方式进行求解，但在实际问题中能够用解析方法进行精确求解的弹性力学问题占比很小，而数值算法，如有限单

元法、有限差分法和离散元法等则实际应用范围较广，能够解决绝大多数工程实际中的弹性力学问题。下面将简要介绍有限单元法相关的一些基本概念。

1.3.1　形函数

形函数不仅可以用作单元内的位移插值函数，把单元内任一点的位移用节点位移表示，而且可作为加权余量法中的加权函数，可以处理外载荷，将分布力等效为节点上的集中力和力矩。形函数的核心思想是将单元的位移场函数表示为多项式的形式，然后利用节点条件将多项式中的待定参数表示成位移场函数的节点值和单元几何参数的函数，从而将场函数表示成节点值插值形式的表达式。形函数主要取决于单元的形状、节点类型和单元的节点数目。单元的类型和形状决定于结构总体求解域的几何特点及待求解问题的类型和求解精度。

在单元形函数的推导过程中，位移模式的确定是先决条件。单元中的位移模式一般采用设有待定系数的多项式作为近似函数，可利用帕斯卡三角形对不同类型的单元位移模式加以确定，这样制定的位移模式，能够满足有限元的收敛性要求。相应地可以得到单元的形函数矩阵。以杆单元为例，可做如下推导。

如图 1.2 所示，设单元内的一维位移场函数 $u(x)$ 沿着 x 轴呈线性变化，即

$$u(x) = a_1 + a_2 x \tag{1-1}$$

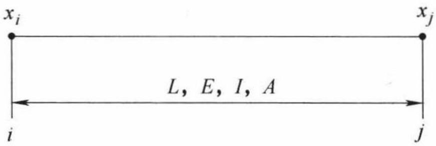

图 1.2　一维一次两节点单元

转换成向量形式为

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{1-2}$$

设两个节点的坐标为 x_i，x_j，两节点的位移分别为 u_i，u_j。代入上式可以解出 a_1，a_2，即

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{1-3}$$

这样，位移场函数 $u(x)$ 可以写成形函数与节点参数乘积的形式

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{1-4}$$

得到形函数矩阵为

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} x_j - x & x - x_i \end{bmatrix}$$

$$= [N_i \quad N_j] = \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right] \tag{1-5}$$

单元形函数与问题解的收敛性直接关联。对于一个有限元计算方法，一般总希望随着网格的逐步细分，所得到的解答能够收敛于问题的精确解。根据前面的分析，在有限元中，一旦确定了单元的类型，位移模式的选择将非常关键。由于载荷的移置、应力矩阵和刚度矩阵的建立都依赖于单元的位移模式，所以，如果所选择的位移模式与真实的位移分布有很大的差别，将会很难获得良好的数值解。

当节点数目或单元插值位移的项数趋于无穷大时，即当单元尺寸趋近于零时，求得的解如果能够无限地逼近真实值，那么这样的形函数所求得的解是收敛的。可以通过图 1.3 来分析几种典型的解的收敛性情况。其中曲线 1 和 2 都是收敛的，但曲线 1 比曲线 2 收敛更快。而曲线 3 虽然趋向于某一确定值，但该值不是问题的真实值，所以其是不能收敛的。曲线 4 虽然最终逼近真实值，但它不能构成真实值的上界和下界，即近似解并不总是大于或小于真实值，因此曲线 4 不是单调收敛的，即其不是收敛的。对于曲线 5，其并不逼近真实值，而是相反而行，即其是发散的。

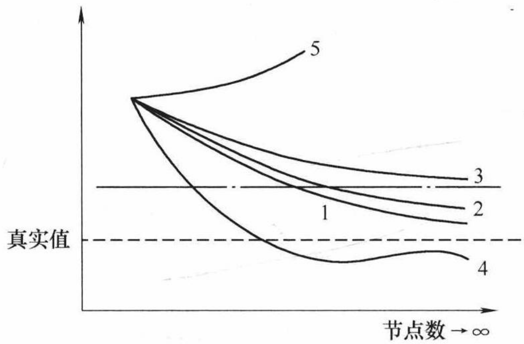

图 1.3　收敛性模拟

为了保证解的收敛性，位移模式要满足以下三个条件，即：

（1）位移模式必须包含单元的刚体位移。也就是当节点位移由某个刚体位移引起时，弹性体内将不会产生应变。所以，位移模式不但要具有描述单元本身形变的能力，而且还要具有描述由其他单元形变而通过节点位移引起单元刚体位移的能力。

