普通高等教育"十三五"规划教材

实变函数与泛函分析

（下 册）

费铭岗 邓志亮 编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十三五”规划教材

实变函数与泛函分析

(下册)

费铭岗　邓志亮　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书分上、 下两册. 本册系统地讲述了线性泛函分析的基本思想和理论, 分五章: 距离线性空间与赋范线性空间; Banach 空间上的有界线性算子; 自反空间、共轭算子与算子谱理论; Hilbert 空间上的有界线性算子以及广义函数论简介. 本册注重讲述空间和算子的一般理论, 取材既有基础的部分又有深刻的部分, 读者可以根据需要进行适当的选择.

本书可作为综合性大学与师范院校数学各专业本科生教材或者教学参考书, 也可作为物理和工科部分专业硕士研究生的教材, 以及需要泛函分析基础知识的科技工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析. 下册/费铭岗，邓志亮编. —北京：科学出版社，2018.11

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-058779-4

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①费… ②邓… Ⅲ. ①实变函数–高等学校–教材②泛函分析–高等学校–教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 209288 号

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 11 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2019 年 1 月第二次印刷 印张: 8 1/4
字数: 176 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

2010 年春季学期至今, 编者及其教学团队一直为电子科技大学数学科学学院本科生讲授" 泛函分析" 课程, 其间我们使用过的教材, 分别有张恭庆和林源渠编著的《泛函分析讲义》（上册）, 江泽坚和吴智泉编著的《泛函分析》, 曹广福和严从荃编著的《实变函数论与泛函分析》（下册）, 以及程其襄等合编的《实变函数与泛函分析基础》, 并以刘培德编著的《泛函分析基础》和刘炳初编著的《泛函分析》等优秀教材为主要的参考书. 本书是在编者及其教学团队的泛函分析讲义的基础上, 综合了各方面的意见和需求, 并参考了国内外一些经典的教材和文献, 精心编写而成的.

20 世纪初, 分析学出现抽象化, 数学家们试图探求其中的理论与方法的一般性与统一性, 泛函分析正是在这样的背景下逐渐产生的. 推动泛函分析产生和发展的主要因素: 一方面是出现了用统一的观点来理解 19 世纪数学各个分支所积累的大量实际材料的必要性; 另一方面, 与量子力学相关的数学问题的研究为泛函分析的发展提供了巨大的动力. 泛函分析是综合运用代数、几何以及诸多现代数学的观点来研究无穷维向量空间上的泛函、算子和极限理论的数学分支. 它可以看成无穷维向量空间上的解析几何和数学分析. 时至今日, 泛函分析已成为内容丰富、方法系统、应用广泛并且仍在蓬勃发展的一门学科. 它在数学物理方程、概率论、计算数学等分科中都有应用, 也是研究具有无限个自由度的物理系统的数学工具.

泛函分析有着非常丰富的理论成果, 内容也博大精深, 本书以较为简短的篇幅讲述了距离空间和线性泛函分析的基本思想和基本理论. 虽然我们正处在从精英化教育向通识化教育转变的历史时期, 很多课程都需要精简, 但是作为数学专业本科生和很多工科专业研究生的一门必修课, 我们在介绍泛函分析基本理论的同时, 仍然保持了该学科的核心定理的证明, 如空间完备化的证明, 列紧性, 实 Banach 延拓定理的证明等. 教师和自学者可以根据各自的实际情况对这些内容进行选择性的讲授和阅读.

本书的总体大纲与编写框架由编者反复讨论后确定. 邓志亮负责第 3 章 3.4 节的编写，其余章节由费铭岗执笔. 本书在准备和编写的过程中始终得到电子科技大学数学科学学院黄廷祝教授、王也洲副教授和吴永科副教授的指导和帮助. 本书还得到科学出版社王胡权和龚建波等编辑的支持和帮助. 编者借此机会, 向他们表示衷心感谢! 同时, 对硕士生闫静杰、唐瑜聆和王谦对本书的打印和校稿所付出的辛

勤劳动表示感谢. 本书在编写的过程中得到电子科技大学本科新编特色教材项目的资助.

限于作者水平, 书中难免存在疏漏和不妥之处, 恳请专家同行和广大读者批评指正.

