高等学校教材

数学分析讲义

第六版（上册）

刘玉琏 傅沛仁 刘伟 林玎 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

第六版（上册）

刘玉琏 傅沛仁 刘伟 林玎 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书分上、下两册，是在第五版的基础上修订而成的，在内容和体例上未作较大变动。知识内容稍有扩充，涉及的方面很广。增加了少量的说明性文字，使内容更加完善，并适当补充了数字资源（以图标示意）。上册内容包括：函数，极限，连续函数，实数的连续性，导数与微分，微分学基本定理及其应用，不定积分，定积分等。

本书阐述细致，范例较多，便于自学，可作为高等师范学校本科教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析讲义.上册 / 刘玉琏等编.--6版.--北京:高等教育出版社,2019.4

ISBN 978-7-04-051441-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第036487号

项目策划 李艳馥 李 蕊 兰莹莹

策划编辑 李 蕊　责任编辑 张晓丽　封面设计 王凌波　版式设计 马 云

插图绘制 于 博　责任校对 陈 杨　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	山东鸿君杰文化发展有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	22.75	版　次	1966年3月第1版
字　数	490千字		2019年4月第6版
购书热线	010-58581118	印　次	2019年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	44.00元

物 料 号 51441-00

数学分析讲义

第六版（上册）

刘玉琏 傅沛仁 刘伟 林玎 编

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1255301，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

数学分析简史（上）

数学分析简史（下）

第一版前言

http://abook.hep.com.cn/1255301

第六版前言

《数学分析讲义》自1966年出版以来，已进行五次修订再版。在历次修订中作者始终秉承：提问清楚、行文简洁、论证严密、通俗易懂。在这期间，我们收到全国各地许多教学一线教师和读者的来信，对本书的内容与讲法提出许多宝贵意见和建议，这对提高本书的修订质量起到重要作用。借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订，对此前印刷错误作了修正，并对第十三章内容作了部分增补，使其内容更加充实完整。同时，适当补充数字资源（以图标示意）。

此次修订，始终得到高等教育出版社的大力支持和热心帮助。编辑李蕊和张晓丽同志对本书的修订工作给予了具体的帮助和指导，为提高修订质量做了大量工作。在此，谨向她们表示衷心的感谢。

此次修订，由于本书的原作者刘玉琏先生、傅沛仁先生已辞世，第六版的修订工作由刘伟和林玎负责完成，并以《数学分析讲义》（第六版）的出版向刘玉琏先生、傅沛仁先生致敬！

编者

2018年3月于长春

第五版前言

第四版前言

第三版前言

第二版前言

常用符号与不等式

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号“$\in$”表示“属于”；符号“$\overline{\in}$”（或“$\notin$”）表示“不属于”；符号“$P(x)$”表示“元素 x 具有性质 P”.

设 A 是集合，x 是元素.例如：

$x\in A$——元素 x 属于 A；$x\overline{\in} A$（或 $x\notin A$）——元素 x 不属于 A；$\{x\mid x\in A, P(x)\}$——集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体.

2. 集合之间

符号“$\subset$”表示“包含”；符号“$=$”表示“相等”；符号“$\varnothing$”表示“空集”；符号“$\cup$”表示“并”或“和”；符号“$\cap$”表示“交”或“乘”；符号“$\setminus$”表示“差”.

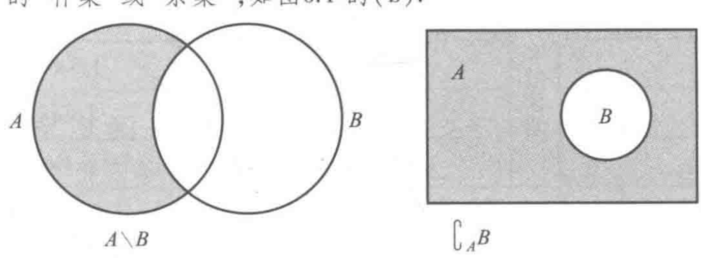
设 A 与 B 是两个集合.例如：

$B\subset A$——B 的任意元素 x 都是 A 的元素，或 B 是 A 的子集，或 B 被 A 包含.

$B\subset A$，且 $A\neq B$（或 $B\subsetneqq A$）——B 是 A 的真子集.