（2）位移模式必须包含单元的常应变。每个单元的应变一般包含两个部分：一部分是与该单元中各点的坐标位置有关的应变，另一部分是与位置坐标无关的应变（即所谓的常应变）。从物理意义上看，当单元尺寸无限缩小时，每个单元中的应变趋于常量。

（3）位移模式在单元内要连续且在相邻单元之间的位移必须协调。当选择多项式来构成位移模式时，单元内的连续性要求总是得到满足的，单元间的位移协调性，就是要求单元之间既不会出现开裂也不会出现重叠的现象。通常，当单元交界

面上的位移取决于该交界面上节点的位移时，就可以保证位移的协调性。

在有限单元法中，把能够满足条件（1）和（2）的单元，称为完备单元；满足条件（3）的单元，叫作协调做单元或保续单元。三角形单元和矩形单元，均能同时满足上述三个条件，因此都属于完备的协调单元。在某些梁、板及壳体分析中，要使单元满足条件（3）会比较困难，实践中有时也出现一些只满足条件(1）和（2）的单元，其收敛性往往也能够令人满意。放松条件（3）的单元，即完备而不协调的单元，已获得了很多成功的应用。不协调单元的缺点主要是不能事先确定其刚度与真实刚度之间的大小关系。但不协调单元一般不像协调单元那样刚硬（即比较柔软），因此有可能会比协调单元收敛得快。

选择多项式位移模式时，还应考虑多项式中的项数必须等于或稍大于单元边界上的外节点的自由度数。通常取项数与单元的外节点的自由度数相等，取过多的项数是不恰当的。可以证明，对于一个给定的位移模式，其刚度系数的数值比精确值要大。所以，在给定的载荷之下，有限元计算模型的变形将比实际结构的变形小。因此，细分单元网格，位移近似解将由下方收敛于精确解，即得到真实解的下界。

同时，形函数具有如下三个性质：

（1）形函数在各单元节点上的值，具有“本点为 1、它点为 0”的性质。

（2）在单元内任一位置上，各节点形函数之和等于 1。

（3）单元任意一条边上的形函数，仅与该边两端的节点坐标有关，而与其他节点坐标无关。

1.3.2　单元刚度矩阵

单元刚度矩阵表征单元体的受力与变形之间的关系。单元刚度矩阵的推导步骤如下：

（1）建立坐标系，选择合适的单元离散连续体。

（2）确定相应的位移模式，以单元节点坐标来表示单元节点的位移。

（3）求解单元形函数，用节点位移表示单元内任一点的位移。

（4）求解单元应变矩阵，用节点位移表达单元内任一点的应变。

（5）用应变和节点位移表达单元内任一点的应力。

（6）应用虚位移原理建立节点力与节点位移之间的关系，形成单元刚度矩阵。

单元刚度矩阵的物理意义是其任一列的元素分别等于该单元的某个节点沿坐标方向发生单位位移时，在各节点上所引起的节点力。单元的刚度取决于单元的大小、方向和弹性常数，而与单元的位置无关，即不随单元或坐标轴的平行移动而改变。单元刚度矩阵一般具有以下特性：对称性和奇异性。

1.3.3　单元组集原理

在应用有限单元法求解实际问题的过程中，对单元刚度矩阵、载荷列阵等进行

组集，求得整体刚度矩阵和载荷列阵的步骤不可缺少，进而能够得到描述整个弹性体平衡关系式的有限元方程。

以一维单元为例，每个节点只有 x 方向一个自由度。首先，引入整个弹性体的节点位移列阵 $\boldsymbol{q}_{n\times1}$，它由所有节点位移按节点整体编号顺序从小到大排列而成，即

$$\boldsymbol{q}_{n\times1} = \{q_1^T \quad q_2^T \quad \cdots \quad q_n^T\}^T \tag{1-6}$$

弹性体整体载荷列阵的确定。设一维单元的两个节点（1，2 节点）对应的整体编号分别为 i、j（i、j 的次序从小到大排列），每个单元两个节点的等效节点力分别记为 P_i^e，P_j^e。将弹性体离散后的所有单元节点力列阵 $\{\boldsymbol{P}\}_{2\times1}^e$ 加以扩充，使之成为 $n\times1$ 阶的列阵，即

$$\boldsymbol{P}_{n\times1}^e = \left\{ \overset{1}{} \quad \cdots \quad \overset{i}{P_i^{eT}} \quad \cdots \quad \overset{j}{P_j^{eT}} \quad \cdots \quad \overset{n}{} \right\}^T \tag{1-7}$$