编　者

2017 年 12 月 31 日

目　录

第 1 章　距离线性空间与赋范线性空间

1.1　距离线性空间

在许多数学与实际问题中，我们需要对遇到的集合赋予加法和数乘等代数运算，使其成为一个线性空间.

定义1.1.1　令 X 是一非空集合，$\mathbb{K}$ 是实数域或复数域. 首先, 在 X 中定义加法运算如下: 对 X 中任意 x, y, 存在 $u \in X$ 与之对应, 记为 $u = x + y$, 并且此运算满足

(1) $x + y = y + x$;

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$, 任意 $x, y, z \in X$;

(3) 在 X 中存在唯一的元素, 记为 θ, 使得 $x + \theta = x$ 对任意 $x \in X$ 成立 (θ 称为 X 的零元素);

(4) 对任意 $x \in X$, 在 X 中存在唯一的元素, 记为 $-x$, 使得 $x + (-x) = \theta(-x$ 称为 x 的负元素);

其次, 在 X 中定义数乘运算如下: 对任意 $\alpha \in \mathbb{K}$ 和 $x \in X$, 存在 $u \in X$ 与之对应, 记为 $u = \alpha x$, 并且此运算满足

(5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, 任意 $\alpha \in \mathbb{K}$ 和 $x, y \in X$;

(6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, 任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ 和 $x \in X$;

(7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, 任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ 和 $x \in X$;

(8) $1x = x$, 任意 $x \in X$,

则称 X 按照上述加法和数乘运算成为线性空间或向量空间. 线性空间的元素称为向量.

不难证明, 对线性空间中任意向量 x 和数 α, 有下列等式成立:

$$0x = \theta,$$

$$(-1)x = -x,$$

$$\alpha\theta = \theta.$$

下面我们举两个线性空间的实例.

例1.1.1　欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$. 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意元素 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \cdots,$

η_n) 和任意 $\alpha \in \mathbb{K}$, 若定义

$$
\begin{aligned}
x+y &= (\xi_1+\eta_1, \cdots, \xi_n+\eta_n),\\
\alpha x &= (\alpha\xi_1, \cdots, \alpha\xi_n),
\end{aligned}
$$

不难证明 $\mathbb{R}^n$ 按照上述加法和数乘成为线性空间.

例1.1.2　令 $C[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上全体连续函数组成的集合, 对 $C[0,1]$ 中任意函数 f, g 和任意 $\alpha \in \mathbb{K}$, 若定义

$$
\begin{aligned}
(f+g)(t) &= f(t)+g(t),\\
(\alpha f)(t) &= \alpha f(t),
\end{aligned}
$$

则容易验证 $C[0,1]$ 按照上述加法和数乘成为线性空间.

定义1.1.2　令 M 为线性空间 X 的非空子集, 若对任意 $x, y \in M$ 和数 $\alpha \in \mathbb{K}$, 有 $x+y \in M$ 及 $\alpha x \in M$ 成立, 则称 M 为 X 的线性流形.

不难验证: 线性空间 X 的任意线性流形 M 也是一个线性空间. X 的线性流形 M 称为真的, 如果 M 不是全空间 X. X 和 $\{\theta\}$ 是 X 的两个线性流形, 称为 X 的平凡线性流形.

令 $x_1, \cdots, x_k$ 为线性空间 X 中的 k 个向量, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, 称 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$ 为向量组 $x_1, \cdots, x_k$ 的一个线性组合. 令 S 为线性空间 X 的任意非空子集, 记 $\mathrm{span}\{S\}$ 为 S 中向量的所有线性组合形成的集合. 容易验证, $\mathrm{span}\{S\}$ 为 X 的一个线性流形, 且是 X 中包含 S 的最小线性流形, 即若 M 是 X 中包含 S 的线性流形, 则必有 $\mathrm{span}\{S\} \subset M$.

定义1.1.3　称线性空间 X 中的 n 个向量 $x_1, \cdots, x_n$ 为线性相关的, 若存在 n 个不全为零的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, 使得 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$. 否则, 就称其为线性无关的. 线性空间 X 的一个子集 S 称为线性无关的, 如果 S 中任意有限个向量都是线性无关的.

由上述定义容易看出, 向量组 $x_1, \cdots, x_n$ 为线性无关的充要条件为, 若 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$, 则必有 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ 成立. 而且, 线性无关的向量组必不包含零向量; 包含一个线性相关子集的向量集一定线性相关.

