

高等学校教材

# 数学分析讲义

第六版（上册）

刘玉琮 傅沛仁 刘伟 林玓 编

高等教育出版社

高等学校教材

# 数学分析讲义

第六版（上册）

刘玉琮 傅沛仁 刘伟 林玓 编



高等教育出版社·北京

内容提要

本书分上、下两册,是在第五版的基础上修订而成的,在内容和体例上未作较大变动。知识内容稍有扩充,涉及的方面很广。增加了少量的说明性文字,使内容更加完善,并适当补充了数字资源(以图标  示意)。上册内容包括:函数,极限,连续函数,实数的连续性,导数与微分,微分学基本定理及其应用,不定积分,定积分等。

本书阐述细致,范例较多,便于自学,可作为高等师范学校本科教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义.上册 / 刘玉琏等编.--6版.--北京:高等教育出版社,2019.4  
ISBN 978-7-04-051441-4

I.①数… II.①刘… III.①数学分析-高等学校-教材 IV.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第036487号

|      |     |      |     |      |     |      |    |
|------|-----|------|-----|------|-----|------|----|
| 项目策划 | 李艳馥 | 李蕊   | 兰莹莹 |      |     |      |    |
| 策划编辑 | 李蕊  | 责任编辑 | 张晓丽 | 封面设计 | 王凌波 | 版式设计 | 马云 |
| 插图绘制 | 于博  | 责任校对 | 陈杨  | 责任印制 | 刘思涵 |      |    |

|      |                   |      |                                                                   |
|------|-------------------|------|-------------------------------------------------------------------|
| 出版发行 | 高等教育出版社           | 网 址  | <a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>         |
| 社 址  | 北京市西城区德外大街4号      |      | <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>         |
| 邮政编码 | 100120            | 网上订购 | <a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a> |
| 印 刷  | 山东鸿君杰文化发展有限公司     |      | <a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>       |
| 开 本  | 787mm×1092mm 1/16 |      | <a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>         |
| 印 张  | 22.75             | 版 次  | 1966年3月第1版                                                        |
| 字 数  | 490千字             |      | 2019年4月第6版                                                        |
| 购书热线 | 010-58581118      | 印 次  | 2019年4月第1次印刷                                                      |
| 咨询电话 | 400-810-0598      | 定 价  | 44.00元                                                            |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 51441-00

# 数学分析讲义

第六版(上册)

刘玉琏 傅沛仁 刘伟 林玓 编

1. 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1255301>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
2. 注册并登录, 进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号(20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至[abook@hep.com.cn](mailto:abook@hep.com.cn)。



扫描二维码  
下载 Abook 应用



数学分析简史(上)



数学分析简史(下)



第一版前言

<http://abook.hep.com.cn/1255301>

## 第六版前言

《数学分析讲义》自 1966 年出版以来,已进行五次修订再版。在历次修订中作者始终秉承:提问清楚、行文简洁、论证严密、通俗易懂。在这期间,我们收到全国各地许多教学一线教师和读者的来信,对本书的内容与讲法提出许多宝贵意见和建议,这对提高本书的修订质量起到重要作用。借此再版之机,向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订,对此前印刷错误作了修正,并对第十三章内容作了部分增补,使其内容更加充实完整。同时,适当补充数字资源(以图标示意)。

此次修订,始终得到高等教育出版社的大力支持和热心帮助。编辑李蕊和张晓丽同志对本书的修订工作给予了具体的帮助和指导,为提高修订质量做了大量工作。在此,谨向她们表示衷心的感谢。

此次修订,由于本书的原作者刘玉琰先生、傅沛仁先生已辞世,第六版的修订工作由刘伟和林玗负责完成,并以《数学分析讲义》(第六版)的出版向刘玉琰先生、傅沛仁先生致敬!

编者

2018 年 3 月于长春



第五版前言



第四版前言



第三版前言



第二版前言

## 一、集合符号

### 1. 集合与元素之间

符号“ $\in$ ”表示“属于”；符号“ $\notin$ ”(或“ $\notin$ ”)表示“不属于”；符号“ $P(x)$ ”表示“元素  $x$  具有性质  $P$ ”。

设  $A$  是集合,  $x$  是元素. 例如:

$x \in A$ ——元素  $x$  属于  $A$ ;  $x \notin A$  (或  $x \notin A$ )——元素  $x$  不属于  $A$ ;  $\{x | x \in A, P(x)\}$ ——集合  $A$  中具有性质  $P$  的元素  $x$  的全体.