$A\setminus B=\{x\mid x\in A$，但 $x\overline{\in} B\}$——B 关于 A 的差集，如图 0.1 的(a).

若 $B\subset A$，$\complement_A B=\{x\mid x\in A$，但 $x\overline{\in} B\}$——由属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合，或 A 中子集 B 的“补集”或“余集”，如图0.1 的(b).



(a) (b)

图 0.1

$A\cup B$——A 与 B 的并集或和集，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}，\text{如图 0.2 的(a)}.$$

$A\cap B$——A 与 B 的交集或积集，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 同时 } x\in B\}，\text{如图 0.2 的(b)}.$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一列无限多个集合.

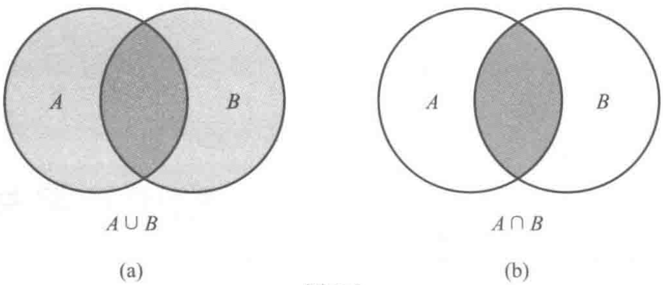


图 0.2

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x \mid 存在某个正整数 k, 有 x\in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{x \mid 对任意正整数 k, 有 x\in A_k\}.$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数.全体实数,即实数集,记为 **R**.我们已知实数集 **R** 中的数和数轴上的点是一一对应的,因此也称 **R** 是**实直线**.常将“数 a”说成“点 a”,反之亦然.本书所说的数集都是实数集 **R** 的子集.实数集 **R** 有些常用的重要子集:

符号“$\mathbf{N}_+$”表示正整数集;符号“**N**”表示**自然数集**;符号“**Z**”表示**整数集**;符号“**Q**”表示**有理数集**,有

$$\mathbf{N}_+\subset\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

符号 $\mathbf{R}_+$ 表示正实数集,符号 $\mathbf{R}_-$ 表示负实数集,有

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_-\cup\{0\}\cup\mathbf{R}_+,\quad \mathbf{N}_+\subset\mathbf{R}_+.$$

1. 区间

为了书写简练,将各种区间的符号、名称、定义列表如下:($a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$)

符　号	名　称		定　义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无穷区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$

符号$+\infty$ 和$-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”,符号∞ 是$+\infty$ 和$-\infty$ 的通称,读作“无穷大”.在数学分析中不把它们看作数,它们在数轴上也没有位置,一般不与实数作四则运算.但它们与实数有顺序关系,$+\infty$ 表示比一切实数都大,$-\infty$ 表示比一切实数都小,即对任意实数 x,有$-\infty<x<+\infty$.无穷开区间$(-\infty,+\infty)$也表示实数集 **R**.

2. 邻域

设 $a\in\mathbf{R}$,任意 $\delta>0$.

数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a 的 δ **邻域**.当不需要注明邻域半径 δ 时,通常是对某个确定的邻域半径 δ,常将它表示为 $U(a)$,简称 a 的**邻域**.

数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a,称为 a 的 δ 去心邻域.当不需要注明邻域半径 δ 时,通常是对某个确定的邻域半径 δ,常将它记为 $\mathring{U}(a)$,简称 a 的**去心邻域**.

三、逻辑符号

数学分析的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的,其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号.使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确.数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势.本书将普遍使用这些符号.

1. 连词符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“推得”,或“若……,则……”.

符号“$\Longleftrightarrow$”表示“充分必要”,或“等价”.

设 A,B 是两个陈述句,可以是条件,也可以是命题.例如:

$A\Rightarrow B$——若命题 A 成立,则命题 B 成立;或命题 A 蕴涵命题 B;称 A 是 B 的充分条件,同时也称 B 是 A 的必要条件.

$$n \text{ 是整数} \Rightarrow n \text{ 是有理数}.$$

$A\Longleftrightarrow B$——命题 A 与命题 B 等价;或命题 A 蕴涵命题 $B(A\Rightarrow B)$,同时命题 B 也蕴涵命题 $A(B\Rightarrow A)$;或 $A(B)$ 是 $B(A)$ 的充分必要条件.

$$A\subset B\Longleftrightarrow \text{任意 } x\in A, \text{有 } x\in B.$$

2. 量词符号

符号“$\forall$”表示“任意”,或“任意一个”.

