研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

群与代数表示引论

Introduction to Representations of Groups and Algebras

（第2版）

冯克勤　章　璞　李尚志　编著

中国科学技术大学出版社

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

群与代数表示引论

Introduction to Representations of Groups and Algebras

（第 2 版）

冯克勤　章　璞　李尚志　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍群与代数表示的基本理论与方法，侧重于有限群的常表示理论和有限维半单代数的表示理论. 在强调线性代数方法的同时，也突出体现了群表示与代数表示的联系.

本书假定读者学过线性代数和近世代数.

本书可作为数学系研究生公共基础课教材和高年级本科生选修课教材，也可作为相关专业的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

群与代数表示引论/冯克勤，章璞，李尚志编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2006. 3(2009. 3 重印)

(研究生教学用书)

ISBN 978-7-312-01882-4

Ⅰ. 群…　Ⅱ. ①冯…②章…③李…　Ⅲ. ①群论—研究生—教材 ②代数表示—研究生—教材　Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 000998 号

群与代数表示引论　　冯克勤　章　璞　李尚志　编著

责任编辑：李攀峰

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
网址：http://press. ustc. edu. cn

印刷　合肥现代印务有限公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　710 mm×960 mm　1/16

印张　14

字数　267 千

版次　2003 年 1 月第 1 版　2006 年 3 月第 2 版

印次　2009 年 3 月第 4 次印刷

定价　22.00 元

前　言

1828 年，17 岁的 E. Galois 发现 5 次和 5 次以上代数方程的根式可解性是由现今称为这个方程的 Galois 群的可解性所决定的. 这一天才的发现不仅开创了以代数结构为研究对象的近世代数，而且，由于群能够描述自然界的对称性，从而成为现代科学中最核心的数学概念和工具之一. 杨振宁先生曾说：“群论的美妙和它在物理中的应用对我后来的工作有决定性的影响.”

群对称是现代数学的灵魂，而研究它的基本工具是群表示论. 研究一个代数结构，除直接了解其内部构造外，有力的方法是让它“作用”在另一个对象上，通过考察作用的效果，达到理解这个代数结构本身的目的. 这一思想在后来的发展中如此重要，以至于现代表示论不仅以其在数学中的应用而生动，而且在物理、化学、建筑、信息乃至找矿等领域都有应用. I. Gelfand 说：“All of mathematics is some kind of representation theory.” E. Vinberg 称：“The theory of linear representations of groups is one of the most widely applied branches of algebra.”

在代数结构的表示中，群与代数之间的交叉最早. 历史进程中有几个里程碑是值得回顾的.

1843 年，W. R. Hamilton 发现四元数代数，被认为是有限维代数的起源；而 1896 年，F. G. Frobenius 发明有限群的特征标理论，标志着群表示论的诞生.

这一理论在初期就显示出在群结构中的应用：W. Burnside 1904 年用特征标理论证明 p^aq^b 阶群可解，直到 1972 年才有纯群论的证明；而 Frobenius 关于真正规子群存在的一个充分条件至今尚无纯群论的证明.

1905 年，I. Schur 对他的老师 Frobenius 的工作作了系统的简化，其方法是线性代数的. 他也开创了无限群表示 (一般线性群的多项式表示) 的研究.

1908 年，J. H. M. Wedderburn 建立了半单代数的表示理论；1929 年，E. Noether 在她的奠基性长文中用模统一了有限群的常表示和半单代数的表示. 在

E. Noether, E. Artin 和 R. Brauer 等的工作中，半单代数及其表示取得了现代的形式，并大部分推广到具有降链条件的环上.

20 世纪 20 年代， Schur 和 H. Weyl 将有限群的表示理论推广到紧群的连续表示. Peter-Weyl 定理推广了 Fourier 展开定理，成为调和分析的基础.

1935 年， Schur 的学生 Brauer 开创了有限群模表示论的研究，即在特征整除群的阶的域上的有限群表示论. 这也为有限单群的分类奠定了基础.

1956 年， N. Jacobson 出版了《 Structure of Rings 》一书，将有限维代数的理论推广到无限维代数和一般环上. 在群的模表示和非半单代数的表示中，仅仅研究不可约表示是远远不够的，而需要研究不可分解表示. Jordan-Hölder 定理和 Krull-Schmidt-Remak 定理是非半单代数表示中最基本的两条定理.