### 2. 集合之间

符号“ $\subset$ ”表示“包含”；符号“ $=$ ”表示“相等”；符号“ $\emptyset$ ”表示“空集”；符号“ $\cup$ ”表示“并”或“和”；符号“ $\cap$ ”表示“交”或“乘”；符号“ $\setminus$ ”表示“差”。

设  $A$  与  $B$  是两个集合. 例如:

$B \subset A$ —— $B$  的任意元素  $x$  都是  $A$  的元素, 或  $B$  是  $A$  的子集, 或  $B$  被  $A$  包含.

$B \subset A$ , 且  $A \neq B$  (或  $B \subsetneq A$ )—— $B$  是  $A$  的真子集.

$A \setminus B = \{x | x \in A, \text{但 } x \notin B\}$ —— $B$  关于  $A$  的差集, 如图 0.1 的 (a).

若  $B \subset A$ ,  $\complement_A B = \{x | x \in A, \text{但 } x \notin B\}$ ——由属于  $A$  而不属于  $B$  的元素所组成的集合, 或  $A$  中子集  $B$  的“补集”或“余集”, 如图 0.1 的 (b).

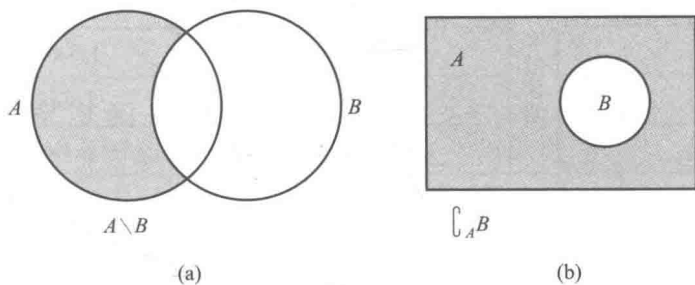


图 0.1

$A \cup B$ —— $A$  与  $B$  的并集或和集, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \text{如图 0.2 的 (a).}$$

$A \cap B$ —— $A$  与  $B$  的交集或积集, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 同时 } x \in B\}, \text{如图 0.2 的 (b).}$$

设  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  是一列无限多个集合.

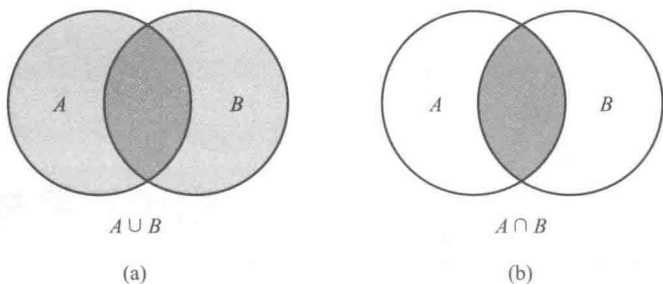


图 0.2

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{存在某个正整数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{对任意正整数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}.$$

## 二、数集符号

本书所说的数都是实数.全体实数,即实数集,记为  $\mathbf{R}$ .我们已知实数集  $\mathbf{R}$  中的数和数轴上的点是一一对应的,因此也称  $\mathbf{R}$  是**实直线**.常将“数  $a$ ”说成“点  $a$ ”,反之亦然.本书所说的数集都是实数集  $\mathbf{R}$  的子集.实数集  $\mathbf{R}$  有些常用的重要子集:

符号“ $\mathbf{N}_+$ ”表示正整数集;符号“ $\mathbf{N}$ ”表示**自然数集**;符号“ $\mathbf{Z}$ ”表示**整数集**;符号“ $\mathbf{Q}$ ”表示**有理数集**,有

$$\mathbf{N}_+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

符号  $\mathbf{R}_+$  表示正实数集,符号  $\mathbf{R}_-$  表示负实数集,有

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{R}_+, \quad \mathbf{N}_+ \subset \mathbf{R}_+.$$