符号“$\exists$”表示“存在某个”或“能找到”.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确.例如,数集 A 有上界、有下界和有界的定义:

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Longleftrightarrow \exists b\in\mathbf{R}, \forall x\in A, \text{有 } x\leqslant b;$$

$$\text{数集 } A \text{ 有下界} \Longleftrightarrow \exists a\in\mathbf{R}, \forall x\in A, \text{有 } a\leqslant x;$$

$$\text{数集 } A \text{ 有界} \Longleftrightarrow \exists M>0, \forall x\in A, \text{有 } |x|\leqslant M.$$

设有命题:“集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$”,用符号记为

$$\forall a\in A, \text{有 } P(a).$$

显然,这个命题的否命题是:“集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$”,用符号记为

$$\exists a_0\in A, \text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题.由此可见,否定一个命题,要将原命题中的“$\forall$”改为“$\exists$”,将

“$\exists$”改为“$\forall$”,并将性质 P 否定.例如,数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题,用符号表示就是:

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Longleftrightarrow \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leqslant b;$$

$$\text{数集 } A \text{ 无上界} \Longleftrightarrow \forall b \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in A, \text{有 } b < x_0.$$

四、其他符号

符号“max”表示“最大”(它是 maximum(最大)的缩写).

符号“min”表示“最小”(它是 minimum(最小)的缩写).

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个实数.例如:

$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$——$n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最大数.

$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$——$n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最小数.

符号$[a]$表示不超过 a 的最大整数.例如:

$[\pi]=[3.141\,5\cdots]=3$,

$[-\mathrm{e}]=[-2.718\cdots]=-3$,

$[0]=0$, $[5]=5$.

符号“$n!$”表示“不超过 n 的所有正整数的连乘积”,读作“n 的阶乘”,即

$n!=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$,

$7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

规定:$0!=1$.

符号“$n!!$”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积”读作“n 的双阶乘”,即

$$(2k-1)!!=(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1,$$

$$(2k)!!=(2k)\cdot(2k-2)\cdot\cdots\cdot 6\cdot 4\cdot 2,$$

$$9!!=9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1, \quad 12!!=12\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

符号“C_n^m”($n, m \in \mathbf{N}_+$,且 $m \leqslant n$)表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”,即

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

有公式:

$$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m} \quad \text{与} \quad \mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}.$$

五、几个有用的不等式

不等式 1 若 $\forall n \in \mathbf{N}_+$,且 $n \geqslant 2$,有不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明 设 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$,将 A 中每个分数放大,有

$$\begin{aligned} A &< \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

或

$$A<\frac{1}{A\cdot(2n+1)}.$$

移项开平方得 $A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

不等式 2(伯努利不等式) 若 $\forall x\in\mathbf{R}$,且 $x>-1$, $\forall n\in\mathbf{N}_+$, $n>1$,有不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$

仅当 $x=0$ 时等号成立.

证明 用数字归纳法.如果 $x=0$, $\forall n>1$ 时等号成立.当 $x>-1$ 与 $n>1$ 时,将有严格不等式 $(1+x)^n>1+nx$.

当 $n=2$ 时,有不等式

$$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x.$$

设 $n=k$ 时不等式成立.往证 $n=k+1$ 时不等式也成立.

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)>(1+kx)(1+x)\\&=1+kx+x+kx^2>1+kx+x\\&=1+(k+1)x.\end{aligned}$$

这就证明了,对一切正整数 n,伯努利不等式成立.

不等式 3 若 $x_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$,且 $x_1x_2\cdots x_n=1$,则有不等式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n.$$

仅当 $x_i=1$, $i=1,2,\cdots,n$ 时等号成立.

证明 用数学归纳法.当 $n=2$ 时,知 $x_1x_2=1$,设 $x_1>0$,有 $x_2=\frac{1}{x_1}$,于是,不等式成立,即

$$x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}\geqslant 2\quad\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2, a>0, b>0\right).$$

假设 $n=k$ 时不等式成立,往证 $n=k+1$,不等式也成立.分两种情况证明:

第一种情况,当 $x_1=x_2=\cdots=x_k=x_{k+1}=1$ 时,显然有

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=k+1.$$

即等号成立.

