

美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

109个不等式: 来自AwesomeMath夏季课程

109 Inequalities: from the AwesomeMath Summer Program

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)

[美] 阿迪亚·加内什(Adithya Ganesh)

著
隋振林 译

非
外
借

美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

109个不等式： 来自AwesomeMath夏季课程

109 Inequalities : from the AwesomeMath Summer Program

【美】蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)

【美】阿迪亚·加内什(Adithya Ganesh)

著

隋振林 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08—2017—027 号

图书在版编目(CIP)数据

109 个不等式:来自 AwesomeMath 夏季课程/(美)蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu),(美)阿迪亚·加内什(Adithya Ganesh)著;
隋振林译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.4

书名原文:109 Inequalities: from the AwesomeMath Summer Program
ISBN 978-7-5603-4065-4

I. ①1… II. ①蒂…②阿…③隋… III. ①不等式—问题解答
IV. ①O178-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 038710 号

© 2015 XYZ Press, LLC

All rights reserved. This work may not be copied in whole or in part without the written permission of the publisher (XYZ Press, LLC, 3425 Neiman Rd., Plano, TX 75025, USA) except for brief excerpts in connection with reviews or scholarly analysis.
www.awesomemath.org

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 王勇钢

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 12.25 字数 253 千字

版 次 2019 年 4 月第 1 版 2019 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-4065-4

定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

目 录

◎ 前 言

本书给出了证明代数不等式的重要理论和方法. 为了开阅读者的数学视野, 我们提供了来自世界各地的数学期刊和数学竞赛中的问题.

本书是按章节的结构编排的, 其内容涵盖了简单的不等式、AM-GM 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式、关于和的 Hölder 不等式、Nesbitt 不等式以及重排和 Chebyshev 不等式. 上述不等式的知识并不是充分的——如何有效地应用这些不等式非常重要. 在阐述上, 我们首先陈述并证明了相关主题的几个定理和推论以及所涉及的方法, 然后提供了大量的例子来说明如何有效地使用这些定理并讨论了若干引理. 最后, 在相应的章节我们提供了 109 个问题 (其中入门问题 54 个, 高级问题 55 个), 所有这些问题都提供了完整的解答, 许多问题我们还提供了多种解答以及这些解答背后的动机. 笔者相信, 通过这 109 个问题的学习可以使读者在解题实践中掌握必要的技巧.

不等式是解决奥林匹克数学问题的重要课题, 为了学生在国内和国际比赛中取得好成绩, 这 109 个不等式可以作为一个有益的学习资源. 不等式也有很大的理论趣味, 并为高级的主题, 如分析、概率和测量理论铺平了道路. 最重要的是, 我们希望读者在证明有趣的代数不等式的过程中找到灵感.

我们要真诚地感谢 Dr. Richard Stong, Dr. Gabriel Dospinescu, Mr. Marius Stanean 和 Mr. Tran Nam Dung, 他们帮助改善了原稿的草稿, 发现了几处错误, 并精炼了许多解答.

让我们一同分享这些问题及其解答吧!

Titu Andreescu, Adithya Ganesh

2015 年 1 月

目 录

1 简介	1
2 算术—几何平均不等式	10
3 Cauchy-Schwarz 不等式	34
4 关于和的 Hölder 不等式	56
5 Nesbitt 不等式	69
6 排序不等式与 Chebyshev 不等式	76
7 入门问题	89
8 高级问题	95
9 入门问题的解答	101
10 高级问题的解答	131

1 简介

从一个非常简单的不等式： $x^2 \geq 0$ 开始我们的学习. 这个不等式对所有的实数 x 都成立, 看上去似乎很明显, 但是大量(技术上的, 全部) 其他的不等式都是基于这个不等式派生出来的. 当我们尝试证明一个表达式是非负的时候, 我们常常设法把这个表达式写成其他表达式的平方形式或者若干个表达式的平方和形式. 借助于某些例子我们来说明一下, 在解题实践中这个事情是如何实施的.

例 1.1 设 a, b, c 是实数, 证明

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

证明 不等式显然等价于

$$\frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$$

这是一个基本的重要的不等式, 自始至终贯穿于本书, 其等价形式

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

也经常使用. 当且仅当 $a=b=c$ 时等式成立.