### 1. 区间

为了书写简练,将各种区间的符号、名称、定义列表如下: ( $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a < b$ )

| 符 号            | 名 称  |      | 定 义                          |
|----------------|------|------|------------------------------|
| $(a, b)$       | 有限区间 | 开区间  | $\{x \mid a < x < b\}$       |
| $[a, b]$       |      | 闭区间  | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ |
| $(a, b]$       |      | 半开区间 | $\{x \mid a < x \leq b\}$    |
| $[a, b)$       |      | 半开区间 | $\{x \mid a \leq x < b\}$    |
| $(a, +\infty)$ | 无穷区间 | 开区间  | $\{x \mid a < x\}$           |
| $[a, +\infty)$ |      | 闭区间  | $\{x \mid a \leq x\}$        |
| $(-\infty, a)$ |      | 开区间  | $\{x \mid x < a\}$           |
| $(-\infty, a]$ |      | 闭区间  | $\{x \mid x \leq a\}$        |

符号  $+\infty$  和  $-\infty$  分别读作“正无穷大”和“负无穷大”,符号  $\infty$  是  $+\infty$  和  $-\infty$  的通称,读作“无穷大”.在数学分析中不把它们看作数,它们在数轴上也没有位置,一般不与实数作四则运算.但它们与实数有顺序关系,  $+\infty$  表示比一切实数都大,  $-\infty$  表示比一切实数都小,即对任意实数  $x$ , 有  $-\infty < x < +\infty$ . 无穷开区间  $(-\infty, +\infty)$  也表示实数集  $\mathbf{R}$ .

## 2. 邻域

设  $a \in \mathbf{R}$ , 任意  $\delta > 0$ .

数集  $\{x \mid |x-a| < \delta\}$  记为  $U(a, \delta)$ , 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta),$$

称为  $a$  的  $\delta$  邻域. 当不需要注明邻域半径  $\delta$  时, 通常是对某个确定的邻域半径  $\delta$ , 常将它表示为  $U(a)$ , 简称  $a$  的邻域.

数集  $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$  记为  $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ , 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\},$$

也就是在  $a$  的  $\delta$  邻域  $U(a, \delta)$  中去掉  $a$ , 称为  $a$  的  $\delta$  去心邻域. 当不需要注明邻域半径  $\delta$  时, 通常是对某个确定的邻域半径  $\delta$ , 常将它记为  $\overset{\circ}{U}(a)$ , 简称  $a$  的去心邻域.

## 三、逻辑符号

数学分析的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的, 其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号. 使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

## 1. 连词符号

符号“ $\Rightarrow$ ”表示“蕴涵”或“推得”, 或“若……, 则……”.

符号“ $\Leftrightarrow$ ”表示“充分必要”, 或“等价”.

设  $A, B$  是两个陈述句, 可以是条件, 也可以是命题. 例如:

$A \Rightarrow B$ ——若命题  $A$  成立, 则命题  $B$  成立; 或命题  $A$  蕴涵命题  $B$ ; 称  $A$  是  $B$  的充分条件, 同时也称  $B$  是  $A$  的必要条件.

$n$  是整数  $\Rightarrow n$  是有理数.

$A \Leftrightarrow B$ ——命题  $A$  与命题  $B$  等价; 或命题  $A$  蕴涵命题  $B (A \Rightarrow B)$ , 同时命题  $B$  也蕴涵命题  $A (B \Rightarrow A)$ ; 或  $A(B)$  是  $B(A)$  的充分必要条件.

$A \subset B \Leftrightarrow$  任意  $x \in A$ , 有  $x \in B$ .

## 2. 量词符号

符号“ $\forall$ ”表示“任意”, 或“任意一个”.

符号“ $\exists$ ”表示“存在某个”或“能找到”.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例如, 数集  $A$  有上界、有下界和有界的定义:

数集  $A$  有上界  $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leq b$ ;

数集  $A$  有下界  $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } a \leq x$ ;

数集  $A$  有界  $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in A, \text{有 } |x| \leq M$ .