第二种情况,因为 $x_i(i=1,2,\cdots,k+1)$ 不能全为 1,所以必有因子小于 1,也必有因子大于 1,不失一般性,令 $x_1<1$, $x_2>1$,于是有

$$(x_1x_2)x_3\cdots x_{k+1}=1.$$

设 $y=x_1x_2$,则 $yx_3x_4\cdots x_{k+1}=1$.由归纳假设,有 $y+x_3+x_4+\cdots+x_{k+1}\geqslant k$($k$ 个数之和),但是

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}\\&=y+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1+x_2-y\\&\geqslant k+x_1+x_2-y+1-1\\&=k+1+x_1+x_2-x_1x_2-1\\&=k+1+(x_2-1)(1-x_1).\end{aligned}$$

已知 $x_2-1>0,1-x_1>0$，于是，有不等式

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}\geqslant k+1$$

成立. 仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时等号成立是显然的.

不等式 4 若 $\forall x_i>0, i=1,2,\cdots,n$. 设

$$T_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \quad (\text{调和平均}),$$

$$J_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \quad (\text{几何平均}),$$

$$S_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad (\text{算术平均}),$$

有不等式

$$T_n\leqslant J_n\leqslant S_n \quad (\text{调和平均}\leqslant\text{几何平均}\leqslant\text{算术平均}),$$

同时有 $T_n=J_n=S_n \Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明 由不等式 3，当 $\frac{x_1}{J_1}\cdot\frac{x_2}{J_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{J_n}=1$ 时，有

$$\frac{x_1}{J_1}+\frac{x_2}{J_2}+\cdots+\frac{x_n}{J_n}\geqslant n,$$

即 $J_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=S_n$.

由此结果，将 x_i 取倒数，有

$$\frac{1}{J_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{x_n}}\leqslant\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}=\frac{1}{T_n},$$

即

$$T_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=J_n.$$

于是，有

$$T_n\leqslant J_n\leqslant S_n.$$

同时当且仅当 $\frac{x_1}{J_1}=\frac{x_2}{J_2}=\cdots=\frac{x_n}{J_n}$ 或 $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}=\cdots=\frac{1}{x_n}$ 时，即当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立，即 $T_n=J_n=S_n$.

调和平均≤几何平均≤算术平均.

注 这是一个著名的不等式，在初等数学中是很有用的. 它有很多的证法，可直接应用数学归纳法，或者应用数学归纳法的变形等，这里我们是应用数学归纳的变形不等式 3 证明的. 在数学分析中将应用凸函数的性质证明这个不等式，也是比较简单的(见 §6.4 例 17).

不等式 5 若 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，且 $n>2$，有不等式

$$\sqrt{n}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}.$$

证明 先证左侧的不等式,即 $n^n\leqslant(n!)^2$,有

$$\begin{aligned}(n!)^2&=n!\cdot n!\\&=[1\cdot n]\cdot[2\cdot(n-1)]\cdot[3\cdot(n-2)]\cdot\cdots\cdot\\&\quad[k\cdot(n-k+1)]\cdot\cdots\cdot[n\cdot 1].\end{aligned}$$

因为方括号中有两个首尾的因子相等,且小于其他因子,对 $n-k>1$ 和 $k>0$,有

$$\begin{aligned}(k+1)\cdot(n-k)&=k\cdot(n-k)+n-k\\&>k\cdot 1+(n-k)=n.\end{aligned}$$

于是,有

$$n^n<(n!)^2\quad 或\quad \sqrt{n}<\sqrt[n]{n!}.$$

再证右侧不等式,即 $\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$.因为 n 个正整数都不相等,所以由不等式 4,有

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2},$$

于是,$\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$,$n=1$ 等号成立.

不等式 6 若 $\forall n\in\mathbf{N}_+$,有不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

证明 取 $x_1=1,x_2=1+\frac{1}{n},\cdots,x_{n+1}=1+\frac{1}{n}$.由不等式 4,几何平均不超过算术平均,又因为上面 $n+1$ 个数不全相等,有

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

不等式两端取 $n+1$ 次方,即

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

目 录

第一章
函数

在自然科学、工程技术,甚至在某些社会科学中,函数是被广泛应用的数学概念之一,其重要意义远远超出了数学范围.在数学中函数处于基础的核心地位.函数不仅是贯穿于中学数学的一条主线,它也是数学分析这门课程研究的对象.