定义1.1.4　假设 S 为线性空间 X 中的一个线性无关子集, 若 $\mathrm{span}\{S\} = X$, 则称 S 的基数为 X 的维数, 记为 $\mathrm{dim}X$, S 称为 X 的一组基. 如果 $\mathrm{dim}X$ 为有限数, 则称 X 为有限维线性空间, 否则就称 X 为无限维线性空间. 只包含零元素的平凡线性空间 $\{\theta\}$ 称为零维线性空间.

例如, 例 1.1.1 中的欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维线性空间, 下列 n 个向量构成的

向量组为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,\cdots,0),\\ e_2 &= (0,1,\cdots,0),\\ &\cdots\cdots\\ e_n &= (0,0,\cdots,1). \end{aligned}$$

但是, 例 1.1.2 中定义的 $[0,1]$ 上全体连续函数构成的线性空间 $C[0,1]$ 为无限维线性空间. 事实上, 如果 $C[0,1]$ 为有限维线性空间, 令 $\dim C[0,1]=N$, 则 $C[0,1]$ 中由任意 $N+1$ 个函数组成的函数组必定是线性相关的. 然而, 我们知道, $C[0,1]$ 中由 $1,t,t^2,\cdots,t^N$ 组成的函数组 (包含 $N+1$ 个函数) 是线性无关的. 因此, $C[0,1]$ 只可能为无限维线性空间.

泛函分析中, 人们最感兴趣的空间是无穷维的, 但经常考虑有限维空间作为例子对理解泛函分析是很有帮助的.

在一般泛函分析的研究中, 除了需要 X 是一个线性空间外, 我们还需要在 X 中引入下列度量, 使之成为一个度量空间, 并将这些代数结构和拓扑结构有机地结合起来.

定义1.1.5 假设 X 为任一非空集合, 若对 X 中任意两个元素 x,y, 都存在一个实数 $d(x,y)$ 与之对应, 并且 $d(x,y)$ 满足

(1) (非负性) $d(x,y)\geqslant 0$, $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) (对称性) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) (三角不等式) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$, 对任意 $x,y,z\in X$ 成立,

则称 X 为度量空间或者距离空间, 记作 $\langle X,d\rangle$. $d(x,y)$ 称为 x 与 y 之间的距离.

定义1.1.6 距离空间 $\langle X,d\rangle$ 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为按距离 $d(\cdot,\cdot)$ 收敛到 x, 如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0,$$

记为 $x_n \xrightarrow{d} x$, 或简记为 $x_n\to x$.

定义1.1.7 假设线性空间 X 上还赋有距离 $d(\cdot,\cdot)$, 并且加法和数乘运算都按 $d(\cdot,\cdot)$ 所确定的极限是连续的, 即

(1) $d(x_n,x)\to 0, d(y_n,y)\to 0 \Rightarrow d(x_n+y_n,x+y)\to 0$;

(2) $d(x_n,x)\to 0, \alpha_n\to\alpha \Rightarrow d(\alpha_n x_n,\alpha x)\to 0$,

则线性空间 X 称为距离线性空间.

下面是一些重要的距离线性空间的实例, 它们在今后的学习中会经常出现.

例1.1.3　离散距离空间 (D).

假设 X 为任意非空线性空间, 对 X 中任意向量 x, y, 定义

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

容易验证上述 $d(\cdot,\cdot)$ 满足定义 1.1.5 中的条件 (1), (2) 和 (3), 并且 X 是赋以距离 $d(\cdot,\cdot)$ 的距离线性空间. 这样得到的空间称为离散距离空间, 记为 (D).

例1.1.4　有界序列空间 l^∞.

假设 X 为所有有界数列

$$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j,\cdots\}$$

构成的集合, 其元素常简记为 $x=\{\xi_j\}$, ξ_j 称为 x 的第 j 个坐标, 即对每个 $x=\{\xi_j\}$, 存在常数 $K_x>0$, 使得对于所有的 j, $|\xi_j|\leqslant K_x$.

对任意 X 中的数列 $x=\{\xi_j\}$, $y=\{\eta_j\}$ 和数 α, 定义

$$\begin{aligned}&x+y=\{\xi_j+\eta_j\},\\ &\alpha x=\{\alpha\xi_j\},\\ &d(x,y)=\sup_{j\geqslant 1}|\xi_j-\eta_j|.\end{aligned}$$

容易验证上述 $d(\cdot,\cdot)$ 满足距离定义中的条件 (1), (2) 和 (3), 并且 X 是赋以距离 $d(\cdot,\cdot)$ 的距离线性空间. 这样得到的空间称为有界序列空间, 记为 l^∞.