设有命题: “集合  $A$  中任意元素  $a$  都有性质  $P(a)$ ”, 用符号记为

$$\forall a \in A, \text{有 } P(a).$$

显然, 这个命题的否命题是: “集合  $A$  中存在某个元素  $a_0$  没有性质  $P(a_0)$ ”, 用符号记为

$$\exists a_0 \in A, \text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题. 由此可见, 否定一个命题, 要将原命题中的“ $\forall$ ”改为“ $\exists$ ”, 将

“ $\exists$ ”改为“ $\forall$ ”，并将性质  $P$  否定.例如，数集  $A$  有上界与数集  $A$  无上界是互否命题，用符号表示就是：

数集  $A$  有上界  $\iff \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leq b;$

数集  $A$  无上界  $\iff \forall b \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in A, \text{有 } b < x_0.$

#### 四、其他符号

符号“ $\max$ ”表示“最大”(它是 maximum(最大)的缩写).

符号“ $\min$ ”表示“最小”(它是 minimum(最小)的缩写).

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个实数.例如：

$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ —— $n$  个实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中最大数.

$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ —— $n$  个实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中最小数.

符号  $[a]$  表示不超过  $a$  的最大整数.例如：

$$[\pi] = [3.141\ 5\cdots] = 3,$$

$$[-e] = [-2.718\cdots] = -3,$$

$$[0] = 0, \quad [5] = 5.$$

符号“ $n!$ ”表示“不超过  $n$  的所有正整数的连乘积”，读作“ $n$  的阶乘”，即

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

规定： $0! = 1$ .

符号“ $n!!$ ”表示“不超过  $n$  并与  $n$  有相同奇偶性的正整数的连乘积”读作“ $n$  的双阶乘”，即

$$(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1,$$

$$(2k)!! = (2k) \cdot (2k-2) \cdot \cdots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2,$$

$$9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, \quad 12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

符号“ $C_n^m$ ”( $n, m \in \mathbf{N}_+$ , 且  $m \leq n$ ) 表示“从  $n$  个不同元素中取  $m$  个元素的组合数”，即

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

有公式：

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad \text{与} \quad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

#### 五、几个有用的不等式

**不等式 1** 若  $\forall n \in \mathbf{N}_+$ , 且  $n \geq 2$ , 有不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

**证明** 设  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$ , 将  $A$  中每个分数放大, 有

$$\begin{aligned} A &< \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

或

$$A < \frac{1}{A \cdot (2n+1)}.$$

移项开平方得  $A < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ , 即

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

**不等式 2 (伯努利不等式)** 若  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 且  $x > -1$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}_+$ ,  $n > 1$ , 有不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

仅当  $x=0$  时等号成立.

**证明** 用数学归纳法. 如果  $x=0$ ,  $\forall n > 1$  时等号成立. 当  $x > -1$  与  $n > 1$  时, 将有严格不等式  $(1+x)^n > 1+nx$ .

当  $n=2$  时, 有不等式

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x.$$

设  $n=k$  时不等式成立. 往证  $n=k+1$  时不等式也成立.

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) \\ &= 1+kx+x+kx^2 > 1+kx+x \\ &= 1+(k+1)x. \end{aligned}$$

这就证明了, 对一切正整数  $n$ , 伯努利不等式成立.

**不等式 3** 若  $x_i > 0, i=1, 2, \dots, n$ , 且  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ , 则有不等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

仅当  $x_i = 1, i=1, 2, \dots, n$  时等号成立.

**证明** 用数学归纳法. 当  $n=2$  时, 知  $x_1 x_2 = 1$ , 设  $x_1 > 0$ , 有  $x_2 = \frac{1}{x_1}$ , 于是, 不等式成立, 即

$$x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2 \quad \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2, a > 0, b > 0 \right).$$

假设  $n=k$  时不等式成立, 往证  $n=k+1$ , 不等式也成立. 分两种情况证明:

第一种情况, 当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x_{k+1} = 1$  时, 显然有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = k+1.$$

即等号成立.

第二种情况, 因为  $x_i (i=1, 2, \dots, k+1)$  不能全为 1, 所以必有因子小于 1, 也必有因子大于 1, 不失一般性, 令  $x_1 < 1, x_2 > 1$ , 于是有

$$(x_1 x_2) x_3 \cdots x_{k+1} = 1.$$

设  $y = x_1 x_2$ , 则  $y x_3 x_4 \cdots x_{k+1} = 1$ . 由归纳假设, 有  $y + x_3 + x_4 + \cdots + x_{k+1} \geq k$  ( $k$  个数之和), 但是

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} \\ &= y + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} + x_1 + x_2 - y \\ &\geq k + x_1 + x_2 - y + 1 - 1 \\ &= k + 1 + x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 1 \\ &= k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1). \end{aligned}$$

已知  $x_2 - 1 > 0, 1 - x_1 > 0$ , 于是, 有不等式

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geq k + 1$$

成立. 仅当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$  时等号成立是显然的.