一方面，代数表示论的起点，通常被认为是 M. Auslander 和 A. V. Roiter 分别于 1974 年和 1968 年用不同的方法解决了 Brauer-Thrall 猜想 (如果有限维代数的不可分解表示的维数是有界的，则它仅有有限多个不可分解表示). 另一方面， Auslander 和 I. Reiten 关于几乎可裂序列，以及 C. M. Ringel 关于表示的 quiver 理论，反过来在模表示论中又有重要应用. 又如，由 A. Grothendieck 和 J. L. Verdier 引入的三角范畴，在 20 世纪 80 年代先后被 D. Happel 和 J. Rickard, M. Broué 引入代数和群的表示，成为重要的工具. 这种交叉式的发展显得十分突出.

自 1991 年起，我们在中国科学技术大学为研究生和高年级本科生开设此课程. 之后又分别在清华大学、上海交通大学、北京航空航天大学讲授. 本书是在讲义的基础上修改而成的. 此次列入教育部“研究生教学用书”再版，又作了仔细的增删修订.

虽可用模论统一处理有限群的常表示和半单代数的表示，但考虑到读者有非数学系学生，我们选择只用线性代数讲述群表示的基本概念和特征标理论. 这样无需很多准备就可进入主题，也体现出线性代数与表示论的直接联系. 待到第 3 章再系统讲模论，这时学生已有感性认识，也为诱导表示提供一般的语言和工具. 在流行的教材中， J. P. Serre 的书 [S] 是比较线性代数的，但仅对复表示而言. 尽管从复表示到一般的常表示无本质的困难，但我们还是乐意作若干改变，将结果叙述成一般常表示的形式，而保持线性代数的写法.

本书是基础教材，有限群主要涉及常表示．当然，也通过例子说明常表示与模表示的不同；对代数的表示，未涉及现代非半单代数表示论；对紧群的表示，未触及紧 Lie 群的表示．前 2 章中我们强调线性代数的方法，而后 3 章中则试图体现群表示与代数表示的联系．全书分 6 章．第 1 章介绍群表示的基本概念，第 2 章讲述特征标理论，第 3 章是关于代数上的模，第 4 章讲述诱导表示与诱导特征标，第 5 章证明了 Brauer 和 Artin 关于诱导特征标和有理特征标的定理以及另外几条重要定理，第 6 章介绍紧群上的表示．

本书力求条理清晰，通俗易懂；讲清思想、方法和线索；体现群表示与代数表示的联系；配以较多例题；习题中有的是重要的结论，我们鼓励读者多做．带星号的内容可略去不讲，不会影响到后面．

成书过程中主要参阅了 [AB], [CR2], [D], [Jac], [I], [S], [Sim], [Vin], 曹锡华 - 时俭益 [CS], 丘维声 [Q] 等文献．

刘绍学教授始终给予热情的鼓励和指导，并提出宝贵的修改意见．初版和再版之间，龚升教授和周青教授数次关心指正．成书过程中得到程艺教授及中国科学技术大学研究生院和教务处的支持．为讲义和初版指出打印错误的各届同学有：叶郁、黄华林、李立彬、许彬、徐松昀、李锦嘉、孙建华、宋柏林、方明、储诚浩、郭学军、傅广宇、王艳华、陈小伍、杜家春、姚远、吴伊涛、侯汝臣、赵青、程智、舒艳、杨静桦、尚轶伦、华波波、高楠、李志伟．武清宇协助校对初稿．余华敏女士打印了本书的初稿．此次再版，得到叶郁博士的帮助，并受到国家自然科学基金项目 10271113 和高校博士点专项基金项目 20020358042 的部分资助．一并致谢！