例1.1.5　收敛序列空间 (c).

假设 X 为所有收敛数列

$$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j,\cdots\}$$

所构成的集合, 即对任意 $x=\{\xi_j\}\in X$, $\lim_{j\to\infty}\xi_j$ 存在且有限.

像例 1.1.4 空间 l^∞ 一样定义加法、数乘运算和距离 $d(\cdot,\cdot)$, 不难验证上述 $d(\cdot,\cdot)$ 满足距离定义中的条件 (1), (2) 和 (3), 并且 X 是赋以距离 $d(\cdot,\cdot)$ 的距离线性空间. 这样得到的空间称为收敛序列空间, 记为 (c).

例1.1.6　所有序列空间 (s).

假设 X 是所有数列构成的集合, 对任意 $x=\{\xi_j\}, y=\{\eta_j\}\in X$ 和数 α, 定义

$$x+y=\{\xi_j+y_j\},\quad \alpha x=\{\alpha\xi_j\}.$$

显然 X 按照上述加法和数乘成为线性空间. 又定义

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-y_j|}{1+|\xi_j-y_j|}.$$

下面证明 $d(\cdot,\cdot)$ 满足距离定义中的条件 (1), (2) 和 (3). 首先, 条件 (1) 和 (2) 显然. 其次为证条件 (3), 我们需要下列不等式:

对任意复数 a, b, 有不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \tag{1.1.1}$$

成立. 事实上, 引入 $[0,\infty)$ 上的函数

$$f(t) = \frac{t}{1+t}.$$

显然, 对任意 $t \in [0,\infty)$, $f'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$. 所以 $f(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的单调递增函数. 由不等式 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},\end{aligned}$$

即, 不等式 (1.1.1) 得证.

现令 $x = \{\xi_j\}, y = \{\eta_j\}, z = \{\zeta_j\} \in X$, 由 $d(x,y)$ 的定义和不等式 (1.1.1) 得

$$\begin{aligned}d(x,z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \zeta_j|}{1+|\xi_j - \zeta_j|} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|} + \frac{|\eta_j - \zeta_j|}{1+|\eta_j - \zeta_j|} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\eta_j - \zeta_j|}{1+|\eta_j - \zeta_j|} \\ &= d(x,y) + d(y,z).\end{aligned}$$

所以 $d(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的距离. 并且容易验证 X 中的加法与数乘运算按上述定义的距离 $d(\cdot,\cdot)$ 是连续的. 这样得到的距离线性空间称为所有序列空间, 记为 (s).

例1.1.7 l^p 空间, $1 \leqslant p < \infty$.

假设 X 代表满足下列条件的所有数列 $x = \{\xi_j\}$ 构成的集合:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty.$$

对任意 $x=\{\xi_j\}, y=\{\eta_j\}\in X$ 和数 α, 若定义

$$x+y=\{\xi_j+\eta_j\},$$
$$\alpha x=\{\alpha\xi_j\},$$

由下列不等式容易验证 X 按上述加法和数乘运算成为一个线性空间:

对任意复数 a 和 b, 有

$$|a+b|^p\leqslant(|a|+|b|)^p\leqslant(2\max\{|a|,|b|\})^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$$

成立.

又定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

则容易验证 $d(\cdot,\cdot)$ 满足距离定义中的条件 (1) 和 (2). 再利用 Minkowski 不等式

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

易得 $d(\cdot,\cdot)$ 也满足条件 (3). 进一步, X 中加法和数乘运算按上述定义的距离 $d(\cdot,\cdot)$ 是连续的. 这样得到的距离线性空间称为 l^p 空间.

例1.1.8　本性有界可测函数空间 $L^\infty[a,b]$.

令 X 为区间 $[a,b]$ 上全体本性有界可测函数构成的集合. 对任意 $x(t),y(t)\in X$ 和数 α, 若定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),$$
$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t),$$

易见 X 为一线性空间. 若又定义

$$d(x,y)=\operatorname{ess}\sup_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,$$

下面验证 $d(\cdot,\cdot)$ 满足距离定义中的三个条件:

(1) $d(x,y)\geqslant 0$ 显然成立. 如果 $x(t)=y(t)$, a.e., 则由定义知 $d(x,y)=0$.