**不等式 4** 若  $\forall x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ . 设

$$T_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \quad (\text{调和平均}),$$

$$J_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad (\text{几何平均}),$$

$$S_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad (\text{算术平均}),$$

有不等式

$$T_n \leq J_n \leq S_n \quad (\text{调和平均} \leq \text{几何平均} \leq \text{算术平均}),$$

同时有  $T_n = J_n = S_n \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ .

**证明** 由不等式 3, 当  $\frac{x_1}{J_1} \cdot \frac{x_2}{J_2} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{J_n} = 1$  时, 有

$$\frac{x_1}{J_1} + \frac{x_2}{J_2} + \cdots + \frac{x_n}{J_n} \geq n,$$

$$\text{即 } J_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = S_n.$$

由此结果, 将  $x_i$  取倒数, 有

$$\frac{1}{J_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{T_n},$$

即

$$T_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = J_n.$$

于是, 有

$$T_n \leq J_n \leq S_n.$$

同时当且仅当  $\frac{x_1}{J_1} = \frac{x_2}{J_2} = \cdots = \frac{x_n}{J_n}$  或  $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n}$  时, 即当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$  时, 等号成立, 即

$$T_n = J_n = S_n.$$

调和平均  $\leq$  几何平均  $\leq$  算术平均.

**注** 这是一个著名的不等式, 在初等数学中是很有用的. 它有很多的证法, 可直接应用数学归纳法, 或者应用数学归纳法的变形等, 这里我们是应用数学归纳的变形不等式 3 证明的. 在数学分析中将应用凸函数的性质证明这个不等式, 也是比较简单的 (见 § 6.4 例 17).

**不等式 5** 若  $\forall n \in \mathbf{N}_+$ , 且  $n > 2$ , 有不等式

$$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

**证明** 先证左侧的不等式, 即  $n^n \leq (n!)^2$ , 有

$$(n!)^2 = n! \cdot n!$$

$$= [1 \cdot n] \cdot [2 \cdot (n-1)] \cdot [3 \cdot (n-2)] \cdot \cdots \cdot$$

$$[k \cdot (n-k+1)] \cdot \cdots \cdot [n \cdot 1].$$

因为方括号中有两个首尾的因子相等, 且小于其他因子, 对  $n-k > 1$  和  $k > 0$ , 有

$$(k+1) \cdot (n-k) = k \cdot (n-k) + n - k$$

$$> k \cdot 1 + (n-k) = n.$$

于是, 有

$$n^n < (n!)^2 \quad \text{或} \quad \sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}.$$

再证右侧不等式, 即  $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$ . 因为  $n$  个正整数都不相等, 所以由不等式 4, 有

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2},$$

于是,  $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$ ,  $n=1$  等号成立.

**不等式 6** 若  $\forall n \in \mathbf{N}_+$ , 有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

**证明** 取  $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{1}{n}, \cdots, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ . 由不等式 4, 几何平均不超过算术平均, 又

