

The Art of Mathematics Discovery—
Mathematics Exploring in Reasoning



数学·统计学系列

数学发现的艺术

——数学探索中的合情推理

杨世明 王雪芹 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

The Art of Mathematics Discovery—Mathematics Exploring in Reasoning

数学发现的艺术： 数学探索中的合情推理

● 杨世明 王雪芹 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是一部用波利亚风格写成的数学方法论专著. 它寓数学的思想方法于数学研究、发现、探索和解题之中, 既是严肃的数学书、方法书, 又是妙趣横生的科普读物. 书中, 作者运用从数学史料、数学课本、众多数学家的著作和手稿里采集的丰富素材, 归纳、研究合情推理方法对在数学学习、解题, 教学和研究中广泛应用的观察、实验、归纳、类比、联想、猜测、检验、推广、限定, 以及抽象、概括、演绎和证明等典型思维方法进行了探讨.

本书适合数学教育工作者、中学生和大学生, 以及广大的数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学发现的艺术: 数学探索中的合情推理/杨世明, 王雪芹著. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2018. 11
ISBN 978-7-5603-5440-8

I. ①数… II. ①杨…②王… III. ①数学-普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 132847 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张永文
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 32.25 字数 629 千字
版 次 2018 年 11 月第 1 版 2018 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5440-8
定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

实践波利亚数学教育思想的结晶

——就本书的出版致作者^①

(代序)

杨之先生：

您好！

当我看完最后一页清样时，心头有说不出的高兴。先生与雪芹老师的大作即将付梓，向您表示诚挚的祝贺！

只是先生执意要我写序的事，着实给我出了一道不小的难题，却之再三，迟迟不敢动笔，我有“三怕”：

一怕才疏识短，有损先生英名。在我国初等数学教育界，先生是一位名副其实的大家，您育才有方，桃李满天下，是全国著名的中学特级教师；您博学多才，著述颇丰，仅一部《初等数学研究的问题与课题》，就足以树起一座中国化的初等数学研究的丰碑；您深藏若虚，在同行中可谓口碑载道；您与挚友共同主持的“两会”^②，在推动我国初等数学研究、深化数学教学改革等方面，意义重大；您倡导的“MM教育方式”^③，深受广大中学数学教师欢迎，更为有识之士称道。

1996年夏，在庐山召开的“全国初等数学研究及数学教学研讨会”上有幸与先生相识。您的朴实、豁达、敏捷、儒雅，给我留下了极深的印象。论学识，无愧吾师；论年龄，敬为兄长。这次大作出版，当请一位名家或前辈作序，方为常理。让一名普普通通的教师、编辑、读者作序，我自感底气不足，难以胜任。仅此，又一次令我体会到先生的大家风范。

二怕干系重大，误使大作减辉。本书是先生与雪芹老师数十年潜心研究、实践波利亚数学教育思想的结晶。它大气磅礴，兼容并包，融汇众多中外数学名家、名篇之精华，耗去你们8年的心血而铸成；它结构严谨，论述细密，全面而系

① 这是本书特邀编辑写给本书作者之一的一封信，权作序，标题为编者所加。

② 指“全国初等数学研究学术交流会”和“全国波利亚数学教育思想研讨会”。

③ 见本书第十七章 § 5。

统地阐释了“合情推理”在数学研究、发现、解题过程中的意义和应用，是一部有较高学术价值的数学方法论专著；它深入浅出，文笔优美，学术性与通俗性完美地相结合，引导读者兴味盎然地走进一个个“数学发现”的乐园，春雨润物般地感悟到“数学”原来是这样被“发现”的，因而也是一部可读性很强的数学启蒙教科书。

我读先生的书稿，很像在欣赏一件精巧的艺术品，是一种难得的精神享受。但一想到写“序”，立刻又惶恐不安起来。“序言”是一本书映入读者眼帘的“第一道风景线”，是书与读者“对视”的“眼睛”。从这个意义上说，为书作序，犹如画龙点睛，在我看来，是件很神圣的事，唯恐不慎，使这件“数学教育精品”蒙受哪怕丁点儿玷污。

三怕画蛇添足，令读者生厌。读者打开一本书，急切希望知道：这是一部怎样的书？主要内容是什么？作者为什么要写这本书？它有什么特点？而所有这些读者关心的问题，先生都在前言、后记中条分缕析，讲得一清二楚了，我再嘤嘤不休，岂不大煞风景！