(2) 如果

$$d(x,y)=\inf_{m(E)=0}\left\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E}|x(t)-y(t)|\right\}=0,$$

则对所有正整数 n, 存在 $E_n \subset [a,b]$, 使得 $m(E_n)=0$, 且

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_n} |x(t)-y(t)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

现令 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $m(E)=0$, 且

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E} |x(t)-y(t)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]\setminus E_n} |x(t)-y(t)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$, 则

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E} |x(t)-y(t)| = 0,$$

即 $x(t)=y(t)$, a.e.

由 $d(\cdot,\cdot)$ 的定义, 条件 (2) 显然成立.

(3) 对任意 $x(t),y(t),z(t)\in X$ 和正数 ε, 存在零测集 $E_\varepsilon^1, E_\varepsilon^2 \subset [a,b]$, 使

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon^1} |x(t)-y(t)| &\leqslant d(x,y)+\frac{\varepsilon}{2},\\
\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon^2} |y(t)-z(t)| &\leqslant d(y,z)+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

现令 $E_\varepsilon = E_\varepsilon^1 \cup E_\varepsilon^2$, 则 $m(E_\varepsilon)=0$, 且

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon} |x(t)-z(t)|\\
\leqslant& \sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon} |x(t)-y(t)| + \sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon} |y(t)-z(t)|\\
\leqslant& \sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon^1} |x(t)-y(t)| + \sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon^2} |y(t)-z(t)|\\
\leqslant& d(x,y)+d(y,z)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
d(x,z) &= \inf_{m(E)=0}\left\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E} |x(t)-z(t)|\right\}\\
&\leqslant \sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon} |x(t)-z(t)|\\
&\leqslant d(x,y)+d(y,z)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

由正数 $\varepsilon>0$ 的任意性得 $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

综上, $d(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的一个距离. 另外, 容易验证 X 中的加法和数乘运算按照这个距离是连续的. 这样得到的距离线性空间称为本性有界可测函数空间, 记为 $L^\infty[a,b]$.

例1.1.9　p 方可积函数空间 $L^p[a,b], 1 \leqslant p < \infty$.

令 X 代表区间 $[a,b]$ 上满足下列条件的所有可测函数 $x(t)$ 的集合:

$$\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty.$$

与例 1.1.8 一样, 在 $L^p[a,b]$ 上逐点定义加法和数乘, 容易验证 X 为一线性空间. 又定义

$$d(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}.$$

显然, $d(\cdot,\cdot)$ 满足距离条件 (1) 和 (2). 再由 Minkowski 不等式易得

$$\begin{aligned} &\left(\int_a^b |x(t) - z(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \\ =&\left(\int_a^b |(x(t) - y(t)) + (y(t) - z(t))|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \\ \leqslant&\left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t) - z(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

从而定义 1.1.5 距离条件 (3) 成立. 所以 $d(\cdot,\cdot)$ 是 $L^p[a,b]$ 上的距离. 进一步, 容易证明 X 是赋有距离 $d(\cdot,\cdot)$ 的距离线性空间. 这样得到的距离线性空间称为 p 方可积函数空间, 记为 $L^p[a,b]$.

注1.1.1　上述两例空间中的元不是一个函数, 而是一个几乎处处相等的函数的等价类.

1.2　距离空间中的拓扑

下面给出距离空间中一些点和集合的概念.

例1.2.1　假设 $\langle X,d \rangle$ 为一距离空间, 定义

(1) $B(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ 为 x_0 的以 r 为半径的球, 或称为 x_0 的 r- 邻域;

(2) 点 $x_0 \in E \subset X$ 称为 E 的内点, 如果存在 $r > 0$, 使得 $B(x_0,r) \subset E$, 记 E 的内点的全体为 E 的内部;

(3) 点 $x_0 \in X$ 称为集合 $F \subset X$ 的聚点, 如果对任意 $r > 0$, 球 $B(x_0,r)$ 都包含了 F 中异于 x_0 的点;

(4) $O \subset X$ 为开集, 如果对任意 $x \in O$, 都存在 $r > 0$, 使得 $B(x,r) \subset O$;

(5) $F \subset X$ 为闭集, 如果 F 的聚点都包含在 F 中.