例 1.2 设 a, b, c 是正实数, 证明

$$\max \left\{ \frac{1}{a} + \frac{b}{4}, \frac{1}{b} + \frac{c}{4}, \frac{1}{c} + \frac{a}{4} \right\} \geq 1$$

证明 注意到, 对所有的正实数 x , 我们有 $\frac{1}{x} + \frac{x}{4} \geq 1$, 因为这可以简化为明显的形式 $(x-2)^2 \geq 0$. 因此

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{4} \right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{c}{4} \right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{a}{4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{4} \right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{4} \right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{c}{4} \right) \\ &\geq 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

这就是我们所希望的结果. 当且仅当 $a=b=c=2$ 时等号成立.

例 1.3 设 a 和 b 是正实数, 证明

$$\frac{8}{a+b} - \frac{9}{a+b+ab} \leq 1$$

证明 设 $s=a+b, p=ab$. 可见, $s^2 \geq 4p$, 因为这可以简化为 $(a-b)^2 \geq 0$. 经过某

些代数计算之后,不等式简化为

$$8p \leq s^2 + s(p+1)$$

注意到, $p+1 \geq 2\sqrt{p}$, 因为这可以写成 $(\sqrt{p}-1)^2 \geq 0$. 所要证明的不等式可由 $s^2 \geq 4p$ 和 $s(p+1) \geq (2\sqrt{p})(2\sqrt{p}) = 4p$ 得到.

例 1.4 设 a, b, c 是不同的实数, 证明

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} & \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} + \frac{ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(a-c)} + \frac{ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \\ &= \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 + \frac{2bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{2ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{2ab}{(c-a)(c-b)} \\ &= \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$ 时等号成立.

例 1.5 (Roberto Bosch Cabrera, Mathematical Reflections) 设 a, b, c 是不同的实数, 证明

$$\left(\frac{a}{a-b} + 1 \right)^2 + \left(\frac{b}{b-c} + 1 \right)^2 + \left(\frac{c}{c-a} + 1 \right)^2 \geq 5$$

证明 由前一个例子中的等式

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a-b} \left(1 - \frac{b}{b-c} \right) &= - \sum_{\text{cyc}} \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \\ &= - \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 \end{aligned}$$

这就意味着

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a-b} = 1 + \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{a-b} \cdot \frac{b}{b-c} \right)$$

利用这个恒等式来化简所证不等式的左边

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{a-b} + 1 \right)^2 &= 3 + \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{a-b} \right)^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a-b} \\ &= 3 + \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{a-b} \right)^2 + 2 \left[1 + \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a-b} \cdot \frac{b}{b-c} \right] \\ &= 5 + \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a-b} \right)^2 \geq 5\end{aligned}$$

证毕.

例 1.6 (Titu Andreescu) 设 a, b, c 是正实数, 证明下列不等式

$$\frac{3}{a} \geq 2 - b$$

$$\frac{2}{b} \geq 4 - c$$

$$\frac{6}{c} \geq 6 - a$$

至少有一个是成立的.

证明 若不然, 即

$$a(2-b) > 3, b(4-c) > 2, c(6-a) > 6$$

则

$$6-a > 0, 2-b > 0, 4-c > 0$$

且

$$abc(2-b)(4-c)(6-a) > 36$$

但

$$0 < a(6-a) \leq 9, 0 < b(2-b) \leq 1$$

且

$$0 < c(4-c) \leq 4$$

因为这些不等式显然可以简化为

$$(a-3)^2 \geq 0, (b-1)^2 \geq 0, (c-2)^2 \geq 0$$

因此

$$abc(2-b)(4-c)(6-a) \leq 36$$

这是一个矛盾. 所以, 结论是成立的.

例 1.7 (Vasile Cîrtoaje, Mircea Lascu, Romania Junior TST 2003) 设 a, b, c 是正实数且满足 $abc = 1$, 证明

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}$$

证明 设 $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. 可见 $xyz = 1$. 所证不等式等价于

$$1 + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq \frac{6}{x + y + z}$$

由例 1.1, 我们有 $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, 因此

$$1 + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq 1 + \frac{9}{(x + y + z)^2}$$

最后, 由不等式 $\left(1 - \frac{3}{x + y + z}\right)^2 \geq 0$, 可得

$$1 + \frac{9}{(x + y + z)^2} \geq \frac{6}{x + y + z}$$

这样, 我们就证明了原不等式. 当且仅当 $x = y = z = 1$, 即 $a = b = c = 1$ 时等号成立.