式中，T 代表转置；e 是单元。

在求得各单元扩充后的节点力列阵之后，将所有单元的节点力列阵叠加在一起，重叠的部分则进行简单的相加，便可得到整个弹性体的载荷列阵 $\boldsymbol{P}$。结构整体载荷列阵记为

$$\boldsymbol{P}_{n\times1} = \sum_{e=1}^{N} P_{n\times1}^e = \{P_1^T \quad P_2^T \quad \cdots \quad P_n^T\}^T \tag{1-8}$$

由于结构整体载荷列阵是由移置到节点上的等效节点载荷按节点号码对应叠加而成，相邻单元公共节点内力引起的等效节点力在叠加过程中必然会全部相互抵消，所以结构整体载荷列阵只会剩下外载荷所引起的等效节点力，因此在结构整体载荷列阵中大量元素一般都为 0 值。

弹性体整体刚度矩阵的确定。以一维杆单元为例，将其 2 阶单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 进行扩充，使之成为一个 $n\times n$ 阶的方阵 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{ext}}^e$。具体扩充方式如下，单元内的两个节点（1，2 节点）分别对应的整体编号 i 和 j，那么扩充后的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{ext}}^e$ 可以表示为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{ext}}^e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \boldsymbol{k}_{ii} & \cdots & \boldsymbol{k}_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \boldsymbol{k}_{ji} & \cdots & \boldsymbol{k}_{jj} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n_{\ (n\times n)} \end{array} \tag{1-9}$$

单元刚度矩阵经过扩充以后，除了对应的第 i、j 行和 i、j 列上的四个元素之外，其余元素均为零。

求得扩充后的单元刚度矩阵$\boldsymbol{k}_{\text{ext}}^{e}$之后，将 N 个单元的扩充刚度矩阵$\boldsymbol{k}_{\text{ext}}^{e}$进行叠加，与载荷列阵同理，重叠的部分进行简单的相加得到结构整体刚度矩阵

$$\boldsymbol{K} = \sum_{e=1}^{N} \boldsymbol{k}_{\text{ext}}^{e} \tag{1-10}$$

1.3.4　边界条件的引入

上面分析了单元刚度矩阵的组集过程，求得的整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是奇异矩阵，不能直接求解，只有在消除了整体刚度矩阵的奇异性之后，才能联立方程组并求解出节点位移。一般情况下，所要求解的问题，其边界往往具有一定的位移约束条件，本身已排除了刚体运动的可能性。整体刚度矩阵的奇异性需要通过引入边界约束条件、消除结构的刚体位移来实现。罚函数法能够简单、有效地引入边界条件。

罚函数法很容易通过计算机程序实现，其具体操作是将整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中与指定自由度位移有关的主对角元素乘上一个大数 C，将 F 中的对应元素换成指定的节点位移值与该大数的乘积。实际上，这种方法就是使 $\boldsymbol{K}$ 中相应行的修正项远大于非修正项。

$$\begin{bmatrix} K_{11} \times C & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \times C & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 K_{11} \times C \\ F_2 \\ \beta_3 K_{33} \times C \\ F_4 \end{Bmatrix} \tag{1-11}$$

可以看到，该方程组的第一个方程为

$$K_{11} \times C \times q_1 + K_{12} q_2 + K_{13} q_3 + K_{14} q_4 = \beta_1 K_{11} \times C \tag{1-12}$$

由于

$$K_{11} \times C >> K_{1j} \qquad (j = 2,3,4) \tag{1-13}$$

故有

$$q_1 = \beta_1 \tag{1-14}$$

同理可得

$$q_3 = \beta_3 \tag{1-15}$$

进而方程组降阶为 2×2 阶，同时可以求得 q_2和 q_4的值。

需要说明的是：这里所介绍的罚函数法只是一种近似的方法，求解的精度，取

决于 C 的选取。

C 的选取：

将式（1-12）除以 C，可以得到

$$K_{11}q_1 + \frac{K_{12}q_2}{C} + \frac{K_{13}q_3}{C} + \frac{K_{14}q_4}{C} = \beta_1 K_{11} \tag{1-16}$$