定义1.2.1 称距离空间 $\langle X,d\rangle$ 到距离空间 $\langle Y,\rho\rangle$ 的映射 T 在 $x_0\in X$ 处连续，如果对 Tx_0 的每一个 ε- 邻域 V，都存在 x_0 的某一个 δ- 邻域 U，使得当 $x\in U$ 时，有 $Tx\in V$，即 $TU\subset V$. 如果映射 T 在 X 的每一点都连续，就称 T 是 X 上的连续映射.

我们下面给出连续映射的两个等价刻画.

定理1.2.1 从距离空间 $\langle X,d\rangle$ 到距离空间 $\langle Y,\rho\rangle$ 的映射 T 在 $x_0\in X$ 处连续的充要条件是当 $x_n\xrightarrow{d}x_0$ 时，有 $Tx_n\xrightarrow{\rho}Tx_0$.

证明 必要性. 若 T 在 $x_0\in X$ 处连续，由定义 1.2.1 知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $d(x,x_0)<\delta$ 时，有 $\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$. 由于 $x_n\xrightarrow{d}x_0$，则对给定的 δ，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $d(x_n,x_0)<\delta$，从而 $\rho(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$，即 $Tx_n\xrightarrow{\rho}Tx_0$.

充分性. 利用反证法. 若映射 T 在 $x_0\in X$ 处不连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任何 $\delta>0$，总存在 $x_\delta\neq x_0$，满足 $d(x_\delta,x_0)<\delta$，但是 $\rho(Tx_\delta,Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$. 现令 $\delta=\dfrac{1}{n}$，则存在 x_n，使得 $d(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$，但是 $\rho(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$. 即存在 $x_n\xrightarrow{d}x_0$，但是 Tx_n 并不收敛到 Tx_0. 这与已知条件矛盾，从而映射 T 在 $x_0\in X$ 处必连续. □

定理1.2.2 从距离空间 $\langle X,d\rangle$ 到距离空间 $\langle Y,\rho\rangle$ 的映射 T 是连续的充要条件是对 Y 中的任何开集 O，$T^{-1}(O)$ 是 X 中的开集，这里

$$T^{-1}(O)=\{x\in X: f(x)\in O\},$$

称为 O 在 X 中的原象.

证明 必要性. 假设映射 T 连续，O 是 Y 中的开集，则对任意 $x\in T^{-1}(O)$，必有 $y=Tx\in O$. 由 O 是 Y 中的开集，则必存在 y 的 ε- 邻域 V，使 $V\subset O$. 由于 T 在 x 处连续，必存在 x 的 δ- 邻域 U，使得 $TU\subset V$. 从而 $U\subset T^{-1}(V)\subset T^{-1}(O)$，即 x 是 $T^{-1}(O)$ 的内点. 由 x 的任意性知 $T^{-1}(O)$ 是 X 中的开集.

充分性. 对任意 $x\in X$，令 $Tx=y$. 任取 y 的 ε- 邻域 V，由假设知 $T^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 又 $x\in T^{-1}(V)$，所以必存在 x 的某个 δ- 邻域 U，使得 $U\subset T^{-1}(V)$，即 $TU\subset V$. 这说明 T 在 x 处连续. 由 x 的任意性知 T 是 X 上的连续映射. □

众所周知，有理数的全体是可数的，而且在实数轴上稠密. 这个性质给我们在研究实数性质时带来了很多方便. 实数域的这个性质在一般距离空间中的推广就是下面我们将引入的可分空间的概念.

定义1.2.2 假设 $\langle X,d\rangle$ 是一距离空间，其子集 $S\subset X$ 称为 X 的稠密子集，如果对任给 $\varepsilon>0$，任意 $x\in X$，都存在 $x_0\in S$，使得 $d(x,x_0)<\varepsilon$. 如果 X 内存在一个可数的稠密子集，则称 X 为可分空间.

下面我们列举一些可分和不可分空间的例子.

例1.2.2　空间 l^p 可分, $1 \leqslant p < \infty$.