因为上面  $n+1$  个数不全相等, 有

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

不等式两端取  $n+1$  次方, 即

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

## 常用符号与不等式

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| 第一章 函数 .....                                              | 1  |
| § 1.1 函数 .....                                            | 1  |
| 一、函数概念(1) 二、函数的四则运算(4) 三、函数的图像(5)                         |    |
| 四、数列(6) 练习题 1.1(7)                                        |    |
| § 1.2 四类具有特殊性质的函数 .....                                   | 8  |
| 一、有界函数(9) 二、单调函数(11) 三、奇函数与偶函数(13)                        |    |
| 四、周期函数(14) 练习题 1.2(16)                                    |    |
| § 1.3 复合函数与反函数 .....                                      | 18 |
| 一、复合函数(18) 二、反函数(19) 三、初等函数(23)                           |    |
| 练习题 1.3(26)                                               |    |
| 第二章 极限 .....                                              | 28 |
| § 2.1 数列极限 .....                                          | 28 |
| 一、极限思想(28) 二、数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限(29) |    |
| 三、数列极限概念(31) 四、例(33) 练习题 2.1(38)                          |    |
| § 2.2 收敛数列 .....                                          | 39 |
| 一、收敛数列的性质(39) 二、收敛数列的四则运算(40)                             |    |
| 三、数列的收敛判别法(44) 四、子数列(51) 练习题 2.2(52)                      |    |
| § 2.3 函数极限 .....                                          | 54 |
| 一、扩充的实数集(54) 二、自变量的变化过程和函数的变化趋向(56)                       |    |
| 三、 $(+\infty, b)$ 类型的极限(57) 四、 $(a, b)$ 类型的极限(60)         |    |
| 五、例(61) 六、 $(a, \infty)$ 类型和其他类型的无穷大(65)                  |    |
| 七、无穷小(67) 练习题 2.3(68)                                     |    |
| § 2.4 函数极限的定理 .....                                       | 69 |
| 一、函数极限的性质(69) 二、函数极限与数列极限的关系(71)                          |    |
| 三、函数极限存在判别法(73) 四、例(76)                                   |    |
| 五、无穷小与无穷大的比较(78) 练习题 2.4(81)                              |    |
| 第三章 连续函数 .....                                            | 85 |
| § 3.1 连续函数 .....                                          | 85 |
| 一、连续函数概念(85) 二、例(86) 三、间断点及其分类(87)                        |    |
| 练习题 3.1(90)                                               |    |
| § 3.2 连续函数的性质 .....                                       | 91 |
| 一、连续函数的局部性质(91) 二、闭区间连续函数的整体性质(91)                        |    |

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| 三、反函数的连续性(94) 四、初等函数的连续性(94)                                             |     |
| 练习题 3.2(101)                                                             |     |
| <b>第四章 实数的连续性</b>                                                        | 103 |
| § 4.1 实数连续性定理                                                            | 103 |
| 一、闭区间套定理(103) 二、确界定理(104)                                                |     |
| 三、有限覆盖定理(108) 四、聚点定理(109)                                                |     |
| 五、致密性定理(110) 六、柯西收敛准则(111)                                               |     |
| 练习题 4.1(111)                                                             |     |
| § 4.2 闭区间连续函数整体性质的证明                                                     | 112 |
| 一、性质的证明(112) 二、一致连续性(115) 练习题 4.2(119)                                   |     |
| <b>第五章 导数与微分</b>                                                         | 121 |
| § 5.1 导数                                                                 | 121 |
| 一、实例(121) 二、导数概念(123) 三、例(125) 练习题 5.1(128)                              |     |
| § 5.2 求导法则与导数公式                                                          | 130 |
| 一、导数的四则运算(130) 二、反函数求导法则(133)                                            |     |
| 三、复合函数求导法则(135) 四、初等函数的导数(137)                                           |     |
| 练习题 5.2(141)                                                             |     |
| § 5.3 隐函数与参数方程求导法则                                                       | 143 |
| 一、隐函数求导法则(143) 二、参数方程求导法则(146)                                           |     |
| 练习题 5.3(148)                                                             |     |
| § 5.4 微分                                                                 | 149 |
| 一、微分概念(149) 二、微分的运算法则和公式(152)                                            |     |
| 三、微分在近似计算上的应用(153) 练习题 5.4(154)                                          |     |
| § 5.5 高阶导数与高阶微分                                                          | 155 |
| 一、高阶导数(155) 二、莱布尼茨公式(157) 三、高阶微分(160)                                    |     |
| 练习题 5.5(161)                                                             |     |
| <b>第六章 微分学基本定理及其应用</b>                                                   | 163 |
| § 6.1 中值定理                                                               | 163 |
| 一、罗尔定理(163) 二、拉格朗日定理(165) 三、柯西定理(167)                                    |     |
| 四、例(168) 练习题 6.1(170)                                                    |     |
| § 6.2 洛必达法则                                                              | 172 |
| 一、 $\frac{0}{0}$ -型(172) 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ -型(175) 三、其他待定型(178) |     |
| 练习题 6.2(182)                                                             |     |
| § 6.3 泰勒公式                                                               | 183 |
| 一、泰勒公式(183) 二、常用的几个展开式(187) 练习题 6.3(191)                                 |     |
| § 6.4 导数在研究函数上的应用                                                        | 192 |
| 一、函数的单调性(192) 二、函数的极值与最值(194)                                            |     |
| 三、不等式(200) 四、函数的凸性(204) 五、曲线的渐近线(213)                                    |     |
| 六、描绘函数图像(216) 练习题 6.4(220)                                               |     |
| <b>第七章 不定积分</b>                                                          | 222 |
| § 7.1 不定积分                                                               | 222 |
| 一、原函数(222) 二、不定积分(223) 练习题 7.1(227)                                      |     |