最后，我还有一句心里话，我有幸成为书稿的第一位读者，请先生以后不要再说谢我的话。作者、编者、读者，到底应该谁谢谁？作为一名从事数学教育工作的编辑，发现并尽力使一本好书早日与读者见面，是我的天职，也是一种幸福。相信众多从中受益的读者会和我一样，由衷地向您道一声：谢谢！

恭颂

春安！

贾庆祥^①

1998年3月28日于泉城^②

① 本序作者系山东教育出版社副社长、副总编、编审。

② 由于本书是重新出版，所以代序用的是1998年的。

从“归纳”谈起

——关于《数学发现的艺术》^①

在小学数学中,我们就提到“归纳”一词,我们用归纳的方法讲解数学,从引进概念到发掘规律,从知识的形成、发展到解题的探索和概括都在不断地向学生渗透归纳的思想和方法.教学大纲把它列为思维能力的重要因素,其重要性随着教学方法的改进而不断提升.由此产生一系列问题,比如:

为什么要研究归纳?什么是归纳?如何运用归纳?运用归纳应持什么态度?它有什么作用?进一步,使用归纳方法的依据是什么?归纳与观察、归纳与类比、归纳与演绎、归纳与组合有什么关系?在数学研究中,如何使用归纳?在数学教学中如何使用归纳?等等.

人们期盼着有一个基于我国数学教育实践的理论回答.对这种回答,大多数数学教师既不希望它像心理学著作那样“高雅”,也不希望它如“教育理论+数学例子”那样“平庸”.人们极力推崇数学教育大师波利亚,希望有波利亚式的回答.

早在 20 世纪 50 年代,波利亚就回答过上述大部分问题,他的著作《数学与猜想》成为世界经典.但半个世纪以来,数学教育发生了巨大的变化,广大数学教师在继承波利亚思想的同时,更寄希望感受一下波利亚思想进一步发展的脉搏.

杨世明先生与王雪芹老师的新著《数学发现的艺术——数学探索中的合情推理》的问世,满足了广大教师的这一愿望.

该书的第一章题为“归纳”.本书开宗明义:

“我们学习是从经验出发的,或者说,应当从经验出发去学习.”

“为什么?”

正是这个为什么,从心理学的角度,引出了归纳的概念,又以哥德巴赫猜想

^① 裴光亚(武汉市教研室),原载《数学通讯》1999 年第 1 期.

的产生,函数概念的形成为例,来介绍归纳的几个阶段及其作用。

众所周知,哥德巴赫猜想是每一名中学生都能理解,但有极高探索价值的命题,函数的概念在中小学数学中占有非常重要的地位.这些平凡的素材,被杨先生用来讲数学发现、数学思维,讲得跌宕起伏,生动透彻,使人读来赏心悦目。

这是一本系统讲述数学探索中的合情推理的书,仅就归纳而言,与其有关的篇章还有:平面几何中的归纳法,算术中的归纳法,代数中的归纳法,归纳与数学教学。

这是一本有“中国特色”的波利亚式的著作.不仅用波利亚风格,还继承和发展了波利亚论述的主题.除讲合情推理中的“类比”外,还讲了数学方法论,其中饱含着作者数十年数学教学和初等数学研究的心血。

这是一本体现数学教育发展趋势的书,书中有一章题为“数学全息现象”,算术中小孩识数的过程,代数中二次函数的图像,几何中的黄金矩形等,都反映出这种现象.作者提出了“数学全息现象”,认为它不仅蕴含研究数学问题的技巧,而且是归纳、类比、推广、猜想等方法使用的依据.这个理论的引用,无疑把波利亚的研究向前推进了一步。

这本书不仅指导我们如何研究数学(包括如何选题、如何得到副产品),还引导我们如何欣赏数学,揭示了数学的三大追求。

这本书特别关注课堂教学改革,很多段落直接引自现行的中学课本,对它进行剖析、点评、加工,并构想独具匠心的教学设计.书中大量介绍了中学课本中一些重要知识的背景、产生的原因、线索及其方法论基础,并力图展示,一个发现可能是如何产生的过程,比较典型的范例有:用字母表示数、有理数的运算、二次函数、点到直线的距离公式、直线和平面垂直的判定和性质、球的体积公式等.比如,用字母表示数,是因为实际问题提出了挑战,要表示任意的数、未知的数和变化的数,数字已无能为力.然而,种豆得瓜,发生了意想不到的事情……又比如,有理数的运算涉及9种情形,如何把它组合为三类,又如何运用“水池模型”的思想实验,来深刻理解它,等等。

这本书汇集了与初等数学研究和中学数学教育有关的大量历史资料、背景材料、著名问题、逸闻趣事、研究小品、数学悖论、教学方式和名家箴言.留下了很多值得探索的课题和使人惊奇的素材,并以“解答与提示”的方式展示了研究方法及其前景。