令 S 为所有形如

$$\{r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots\}$$

的元素组成的集合, 这里 n 是任意正整数, $r_j(j = 1, \cdots, n)$ 为任意有理数. 显然, $S \subset X$ 且 S 是可数的. 首先假设 l^p 为实空间, 对任给的 $\varepsilon > 0$ 和任意 $x = \{\xi_j\} \in l^p$, 必存在正整数 N, 使得

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

另外, 显然可适当选取有理数 r_j, $j = 1, \cdots, N$, 使得

$$\sum_{j=1}^{N} |\xi_j - r_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

现令 $x_0 = \{r_1, \cdots, r_N, 0, 0, \cdots\}$, 则 $x_0 \in S$, 且

$$[d(x, x_0)]^p = \sum_{j=1}^{N} |\xi_j - r_j|^p + \sum_{j=N+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p.$$

从而 $d(x, x_0) < \varepsilon$, 即, 实空间 l^p 是可分的. 对于复空间 l^p, 可以类似地证明它也是可分的.

利用例 1.2.2 类似的方法容易证明: 收敛序列空间 (c) 是可分的, 所有序列空间 (s) 也是可分的. 对于连续的情形, 不难验证 $C[0,1]$ 和 $L^p[a,b](1 \leqslant p < \infty)$ 均为可分空间.

例1.2.3　空间 l^∞ 不可分.

令 S 为 l^∞ 中所有坐标 ξ_j 取值为 0 或 1 的元素 $x = \{\xi_j\}$ 的全体, 则对 S 中任意两个不同的元素 x 和 y, 由例 1.1.4 知 $d(x, y) = 1$. 由于 S 与二进位小数一一对应, 则 S 的基数为 c. 若空间 l^∞ 可分, 则 l^∞ 中存在可数稠密子集, 令为 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$. 现对任意 $x \in S$, 作球 $B\left(x, \dfrac{1}{3}\right)$, 则由 S 的构造,

$$\left\{B\left(x, \frac{1}{3}\right) : x \in S\right\}$$

为一族两两互不相交的球, 总的个数为 c. 但由于 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ 在 l^∞ 中稠密, 则每个球 $B\left(x, \dfrac{1}{3}\right)$ 中至少包含 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ 中的一个元. 这与 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ 是可数集矛盾, 故空间 l^∞ 必不可分.

类似地, 我们可以证明: 本性有界可测函数空间 $L^\infty[a,b]$ 不可分.

1.3 完备的距离空间

类似于实数轴上 Cauchy 列的定义, 下面引入距离空间中 Cauchy 列的定义.

定义1.3.1 距离空间 $\langle X, d\rangle$ 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 Cauchy 列, 若对任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $m, n \geqslant N$ 时, 有

$$d(x_m, x_n)<\varepsilon.$$

显然, 距离空间中的所有收敛列都是 Cauchy 列, 但是这个逆命题却不成立. 例如, 有理数的全体按照实数域中的距离构成一距离空间 $\mathbb{Q}$, 但其 Cauchy 列 $\left\{\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛.

定义1.3.2 如果距离空间 $\langle X, d\rangle$ 中任何 Cauchy 列都收敛, 则称 $\langle X, d\rangle$ 为完备的距离空间.

由完备的距离空间的定义我们不难理解上面提到有理数空间中的 Cauchy 列 $\left\{\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛, 但是整个实数域空间 $\mathbb{R}$ 却是完备的. 下面列举两个完备的距离空间的实例.

例1.3.1 $C[0,1]$ 是完备的距离空间.

由例 1.1.2 知 $C[0,1]$ 表示区间 $[0,1]$ 上的所有连续函数按照逐点定义加法和数乘运算形成的线性空间. 对任意 $x(t), y(t) \in C[0,1]$, 定义

$$d(x, y)=\max_{0 \leqslant t \leqslant 1}|x(t)-y(t)|.$$

容易证明, $C[0,1]$ 是赋以距离 $d(\cdot,\cdot)$ 的距离线性空间. 下面证明 $C[0,1]$ 是完备的距离空间.

假设 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[0,1]$ 中的 Cauchy 列, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $n, m \geqslant N$ 时, 有

$$d(x_n, x_m)=\max_{0 \leqslant t \leqslant 1}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon. \tag{1.3.1}$$

即, 当 $n, m \geqslant N$ 时, 对任意 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 有

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

显然, 对每个固定的 $t \in[0,1]$, $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列. 由于实数域空间 $\mathbb{R}$ 是完备的, 则存在 $x(t)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)=x(t)$. 在式 (1.3.1) 中令 $m \rightarrow \infty$, 则当