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| § 7.2 分部积分法与换元积分法 .....                          | 227 |
| 一、分部积分法(228) 二、换元积分法(231) 练习题 7.2(237)           |     |
| § 7.3 有理函数的不定积分 .....                            | 239 |
| 一、代数的预备知识(239) 二、有理函数的不定积分(242)                  |     |
| 练习题 7.3(246)                                     |     |
| § 7.4 简单无理函数与三角函数的不定积分 .....                     | 246 |
| 一、简单无理函数的不定积分(246) 二、三角函数的不定积分(250) 练习题 7.4(254) |     |
| <b>第八章 定积分</b> .....                             | 256 |
| § 8.1 定积分 .....                                  | 256 |
| 一、实例(256) 二、定积分概念(258)                           |     |
| § 8.2 可积准则 .....                                 | 261 |
| 一、小和与大和(261) 二、可积准则(263) 三、三类可积函数(266)           |     |
| 四、再论可积准则(268) 练习题 8.2(271)                       |     |
| § 8.3 定积分的性质 .....                               | 273 |
| 练习题 8.3(278)                                     |     |
| § 8.4 定积分的计算 .....                               | 279 |
| 一、按照定义计算定积分(279) 二、积分上限函数(281)                   |     |
| 三、微积分基本定理(283) 四、定积分的分部积分法(285)                  |     |
| 五、定积分的换元积分法(286) 六、中值定理(293)                     |     |
| 七、对数函数的积分定义(297)                                 |     |
| 八、指数函数——对数函数的反函数(300) 练习题 8.4(302)               |     |
| § 8.5 定积分的应用 .....                               | 305 |
| 一、微元法(305) 二、平面区域的面积(307)                        |     |
| 三、平面曲线的弧长(311) 四、应用截面面积求体积(315)                  |     |
| 五、旋转体的侧面积(318) 六、变力作功(319) 练习题 8.5(321)          |     |
| § 8.6 定积分的近似计算 .....                             | 322 |
| 一、梯形法(322) 二、抛物线法(325) 练习题 8.6(327)              |     |
| <b>部分练习题答案</b> .....                             | 329 |

# 第一章

## 函数

在自然科学、工程技术,甚至在某些社会科学中,函数是被广泛应用的数学概念之一,其重要意义远远超出了数学范围.在数学中函数处于基础的核心地位.函数不仅是贯穿于中学数学的一条主线,它也是数学分析这门课程研究的对象.

中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数概念,并在此基础上,应用函数的图形,直观地了解了函数的一些简单性质.本章除对中学数学的函数及其性质重点复习外,根据本课与后继课的需要,将对函数作深入的讨论.

### § 1.1 函 数

#### 一、函数概念

在一个自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系着.这是物质世界的一个普遍规律.下面列举几个有两个变量互相联系着的例子:

**例 1** 真空中自由落体,物体下落的时间  $t$  与下落的距离  $s$  互相联系着.如果物体距地面的高度为  $h$ ,

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right] \quad ①$$

都对应一个距离  $s$ . 已知  $t$  与  $s$  之间的对应关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中  $g$  是重力加速度,是常数.

**例 2** 球的半径  $r$  与该球的体积  $V$  互相联系着.  $\forall r \in [0, +\infty)$  都对应唯一一个球的体积  $V$ . 已知  $r$  与  $V$  之间的对应关系是

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中  $\pi$  是圆周率,是常数.

① 当  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  时,由  $s = \frac{1}{2}gt^2$ ,有  $s = h$ ,即物体下落到地面.