作者热诚欢迎读者提出宝贵意见．

冯克勤　于清华大学
章　璞　于上海交通大学
李尚志　于北京航空航天大学

2002 年 6 月初稿
2006 年 1 月再版修改

符 号 说 明

II.3.2	第 2 章 3.2 小节
定理 II.3.2	第 2 章 3.2 中的定理
定理 3.2	本章 3.2 中的定理
习题 I.3.4	第 1 章 §3 后习题 4
习题 3.4	本章 §3 后习题 4
习题 4	本节后习题 4
:	定义为
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{Z}$	整数环
$\mathbf{Z}_p$	p 阶素域
$\mathbf{Q}$	有理数域
ϕ	空集
$A-B$	集合 B 在集合 A 中的余集
$\subsetneqq$	真包含于
$\supsetneqq$	真包含
$\mathbf{R}^n$	n 维欧氏空间
$\mathbf{C}^n$	n 维酉空间
S^1	单位圆周
$x \mapsto y$	x 映到 y
$m\|n$	m 能整除 n
$m \nmid n$	m 不能整除 n
$\equiv$	同余
$\cong$	同构
$\oplus$	直和
$\times$	卡氏积 (或直积)
$\otimes_F$ 或 $\otimes_A$	在域 F(或在代数 A) 上的张量积
δ_{ij}	Kronecker 符号

1_V	V 的恒等变换
1_F	域 F 的单位元
$\mathbf{1}_G$	群 G 的单位表示或单位特征标
$\|G\|$	有限集 G 中所含元素的个数
$\underline{\mathbf{dim}}M$	模 M 的维数向量
D_n	n 次二面体群
S_n	n 次对称群
A_n	n 次交错群
$\mathbf{H}$	四元数代数
$M_n(F)$	域 F 上 n 阶全矩阵环
$GL_n(F)$	域 F 上 n 次一般线性群：F 上 n 阶可逆矩阵的乘法群
$SL_n(F)$	域 F 上 n 次特殊线性群：F 上行列式为 1 的 n 阶矩阵的乘法群
O_n	n 阶正交群：$\mathbf{R}$ 上 n 阶正交矩阵的乘法群
SO_n	n 阶特殊正交群：$\mathbf{R}$ 上行列式为 1 的 n 阶正交矩阵的乘法群
U_n	n 阶酉群：$\mathbf{C}$ 上 n 阶酉阵的乘法群
SU_n	n 阶特殊酉群：$\mathbf{C}$ 上行列式为 1 的 n 阶酉阵的乘法群
$GL(V)$	一般线性群
$H \leq G$	H 是 G 的子群
$N \lhd G$	N 是 G 的正规子群
$[G:H]$	子群 H 在 G 中的指数
G'	群 G 的换位子群
$G^{(i)}$	群 G 的第 i 次换位子群
$C_G(H)$	H 在群 G 中的中心化子
$N_G(H)$	H 在群 G 中的正规化子
$C_G(x)$	元素 x 在群 G 中的中心化子
$Z(G)$ 或 $Z(A)$	群 G(或代数 A) 的中心
$\mathrm{rad}(A)$ 或 $\mathrm{rad}(M)$	代数 A(或模 M) 的 Jacobson 根
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
$N \rtimes H$	正规子群 N 与子群 H 的半直积
${}^gH$	子群 H 的共轭子群 gHg^{-1}

$\mathrm{ann}\,(M)$	模 M 的零化子
Im	像
Ker	核
tr	迹
ρ_{reg}	正则表示
χ_{reg}	正则表示的特征标
χ_ρ	表示 ρ 的特征标
$\deg\rho$ 或 $\deg\chi$	表示 ρ(或特征标 χ) 的次数
$\mathrm{Ker}\rho$ 或 $\mathrm{Ker}\chi$	表示 ρ(或特征标 χ) 的核
$\mathrm{char}F$	域 F 的特征
$\overline{\mathrm{Irr}_F}G$	群 G 的所有互不等价的不可约 F- 表示的集合
$\mathrm{Irr}_F G$	群 G 的所有互不等价的不可约 F- 表示的特征标的集合
$R_F^+(G)$	群 G 的所有互不等价的 F- 表示的集合
$\mathrm{ch}_F^+(G)$	群 G 的所有互不等价的 F- 表示的特征标的集合
$\mathrm{ch}_F(G)$	群 G 的所有 F- 特征标的整线性组合的集合
$\mathrm{cf}_F(G)$	群 G 上 F- 值类函数的集合
$\mathrm{cf}^F(G)$	群 G 上 F- 值 F- 共轭类的类函数的集合
$C(G, \mathbf{C})$	紧群 G 上连续复值函数的集合
$\mathrm{Hom}_F(M, N)$	F- 空间 M 到 F- 空间 N 的全体 F- 线性映射的集合
$\mathrm{Hom}_G(M, N)$	群 G 的表示 M 到群 G 的表示 N 的全体 G- 模映射的集合
$\mathrm{Hom}_A(M, N)$	A- 模 M 到 A- 模 N 的全体模同态的集合
$\mathrm{End}_A(M)$	模 M 的自同态代数
$\mathrm{End}_F(V)$	向量空间 V 的全体 F- 线性变换作成的代数
ρ^G 或 ρ_H^G	子群 H 的表示 ρ 的诱导表示
W^G 或 W_H^G	子群 H 的表示 W 的诱导表示
V^K 或 ρ^K	群 G 的 F- 表示 V 或 ρ 通过基域 F 的扩张得到的 G 的 K- 表示
$\rho\#\varphi$	群 G_1 的表示 ρ 与群 G_2 的表示 φ 的外张量积
${}^g\rho$	群 G 的表示 ρ 的共轭表示： ${}^g\rho(h) = \rho(g^{-1}hg)$, $\forall h \in G$
ρ_H	群 G 的表示 ρ 在子群 H 上的限制表示
χ_H	群 G 的特征标 χ 在子群 H 上的限制