从上式中我们可以发现，如果 C 选得足够大，那么 $q_1 \approx \beta_1$，尤其是当 C 比刚度系数 K_{11}，K_{12}，…，K_{1n}大得多时，那么有 $q_1 \approx \beta_1$。

可以使用一个简单的方法来选取 C 值，即

$$C = \max|K_{ij}| \times 10^5 (1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n) \tag{1-17}$$

选用 10^5 对于大多数实际问题是适合的。可以通过一个简单的方式来验证，使用上述这个公式（比如用 10^5 或 10^6）来验证所得到的支反力的解相差是否很大。

1.3.5 位移及单元应力的求解

引入边界条件，消除了整体刚度矩阵奇异性的有限元方程组，对其进行求解即可得到节点位移，此时所求得的解是唯一的。实际上在整个有限元方程组的求解过程中，只有节点位移是求出量，而其他量值（应力、应变等）则是由位移值推导出来的。

静态有限元分析的计算结果主要包括位移和应力两方面。位移已经获得，而对于应力计算结果则需要推导。为了能根据计算结果推导出结构中任一点处的应力值，一般采用绕节点平均法或两单元平均法进行处理。

绕节点平均法，就是将环绕某一节点的各单元常应力加以平均，用以表示该节点的应力。为了使求得的应力能较好地表示节点处的实际应力，环绕该节点的各个单元的面积不应相差太大。一般而言，绕节点平均法计算出来的节点应力，在内节点处较好，而在边界节点处则可能很差。因此，边界节点处的应力不宜直接由单元应力平均来获得，而应该由内节点的应力进行推算。

两单元平均法，即把两个相邻单元中的常应力加以平均，用来表示公共边界中点处的应力。这种情况下，两相邻单元的面积也不应相差太大。

1.4 有限单元法的求解步骤

弹性力学有限单元法分析的主要步骤包括：

（1）结构的离散

将分析对象划分为有限个具有节点的单元体组合，并选择合适的建模方式（一维、二维或三维）。结构的离散通常需要考虑分析对象的结构形状与受力情况。节

点的多少及其分布的疏密程度会直接影响有限元分析计算的效率和精度。

（2）单元位移模式的确定

单元的位移模式通过单元的节点值进行定义，通常为线性、二次和三次多项式等形式。多项式的项数和阶数的选择应考虑单元的自由度和求解的收敛性要求。位移模式的选择是有限单元法分析中的关键，通过位移模式可以近似地表示单元位移分量随坐标变化的分布规律。

（3）推导单元刚度矩阵

通过位移模式能够得到单元的形函数矩阵，进而运用几何方程、物理方程、虚功原理推导出作用于单元上的节点力与节点位移之间的关系式，即单元刚度矩阵。

（4）等效节点力计算

在有限元分析中，由于分析对象的离散化，单元之间通过节点进行力的传递，集中载荷、分布载荷及体积力等都应转化作用于节点上，可根据静力等效的原则全部移置到节点上。

（5）整体平衡方程的建立

单元刚度矩阵可通过直接组集法或转换矩阵法组集成为分析对象的整体刚度矩阵；同样，在忽略单元间相互作用的内力基础上可建立整体力矩阵；以节点力平衡为基础，可以建立整体结构的平衡方程。

（6）边界约束条件的引入

总体刚度矩阵是行列式等于零的奇异矩阵，无法对整体平衡方程进行求解。引入边界条件（约束或支撑）可以消除奇异性，使结构固定而不作刚体运动，进而可对整体平衡方程进行求解。

（7）求解节点位移及单元应力

通过求解方程组可以得到各节点的位移，并利用几何方程与物理方程来得到各单元体内的应力与应变值。

1.5　有限元分析软件

“化整为零”是有限单元法最基本的求解思路，这样做使有限单元法的求解过程非常烦琐，计算量巨大。在 20 世纪 70 年代以前，计算机技术相对不够发达，使得应用有限单元法进行结构分析而得到的大量代数方程组无法快速求解而不能实际应用。直到 20 世纪 70 年代末期，大规模集成电路以及图形用户视窗界面技术的兴起大大提高了计算机的运算速度和可操作性，使得应用有限单元法求解复杂问题变得简单、可行，同时也带动了有限元技术的深入发展。近几十年来，大量基于有限元法的商业化软件和专用程序被开发出来，并应用于除工程学与数学物理学领域以外的流体力学、热力学、电磁学和声学等其他领域。

1966 年美国国家航空航天局（NASA）为了满足当时航空航天工业对结构分