这部书写了8年,值得我们用18年的时间来读它.山东教育出版社的贾庆祥副总编给本书以高度的评价.笔者深有同感,故抄录于后:

“本书是先生(指杨世明老师)与雪芹老师数十年潜心研究、实践波利亚数学教育思想的结晶.它大气磅礴,兼容并包,融汇众多中外数学名家、名篇之精华,耗去你们8年的心血而铸成;它结构严谨,论述细密,全面而系统地阐释了

‘合情推理’在数学研究、发现、解题过程中的意义和作用，是一部有较高学术价值的数学方法论专著；它深入浅出，文笔优美，学术性与通俗性完美地相结合，引导读者兴味盎然地走进一个个‘数学发现’的乐园，春雨润物般地感悟到‘数学’原来是这样被‘发现’的，因而也是一部可读性很强的数学启蒙教科书。”

这是一部什么书？

是一部用波利亚风格写成的数学方法论专著。它寓数学的思想方法于数学研究、发现、探索和解题之中，既是严肃的数学书、方法书，又是妙趣横生的科普作品；它运用从数学史、数学课本、众多数学家的著作和手稿里采集的丰富素材，归纳、研究合情推理方法，对在数学学习、解题、数学和研究中广泛应用的观察、实验、归纳、类比、联想、猜测、检验、推广、限定以及抽象、概括、演绎和证明等典型思维方法，进行了探讨。

全书共十七章。除“正文”外，在“注释、问题与课题”中，一方面补述正文中的言犹未尽，提供相关历史知识和背景材料；另一方面则提供适于读者求解的问题和研究的课题，创造动手动脑的良机，使读者自己研究、学习，而不是作者赐予。

为什么要写这本书？其背景如何？

这要涉及波利亚。波利亚(G. Pólya, 1887. 12—1985. 9)是美籍匈牙利数学家、教育家。一生致力于数学、数学方法论和数学教育的研究，在把数学方法论用于数学教育的研究和实践中，成就非凡。其成果集中反映在《怎样解题》《数学发现》《数学与合情推理》(有一种中译本译作《数学与猜想》)这三部著作之中。这些著作早已风靡全球，并于20世纪80年代相继译介到我国。在知名数学家徐利治教授的大力倡导下，我国掀起了数学方法论和波利亚数学教育思想研究的热潮。

1989年在北京市召开的“全国首届波利亚数学教育思想研讨会”，倡导“把数学方法论用于数学教育”。同年，无锡市教研中心的特级教师徐沥泉设计了“贯彻数学方法论的教育方式，全面提高学生素质”的数学教育实验(MM课题)。该实验的成功证实了“MM教育方式”是一种以素质教育为目标，充分体现现代数学教育思想的数学教育方式。它高效低耗，具有可行

性,深受广大师生的欢迎. 我们有幸参加了 MM 教育方式实验研究和推广工作,深感数学方法论对数学教育工作者,特别是对跨世纪的数学教育工作者,具有十分重要的意义.

数学方法论的知识从哪里来? 渠道很多,但最好是去读波利亚的著作. 可是,他的三部著作的中文译本,印数有限,早已脱销,又难于再版. 而且老实说,这些经典名著好是好,但《怎样解题》出版于 20 世纪 40 年代,《数学发现》二卷出版于 1967 年. 试想五六十年前波利亚针对当时美国数学教育状况而写的东西,对于今天中国的数学教育,虽仍有重要参考价值,但毕竟已时日久远;当今世界特别是中国数学教育的巨大变化,无法在书中反映出来. 再者,波利亚著作中使用的例子,多采自高等数学和外国数学史,中国五千年的数学成就和数学思想方法在书中毫无反映,这自然不能责怪波利亚,但我们有责任改变这种状况.

凡此种种,促使我们动笔写这部书,一是为了作为“MM 教育方式”研究和应用的理论基础;二是为了帮助读者掌握对数学思维至关重要的合情推理;三是为了帮助跨世纪的数学教师做好“观念、知识和能力”三方面的更新.