ρ^* 或 χ^*	表示 ρ(或特征标 χ) 的反轭表示 (或特征标)
V^*	向量空间 V 的对偶空间
nV	n 个表示 (或向量空间)V 的直和
$n\rho$	n 个表示 ρ 的直和
G_ρ	$G_\rho := \{g \in G \mid {}^g\rho \cong \rho\}$
$\mathrm{Gal}(E\|F)$	域 E 在子域 F 上的 Galois 群
$\Phi_n(t)$	n 次分圆多项式

目 录

前言 .... (I)
符号说明 .... (VII)

第 1 章 群表示的基本概念 .... (1)
§1 定义和例子 .... (1)
§2 子表示、商表示、表示的同态 .... (5)
§3 表示的常用构造法 .... (8)
§4 不可约表示与完全可约表示 .... (15)
§5 Maschke 定理 .... (19)
§6 表示的不可约分解 .... (21)
*§7 举例确定不可约表示 .... (23)

第 2 章 特征标理论 .... (28)
§1 特征标的基本概念 .... (28)
§2 特征标的正交关系 .... (33)
§3 分裂域上不可约常表示的个数 .... (37)
§4 特征标表计算举例 .... (42)
§5 从特征标表读群的结构 .... (51)
§6 整性定理与不可约复表示的维数 .... (55)
§7 Burnside 可解性定理 .... (58)

第 3 章 代数的表示 .... (61)
§1 域上代数 .... (61)
§2 代数上的模范畴 .... (66)
§3 Jordan-Hölder 定理 .... (78)
§4 Wedderburn-Artin 定理 .... (81)
§5 代数与模的 Jacobson 根 .... (89)
§6 Krull-Schmidt-Remak 定理 .... (96)

§7 投射模与内射模 ......(100)
§8 模在代数上的张量积 ......(108)
*§9 绝对单模与分裂域 ......(114)
*§10 应用：常表示的不可约特征标 ......(120)
§11 Frobenius 代数和对称代数 ......(122)

第 4 章 诱导表示与诱导特征标......(125)
§1 基本概念和性质 ......(125)
§2 模与类函数的 Frobenius 互反律 ......(133)
§3 Mackey 的子群定理 ......(137)
§4 诱导表示不可约的判定 ......(141)
§5 Clifford 定理 ......(143)
§6 Frobenius 群 ......(145)
*§7 单项表示与 M 群 ......(149)

第 5 章 Artin 定理与 Brauer 定理......(154)
§1 有理特征标的 Artin 定理 ......(154)
§2 Brauer 诱导定理 ......(159)
*§3 Green 定理： Brauer 定理的一个逆 ......(162)
*§4 Brauer 分裂域定理 ......(164)
*§5 不可约常表示的个数 (一般情形) ......(167)

第 6 章 紧群的表示......(174)
§1 紧群 ......(174)
§2 紧群上的不变积分 ......(182)
§3 紧群的线性表示 ......(184)
§4 不可约表示的矩阵元的正交关系 ......(187)
§5 Peter-Weyl 定理 ......(192)
§6 SU_2 与 SO_3 的复表示 ......(197)

参考文献......(204)
汉英名词索引......(206)

第 1 章　群表示的基本概念

本章介绍群表示的基本概念，包括群表示的定义与例子，常用的构造方法，不可约表示与完全可约表示，Maschke 定理，正则表示的不可约分解，最后举例确定群的不可约表示.