中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数概念,并在此基础上,应用函数的图形,直观地了解了函数的一些简单性质.本章除对中学数学的函数及其性质重点复习外,根据本课与后继课的需要,将对函数作深入的讨论.

§1.1 函　　数

一、函数概念

在一个自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系着.这是物质世界的一个普遍规律.下面列举几个有两个变量互相联系着的例子:

例 1 真空中自由落体,物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着.如果物体距地面的高度为 h,

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]^{①}$$

都对应一个距离 s.已知 t 与 s 之间的对应关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度,是常数.

例 2 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着. $\forall r \in [0,+\infty)$ 都对应唯一一个球的体积 V.已知 r 与 V 之间的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率,是常数.

---

① 当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时,由 $s=\frac{1}{2}gt^2$,有 $s=h$,即物体下落到地面.

例 3　某地某日时间 t 与气温 T 互相联系着，如图 1.1.对 13 时至 23 时内任意时间 t 都对应着唯一一个气温 T.已知 t 与 T 的对应关系是图 1.1 中的气温曲线.横坐标表示时间 t，纵坐标表示气温 T.曲线上任意点 $P(t,T)$ 表示在时间 t 对应着的气温是 T.

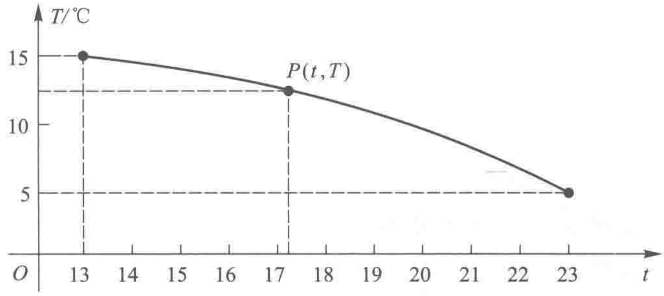


图 1.1

例 4　在气压为 101.325 kPa 时，温度 T 与水的体积 V 互相联系着.实测如下表：

T/℃	0	2	4	6	8	10	12	14
V/cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

对 $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ 中每个温度 T 都对应唯一一个体积 V，已知 T 与 V 的对应关系用上面的表格表示.

例 5　$\forall x\in\mathbf{R}$ 都对应唯一一个数 $y=\sin x$，即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=\sin x.$$

例 6　$\forall x\in(-5,\pi]$ 都对应唯一一个数 $y=3x^2+x-1$，即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=3x^2+x-1.$$

上述前四个实例，分属于不同的学科，实际意义完全不同.但是，从数学角度看，它们与后两个例子却有共同的特征：都有一个数集和一个对应关系，对于数集中任意数 x，按照对应关系都对应 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数.于是有如下的函数概念：

定义　设 A 是非空实数集.若存在对应关系 f，对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$，按照对应关系 f，对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，则称 f 是定义在 A 上的**函数**，记为

$$f: A\longrightarrow\mathbf{R}.$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**，记为 $y=f(x)$.x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.数集 A 称为函数 f 的**定义域**，函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.

函数 f 的值域 $f(A)$ 可能是 $\mathbf{R}$ 或是 $\mathbf{R}$ 的真子集.我们看到，这里的 A 与 $\mathbf{R}$ 是不同的，反映 f 是从 A 到 $\mathbf{R}$ 内的对应.

根据函数定义，不难看到，上述六例皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明：

1. 函数 f 由两个因素完全确定，一个是函数 f 的定义域 A；另一个是函数的对应关系 f，即 $\forall x\in A$，按照对应关系 f，都对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，读者一定要认清，符号 f 与 $f(x)$ 之间的区别.函数 f 是对应关系（或对应法则），$f(x)$ 是自变量 x 所对应的函数值，是实数，这是两个不同的概念，是不能混淆的.用符号“$f: A\longrightarrow\mathbf{R}$”表示 f 是定义在数集 A 上的函数，十分清楚、明确.特别是在抽象的学科中使用这个函数符号更显得方便.但