本书是写给中小学数学教师,初中、高中学生和大学生(不限于数学系的),大专院校的教师和数学爱好者看的. 为了读者鉴赏和研究的方便,我们采用了深入浅出的表达方法,尽量降低引用的数学内容的“高度”,使其尽可能限制在初等数学的范围之内,并特别从中小学教材中摘取了大量的例子. 然而,本书是以研究数学中的“探索发现”为己任的,应用中小学数学那“浅显”的知识,怎能担负“剖析数学发现的曲折过程”的重任? 波利亚无奈,当年写他的三部书的时候,除了初等数学之外,还选用了微积分、级数和数论中相当高深的内容. 我们则不然,虽历尽周折,仍坚持“降低高度”. 令人欣喜的是,我们发现,在中小学数学这潭“浅水”中并非无蛟龙,以初等数学为素材讲述数学发现,同样令人神往;讲数学思维,往往更加生动透彻. 因为“通常”中的奇巧,“平凡”中的不凡,往往显示着数学的秀美,让人赏心悦目. 当然,作为补充,我们采集了不少民间算题和数学名著中的精巧例证,引用了欧几里得《原本》,我国的《周易》《周髀算经》《九章算术》以及刘徽、祖氏父子、杨辉、秦九韶、程大位、李冶、欧拉(Euler)、希尔伯特(D. Hilbert)、波利亚、华罗庚等数十位数学家的著作,引用了中国 20 世纪 80 年代以来初等数学研究的丰硕成果. 事实表明,中国古今数学,在数学思想方法和数学方法论方面的“蕴藏量”也是极为丰富的.

杨世明 王雪芹

2018 年 5 月于天津

第一章 归 纳 //1

- § 1 观察和归纳 //1
- § 2 探索接触 //3
- § 3 检验接触 //4
- § 4 归纳的态度 //6
- § 5 归纳的作用——归纳认识 //7
- § 6 归纳的作用——归纳发展 //9
- 注释、问题与课题 //11

第二章 推广—限定—类比 //20

- § 1 一个例子 //20
- § 2 推 广 //21
- § 3 限 定 //21
- § 4 类 比 //22
- § 5 推广、限定和类比 //23
- § 6 用类比来发现 //25
- § 7 类比和归纳 //27
- 注释、问题与课题 //28

第三章 平面几何中的归纳法 //42

- § 1 中国古算 //42
- § 2 归纳中的演绎 //45
- § 3 洞渊九容 //45
- § 4 类比、归纳和演绎 //48
- § 5 公理的诞生 //50
- § 6 演绎中的归纳 //53

- § 7 类比、演绎和数学问题 //54
- § 8 全等与运动 //55
- § 9 从全等到相似 //59
- § 10 完全的归纳与组合 //61
- 注释、问题与课题 //61

第四章 从平面到空间 //67

- § 1 类比与推广 //67
- § 2 一个惊人的发现 //68
- § 3 检验 //70
- § 4 空间的划分 //73
- § 5 归纳法、提示演绎法,部分情况提示一般的证明 //77
- 注释、问题与课题 //79

第五章 面积和体积 //83

- § 1 面积纵横 //83
- § 2 面积组成问题 //85
- § 3 归纳中的线索 //88
- § 4 “面积”开发 //89
- § 5 π 的奥妙 //92
- § 6 π 的启示 //98
- § 7 体积问题 //100
- § 8 化归 //103
- § 9 归纳、类比与化归 //104
- 注释、问题与课题 //105

第六章 算术中的归纳法 //114

- § 1 深入地观察 //114
- § 2 形同实异的问题 //119
- § 3 沙里淘金:兔子问题研究 //122
- § 4 一道民间算题 //124
- § 5 确定型问题 //127
- § 6 数学模型 //129
- 注释、问题与课题 //132

第七章 代数中的归纳法 //145

- § 1 历史回顾 //145
- § 2 字母代数 //146
- § 3 意想不到的事情 //148

- § 4 归纳与数学习惯 //150
- § 5 从贾宪到杨辉 //153
- § 6 从牛顿到华罗庚 //155
- § 7 孤立观察 //157
- § 8 四个二次 //159
- § 9 配方法 //161
- § 10 根与系数的关系 //162
- 注释、问题与课题 //166

第八章 抽象——精致的类比 //177

- § 1 欧拉“过桥”的故事 //177
- § 2 抽象 //179
- § 3 类比、推广与抽象 //180
- § 4 直觉与抽象 //181
- § 5 思想实验 //183
- § 6 抽象的层次 //185
- § 7 数学模型(续) //187
- 注释、问题与课题 //188

第九章 极大与极小 //195

- § 1 极值问题 //195
- § 2 思路分析 //196
- § 3 等值切线模式 //199
- § 4 最大多边形和异面直线问题 //201
- § 5 部分改变模型 //203
- § 6 生活中的极值问题 //205
- § 7 二次模型 //208
- § 8 运输中心问题 //211
- § 9 定值模型 //216
- 注释、问题与课题 //217