我们强调群 G 的表示是向量空间 V 上 $|G|$ 个可逆线性变换的理论：这 $|G|$ 个可逆线性变换以“群 G 的方式”同时作用在 V 上. 因此，从某种意义上讲，群表示可视为线性代数“非平凡”的推广.

§1　定义和例子

1.1　定义　设 G 是任一群，V 是域 F 上的向量空间. 如果存在群同态 $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 其中 $GL(V)$ 是一般线性群，即 V 上全体可逆线性变换作成的乘法群，则称 (V, ρ) 是 G 的一个 F- 线性表示，简称为 F- 表示 V, 或 F- 表示 ρ. 称 V 为表示空间. 若 V 是有限维的，将 $\dim_F V$ 称为该表示的维数或次数，记为 $\deg \rho$.

令 $\mathrm{Ker}\rho := \{\ g \in G \mid \rho(g) = 1_V\ \}$. 这是 G 的正规子群，称为表示 ρ 的核. 若 $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$, 则称 ρ 是忠实的表示.

因此，群 G 的 F- 表示 (V, ρ) 有两个要素，一为表示空间 V, 二为群同态 ρ. 要断言 (V, ρ) 是 G 的一个 F- 表示，必须而且只要验证如下两条：

(i)　ρ 是 G 到 $GL(V)$ 的映射，即 $\forall\ g \in G$, $\rho(g)$ 是 V 的可逆线性变换；

(ii)　$\forall\ g_1$, $g_2 \in G$, 均有　$\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2)$.

有时候，利用如下条件验证似乎更方便，即 (V, ρ) 是 G 的一个 F- 表示当且仅当上述条件 (ii) 和下述条件 (iii) 被满足：

(iii) ρ 是 G 到 $\mathrm{End}_F(V)$ 的映射且 $\rho(1) = 1_V$, 其中 $\mathrm{End}_F(V)$ 是 V 的全体线性变换作成的环.

1.2　群表示的实质是群在向量空间上的线性作用，因此有时用下述观点更自然.

定义 设 G 是任一群，V 是域 F 上的向量空间. 如果存在 G 在 V 上的 F-线性作用，即存在映射 $G\times V\to V$：$(g,v)\mapsto gv\in V$, $\forall (g,v)\in G\times V$, 满足

(i) $g(u+v)=gu+gv$, $\forall\ g\in G$, u, $v\in V$;

(ii) $g(av)=a(gv)$, $\forall\ g\in G$, $a\in F$, $v\in V$;

(iii) $1v=v$, $\forall\ v\in V$;

(iv) $(g_1\cdot g_2)v=g_1(g_2v)$, $\forall\ g_1$, $g_2\in G$, $v\in V$,

则称 V 是 G 的一个 F- 表示.

如同抽象代数中群在集合上的作用，上述定义中 (iii), (iv) 两条是说 G 在集合 V 上有一个作用；而 (i),(ii) 两条则是说这种作用是 F- 线性的，从而与 V 的 F- 向量空间结构是吻合的.

群表示的上述两种定义是等价的：若有 G 的 F- 表示 (V,ρ), 则

$$gv:=\rho(g)(v),\ \forall g\in G, v\in V,$$

给出了 G 在 V 上的 F- 线性作用；若有 G 在 V 上的 F- 线性作用，则 $g\mapsto\rho(g)$, $\forall g\in G$, 给出了 G 的 F- 表示 (V,ρ), 其中 $\rho(g)(v):=gv$, $\forall v\in V$.

今后，若无特别声明，我们**只研究群的有限维表示**.

1.3 例 1 (单位表示) 令 $V=F$. $\forall\ g\in G$, $a\in F$, 定义 $ga=a$. 则称 V 是 G 的单位 F- 表示或主表示，其次数是 1. 此时 $GL(V)\cong F^*$, 即 F 的全体非零元作成的乘法群，而相应的群同态 $\rho: G\to GL(V)\cong F^*$ 是单位同态 $\mathbf{1}$. 单位表示记为 $\mathbf{1}_G=(F,\mathbf{1})$, 其核为 G.