**例 3** 某地某日时间  $t$  与气温  $T$  互相联系着,如图 1.1.对 13 时至 23 时内任意时间  $t$  都对应着唯一的气温  $T$ .已知  $t$  与  $T$  的对应关系是图 1.1 中的气温曲线.横坐标表示时间  $t$ ,纵坐标表示气温  $T$ .曲线上任意点  $P(t, T)$  表示在时间  $t$  对应着的气温是  $T$ .

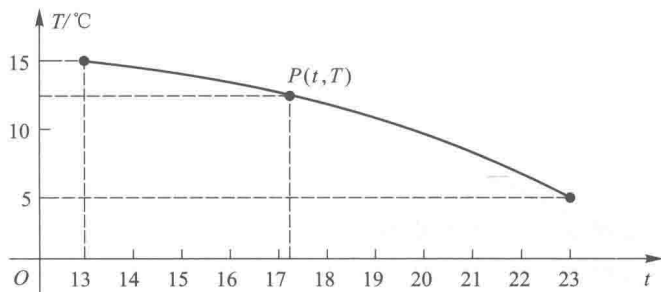


图 1.1

**例 4** 在气压为 101.325 kPa 时,温度  $T$  与水的体积  $V$  互相联系着.实测如下表:

| $T/^{\circ}\text{C}$ | 0   | 2      | 4      | 6      | 8      | 10      | 12      | 14      |
|----------------------|-----|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| $V/\text{cm}^3$      | 100 | 99.990 | 99.987 | 99.990 | 99.998 | 100.012 | 100.032 | 100.057 |

对  $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$  中每个温度  $T$  都对应唯一的一个体积  $V$ ,已知  $T$  与  $V$  的对应关系用上面的表格表示.

**例 5**  $\forall x \in \mathbf{R}$  都对应唯一的一个数  $y = \sin x$ ,即  $x$  与  $y$  之间的对应关系是

$$y = \sin x.$$

**例 6**  $\forall x \in (-5, \pi]$  都对应唯一的一个数  $y = 3x^2 + x - 1$ ,即  $x$  与  $y$  之间的对应关系是

$$y = 3x^2 + x - 1.$$

上述前四个实例,分属于不同的学科,实际意义完全不同.但是,从数学角度看,它们与后两个例子却有共同的特征:都有一个数集和一个对应关系,对于数集中任意数  $x$ ,按照对应关系都对应  $\mathbf{R}$  中唯一的一个数.于是有如下的函数概念:

**定义** 设  $A$  是非空实数集.若存在对应关系  $f$ ,对  $A$  中任意数  $x$  ( $\forall x \in A$ ),按照对应关系  $f$ ,对应唯一的一个  $y \in \mathbf{R}$ ,则称  $f$  是定义在  $A$  上的函数,记为

$$f: A \longrightarrow \mathbf{R}.$$

数  $x$  对应的数  $y$  称为  $x$  的函数值,记为  $y = f(x)$ . $x$  称为自变量, $y$  称为因变量.数集  $A$  称为函数  $f$  的定义域,函数值的集合  $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$  称为函数  $f$  的值域.

函数  $f$  的值域  $f(A)$  可能是  $\mathbf{R}$  或是  $\mathbf{R}$  的真子集.我们看到,这里的  $A$  与  $\mathbf{R}$  是不同的,反映  $f$  是从  $A$  到  $\mathbf{R}$  内的对应.

根据函数定义,不难看到,上述六例皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明:

1. 函数  $f$  由两个因素完全确定,一个是函数  $f$  的定义域  $A$ ;另一个是函数的对应关系  $f$ ,即  $\forall x \in A$ ,按照对应关系  $f$ ,都对应唯一的一个  $y \in \mathbf{R}$ ,读者一定要认清,符号  $f$  与  $f(x)$  之间的区别.函数  $f$  是对应关系(或对应法则), $f(x)$  是自变量  $x$  所对应的函数值,是实数,这是两个不同的概念,是不能混淆的.用符号“ $f: A \longrightarrow \mathbf{R}$ ”表示  $f$  是定义在数集  $A$  上的函数,十分清楚、明确.特别是在抽象的学科中使用这个函数符号更显得方便.但