第十章 等周问题 //225

- § 1 观察、实验和猜想 //225
- § 2 考查推论 //228
- § 3 确证推论 //230
- § 4 非常贴近 //233
- § 5 等周定理的三种形式 //234
- § 6 副产品 //235
- § 7 应用和问题 //236

§ 8 向空间类推 //237

注释、问题与课题 //237

第十一章 最优化问题 //246

§ 1 自然书 //246

§ 2 优选问题 //249

§ 3 两点创新 //253

§ 4 统筹方法 //254

§ 5 简单性 //257

§ 6 中国邮递员问题 //258

§ 7 最优化问题 //260

注释、问题与课题 //261

第十二章 计数 //267

§ 1 枚举计数法 //267

§ 2 由法则到公式 //271

§ 3 格图中的计数问题 //274

§ 4 游戏中的数学 //278

§ 5 整边三角形的计数 //282

§ 6 计数问题综观 //287

注释、问题与课题 //287

第十三章 组合 //297

§ 1 账单和立方体切割的启示 //297

§ 2 组合因素与组合思想 //299

§ 3 运算中的组合因素 //300

§ 4 数学关系中的组合因素 //303

§ 5 逻辑与组合 //307

§ 6 公式与顺序 //308

§ 7 几何证明中的组合因素 //311

§ 8 坐标系 //313

§ 9 归纳与组合 //316

注释、问题与课题 //317

第十四章 数学全息现象 //327

§ 1 观察与联想 //327

§ 2 算术中的全息现象 //328

§ 3 代数中的全息现象 //332

§ 4 几何中的全息现象 //335

- § 5 全息元和数学全息律 // 338
- § 6 归纳、类比、推广与数学全息律 // 340
- 注释、问题与课题 // 343

第十五章 数学的追求 // 350

- § 1 对方法的品评 // 350
- § 2 数学的三项追求 // 354
- § 3 两个几何公式 // 355
- § 4 内在美和形式美 // 360
- § 5 “行列式”诞生之谜 // 363
- § 6 数学中的奇巧 // 366
- 注释、问题与课题 // 370

第十六章 合情推理模式 // 382

- § 1 合情推理 // 382
- § 2 归纳推理模式 // 382
- § 3 类比推理模式 // 387
- § 4 演绎推理与归纳推理 // 389
- § 5 合情推理模式间的逻辑联系 // 392
- § 6 余新河数学题赏析 // 393
- 注释、问题与课题 // 400

第十七章 归纳与数学教学 // 407

- § 1 演绎、归纳与数学教学 // 407
- § 2 探索式的教学方式 // 410
- § 3 实验、直觉与逻辑 // 414
- § 4 波利亚式的解题教学 // 416
- § 5 数学方法论的教育方式 // 420
- § 6 归纳的学习方式 // 422
- § 7 给教师的几点建议 // 424
- 注释、问题与课题 // 425

参考解答与提示 // 434

- 第一章 归纳 // 434
- 第二章 推广—限定—类类比 // 436
- 第三章 平面几何中的归纳法 // 441
- 第四章 从平面到空间 // 443
- 第五章 面积和体积 // 447
- 第六章 算术中的归纳法 // 449

| | | |
|------|-----------|-------|
| 第七章 | 代数中的归纳法 | //454 |
| 第八章 | 抽象——精致的类比 | //461 |
| 第九章 | 极大与极小 | //463 |
| 第十章 | 等周问题 | //465 |
| 第十一章 | 最优化问题 | //470 |
| 第十二章 | 计数 | //472 |
| 第十三章 | 组合 | //475 |
| 第十四章 | 数学全息现象 | //476 |
| 第十五章 | 数学的追求 | //477 |
| 第十六章 | 合情推理模式 | //477 |

后记 //479

归 纳

第

一

章

你要有知识,你就得参加变革现实的实践.你要知道梨子的滋味,你就得变革梨子,亲口吃一吃……一切真知都是从直接经验发源的.

——毛泽东《实践论》

事相类推,各有攸归,故枝条虽分,而同本干者,知发其一端而已.

——刘徽《九章算术注》

§ 1 观察和归纳

我们学习是从经验出发的,或者说,应当从经验出发去学习.

为什么?

现代心理科学的研究表明,儿童最初的概念,是他(她)反复进行的动作的体验转化而成的,或称为动作经验的内化.比如,儿童最初对数的概念,就是他反复点数物体、手指的操作体验的内化,形的概念则来自于对各种物体的抚摩、摆弄、测量、观看的经验.我们的知识,并非全来自自身的经历,但是人的任何概念,无不直接或间接地以他(她)亲身实践的经验为基础.