例 2 令 $G=D_4=\langle\ a,b\mid a^4=b^2=1, ba=a^3b\ \rangle=\langle\ a,b\mid a^4=b^2=1,(ba)^2=1\ \rangle$. 熟知 D_4 是正方形的对称群 (即平面上的将正方形变成自身的正交变换). 考虑 D_4 的如下 2 维复表示：

令 $V=\mathbf{C}^2=\mathbf{C}e_1\oplus\mathbf{C}e_2$, $\rho: G\to GL(V)$, 其中 $\rho(a^mb^n)=(\rho(a))^m\cdot(\rho(b))^n$, $0\le m\le 3$, $n=0,1$, 且

$$\rho(a)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix},\qquad \rho(b)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

欲证 (V,ρ) 是 G 的 $\mathbf{C}$- 表示，只要验证 1.1 中条件 (ii) 在 G 的定义关系上得到满足即可. 事实上，我们有

$$(\rho(a))^4 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\rho(b))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\rho(ba))^2 = (\rho(b)\cdot\rho(a))^2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3(矩阵表示与表示的矩阵)　用 $GL_n(F)$ 记全体 n 阶可逆矩阵作成的乘法群. 群同态 $\rho\colon\ G \longrightarrow GL_n(F)$ 称为 G 的一个 n 次 F- 矩阵表示.

G 的矩阵表示与 G 的有限维线性表示是一回事. 设有 G 的一个 n 次 F- 矩阵表示 ρ. 令 $V = F^n$. 则对于作用 $gv := \rho(g)v,\ \forall g \in G,\ v \in V$, V 是 G 的一个 n 次 F- 线性表示. 反之, 设 (V, ρ) 是 G 的一个 n 次 F- 线性表示. 选定 V 的一组 F- 基 $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$. 则得到 G 的 F- 矩阵表示 $\rho_{_B}$, 其中 $\rho_{_B}(g)$ 是 $\rho(g)$ 在基 B 下的矩阵, $\forall g \in G$.

给定有限群 G 的一个 n 维表示 (V, ρ), 等同于给定 $|G|$ 个 n 阶可逆矩阵 $\rho_{_B}(g), g \in G$, 使得

$$\rho_{_B}(g_1 \cdot g_2) = \rho_{_B}(g_1)\cdot\rho_{_B}(g_2), \quad \forall g_1,\ g_2 \in G.$$

若另选 V 的一组基 C, 则 (V, ρ) 可表达成矩阵表示 $(V, \rho_{_C})$ 的形式. 对于任一 $g \in G$, $\rho_{_C}(g)$ 与 $\rho_{_B}(g)$ 是同一可逆线性变换 $\rho(g)$ 在不同基下的矩阵, 因此 $\rho_{_C}(g) = T^{-1}\rho_{_B}(g)T,\ \forall g \in G$, 其中 T 是基 B 到基 C 的过渡矩阵 (从而与 g 的选取无关). 由此可见, 虽然矩阵表示 $(V, \rho_{_B})$ 与 $(V, \rho_{_C})$ 的形式不同, 但实质上是一回事. 描述这种形式上不同但实质上相同的表示就是表示等价的概念, 我们将在下一节中讨论.

因此, 如果认为线性代数是向量空间中一个线性变换的理论, 则有限群 G 的表示就是 $|G|$ 个可逆线性变换以 “ G 的方式” 同时作用在向量空间上的理论.

例 4(正则表示)　令 $V = FG$, 即 V 是以 G 中元素为基元作成的 F- 向量空间. 令 G 在 V 上的 F- 线性作用是由 G 中的乘法诱导的, 即 $\forall g \in G$, $x = \sum\limits_{h\in G} x_h h \in V$, 其中 $x_h \in F$, 定义

$$gx := \sum_{h\in G} x_h(g\cdot h).$$

则易证 1.2 中四条性质均满足, 从而 V 是 G 的 $|G|$ 维 F- 表示, 记为 $(FG, \rho_{\mathrm{reg}})$, 称为 G 的 F- 正则表示 (读者可自行写出用定义 1.1 叙述的形式). 它显然是忠实

的表示. (若 G 是无限群，则 G 的正则表示是无限维的.) 注意到正则表示有如下特点：$\rho_{\mathrm{reg}}(g)$ 将表示空间的一组基 G 仍变成这组基，$\forall g\in G$; 也就是说，群作用引起 G 中元的置换，从而正则表示在基 G 下的矩阵均是置换矩阵.