例 1.8 (Czech and Slovak Republics 2005) 设 a, b, c 是正实数且满足 $abc = 1$, 证明

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$

证明 去分母之后, 我们得到等价的不等式

$$ab + ac + bc + a + b + c \geq 3(abc + 1)$$

即

$$ab + ac + bc + a + b + c \geq 6$$

这可由下列方式得到

$$\begin{aligned} ab + ac + bc + a + b + c - 6 &= \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + a + b + c - 6 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \sqrt{c}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

当且仅当 $a = b = c = 1$ 时, 等号成立.

例 1.9 (Dorin Andrica, Mathematical Reflections) 设 x, y, z 是正实数且满足 $x + y + z = 1$. 求下列表达式的最大值

$$E(x, y, z) = \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x}$$

解 注意到 $\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$, 因为这可以简化为 $(x-y)^2 \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &\leq \frac{\frac{(x+y)^2}{4}}{x+y} + \frac{\frac{(y+z)^2}{4}}{y+z} + \frac{\frac{(z+x)^2}{4}}{z+x} \\ &= \frac{x+y}{4} + \frac{y+z}{4} + \frac{z+x}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2}$$

所以, $E(x, y, z)$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$. 当且仅当 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立.

例 1.10 (Titu Andreescu, Mathematical Reflections) 设 a 和 b 是正实数且满足

$$|a - 2b| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ 和 } |2a - b| \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$$

证明

$$a + b \leq 2$$

证明 首先, 所给的不等式两边平方, 得到

$$a^2 - 4ab + 4b^2 \leq \frac{1}{a} \text{ 和 } 4a^2 - 4ab + b^2 \leq \frac{1}{b}$$

由此可见

$$a^3 - 4a^2b + 4ab^2 \leq 1 \text{ 和 } 4a^2b - 4ab^2 + b^3 \leq 1$$

两个不等式相加, 我们得到

$$a^3 + b^3 \leq 2$$

为了推出结论, 注意到

$$2 \geq a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b) \frac{(a+b)^2}{4}$$

即 $(a+b)^3 \leq 8$, 这就得到了我们所要的结果. 当且仅当 $a = b = 1$ 时等号成立.

例 1.11 (Titu Andreescu) 设 a 是一正实数, 证明

$$a + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^3} \geq 2$$

证明 去分母, 不等式变成

$$4a^4 - 8a^3 + 4a + 1 \geq 0$$

或者, 等价于

$$4a^4 - 8a^3 + 4a \geq -1$$

左边的表达式很容易写成乘积形式, 即

$$a(4a^3 - 8a^2 + 4) \geq -1$$

由于, 当 $a = 1$ 时, 左边表达式变成 0, 所以 $a - 1$ 必定整除 $4a^3 - 8a^2 + 4$. 实际上, 因式分解之后, 不等式可以简化为

$$4a(a-1)(a^2 - a - 1) = (2a^2 - 2a)(2a^2 - 2a - 2) \geq -1$$

应用平方差公式, 这等价于

$$(2a^2 - 2a)(2a^2 - 2a - 2) + 1 = (2a^2 - 2a - 1)^2 - 1^2 + 1 = (2a^2 - 2a - 1)^2 \geq 0$$

这显然是成立的,当且仅当 $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (因为 $a > 0$) 时等号成立.

例 1.12 设 a 和 b 是正实数且满足 $a+b=1$, 证明

$$2 < \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right) \leq \frac{9}{4}$$

和

$$3 < \left(a^2 - \frac{1}{a}\right) \left(b^2 - \frac{1}{b}\right) \leq \frac{49}{16}$$

证明 第一个不等式等价于

$$2 < \frac{(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)}{ab} \leq \frac{9}{4}$$

这简化为

$$2 < (a+1)(b+1) \leq \frac{9}{4}$$

不等式的左边部分变成 $0 < ab$, 右边部分简化为 $ab \leq \frac{1}{4}$, 这可由 $0 \leq (a-b)^2$ 得到 $ab \leq$

$\frac{(a+b)^2}{4}$ 而得证.