更一般地，我们有

例 5 (置换表示) 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 是有限 G- 集，即 G 在 S 上有一作用 (或等价地，给定了 G 到 n 次对称群 S_n 的一个群同态). 令 $V=FS$, 即 V 是以 S 中元素为基元的 F- 向量空间. 令 $\rho: G\to GL(V)$ 为如下群同态：$\forall g\in G$, $\rho(g)$ 是将任一基元 $i\in S$ 送到基元 gi 的可逆线性变换. 这样得到的表示称为由 G- 集 S 诱导的置换表示. 因此在基 S 下，任一线性变换 $\rho(g)$ 的矩阵均是置换矩阵.

特别地，若 $H\leq G$, 则 G 关于 H 的左陪集的集合 G/H 对于作用 $g(xH):=(gx)H$, $\forall g,x\in G$, 是一个 G- 集，从而得到相应的 G 的置换表示.

例 6 设 $G=\langle g\rangle$ 是 n 阶循环群. 考虑 G 的 F- 正则表示 ρ_{reg}. 则 $\rho_{\mathrm{reg}}(g)$ 是将 g^i 变到 $g^{i+1}, 1\leq i\leq n$, 的线性变换，因此 $\rho(g)$ 在基 $G=\{1,g,\cdots,g^{n-1}\}$ 下的矩阵为置换阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}.$$

从而 $\rho_{\mathrm{reg}}(g^i)$ 在 G 下的矩阵为 A^i, $0\leq i\leq n-1$.

例 7 设 $G=S_3$. 考虑由恒等映射 $G\to S_3$ 诱导出的置换表示 ρ. 令 $S=\{1,2,3\}$, $V=FS=F^3$. 则 ρ: $G\to GL(V)$ 是下述群同态:

$$(1)\longmapsto \rho_S((1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad (12)\longmapsto \rho_S((12))=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(13)\longmapsto \rho_S((13))=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad (23)\longmapsto \rho_S((23))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$(123) \longmapsto \rho_S((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (132) \longmapsto \rho_S((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

习　题

1. 详细验证定义 1.1 与定义 1.2 的等价性.

2. 设 $K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $G = S_4$. 则 $G/K \cong S_3$. 写出由典范同态 $\pi\colon G \longrightarrow S_3$ 诱导出的置换表示 ρ 的矩阵.

3. 写出 S_3 的正则表示的矩阵表达.

4. 设 H 是 G 的子群. 则 G 关于 H 的左陪集的集合 G/H 作成 G- 集. 求由此 G- 集诱导的置换表示的核.

5. 证明指数函数 $x \longmapsto \mathrm{e}^{xa}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, 其中 $\mathbf{R}$ 为实数域, a 是一固定的实数, 是加法群 $\mathbf{R}$ 的一次实表示; 反之, 若连续函数 f 是加法群 $\mathbf{R}$ 的 1 次实表示, 则 f 必定是指数函数.

§2　子表示、商表示、表示的同态

与群的结构理论相似, 研究子表示与商表示是研究表示的基本途径.

2.1　定义　(i) 设 $(V,\ \rho)$ 是群 G 的 F- 表示. 若 U 是 V 的 F- 子空间, 且 $\rho(g)\cdot U \subseteq U$, $\forall g \in G$, 即 U 是 V 的 G- 不变子空间, 则称 $(U,\ \rho|_U)$ 是 $(V,\ \rho)$ 的子表示.

因此, 说 “U 是 V 的子表示”, 等于说 “U 是 V 的子空间且对于 G 的作用是封闭的”.

(ii) 设 $(U,\ \rho|_U)$ 是 (V, ρ) 的子表示. 考虑商空间 V/U. 对于 $g \in G$, $x + U \in V/U$, 定义 $g(x+U) := gx + U$. 则 V/U 对于这一作用作成 G 的表示, 称为 (V, ρ) 的商表示, 记为 $(V/U,\ \rho_{V/U})$.

设 $(U,\ \rho|_U)$ 是 $(V,\ \rho)$ 的子表示, 选定 V 的一组基 $B = (u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n)$, 使得 $C = (u_1, \cdots, u_r)$ 是 U 的一组基. 则