对于第二个不等式, 注意到

$$\begin{aligned} \left(a^2 - \frac{1}{a}\right) \left(b^2 - \frac{1}{b}\right) &= \frac{(a-1)(a^2+a+1)(b-1)(b^2+b+1)}{ab} \\ &= (a^2+a+1)(b^2+b+1) = a^2b^2 + 3 \end{aligned}$$

其中, 我们利用了条件 $a+b=1$. 所以, 很明显

$$3 < a^2b^2 + 3 \leq \frac{49}{16}$$

由于这不等式的右边可以简化为同样的 $ab \leq \frac{1}{4}$, 这个早些时候已证. 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 在两个上边界等号成立.

例 1.13 设 a, b, c 是正实数且满足 $a+b+c=1$, 证明

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}$$

证明 由很显然的不等式 $(a-b)^2 \geq 0$, 可以得到

$$\frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}$$

所以

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - b \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} \geq a - \frac{b}{2}$$

类似的方法可以得到

$$\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2}$$

$$\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq c - \frac{a}{2}$$

上述结果相加并利用给定的条件 $a+b+c=1$, 我们得到

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq a+b+c - \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}$$

不等式得证. 当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

例 1.14 设 a, b, c 是正实数且满足 $abc=1$, 证明

$$\frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} + \frac{1}{c^2+c+1} \geq 1$$

证明 采取“暴力”的手段, 不等式的两边同时乘以

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

除去分母, 这样不等式等价于

$$\sum_{cyc} (a^2+a+1)(b^2+b+1) \geq (a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

简单的计算之后, 不等式简化为我们熟悉的例 1.1

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

例 1.15 设 x 和 y 是区间 $(0,1)$ 内的正实数, 证明

$$\frac{2}{1-xy} \leq \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2}$$

证明 这个不等式可以改写成

$$0 \leq \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-y^2} - \frac{1}{1-xy}$$

这等价于

$$0 \leq \frac{x(x-y)}{(1-x^2)(1-xy)} - \frac{y(x-y)}{(1-y^2)(1-xy)}$$

这最后的不等式可以简化为

$$0 \leq \frac{(x-y)^2(1+xy)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-xy)}$$

这显然成立.

例 1.16 设 a, b, c 是小于 1 的正实数, 证明

$$\frac{1}{1-\sqrt{ab}} + \frac{1}{1-\sqrt{bc}} + \frac{1}{1-\sqrt{ca}} \leq \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}$$

证明 应用前一个例子的结果,我们有

$$\frac{2}{1-\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}$$

以及其他两个相对应的不等式

$$\frac{2}{1-\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}$$

$$\frac{2}{1-\sqrt{ca}} \leq \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-a}$$

这 3 个不等式相加即得所证不等式.

例 1.17 设 a, b, c 是非负实数,其中没有两个同时为 0,证明

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} - a \right) &= \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b) + ac(a-c)}{b^2+c^2} \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)}{b^2+c^2} + \sum_{\text{cyc}} \frac{ba(b-a)}{c^2+a^2} \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)(c^2+a^2-b^2-c^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a+b)(a-b)^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

当 $a=b=c$, 以及 $a=0, b=c$, 或 $b=0, c=a$, 或 $c=0, a=b$ 时等号成立.

例 1.18 设 a, b, c 是非负实数,证明

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geq (ab+bc+ca)^3$$

证明 注意到

$$4(a^2+ab+b^2)-3(a+b)^2=(a-b)^2 \geq 0$$

不等式 $4(a^2+ab+b^2) \geq 3(a+b)^2$ 与其轮换不等式相乘,我们得到

$$64(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geq 27(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

为证明原不等式,余下的需要证明

$$27(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 64(ab+bc+ca)^3$$

但由不等式 $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ 可知,我们只须证明

$$81(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 64(a+b+c)^2(ab+bc+ca)$$

这个不等式等价于

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

这可以简化为

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 或当变量中有两个为 0 时等号成立.

例 1.19 设 x 和 y 是非负实数, 证明

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+xy} &= \frac{xy(x^2+y^2) - x^2y^2 - 2xy + 1}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)} \\ &= \frac{xy(x-y)^2 + (xy-1)^2}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)} \geq 0 \end{aligned}$$

这就证明了不等式.

例 1.20 (Vasile Cîrtoaje, Gazeta Matematică) 设 a, b, c, d 是正实数且满足 $abcd = 1$, 证明

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

证明 利用前一个例子已经证明过的结果, 我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \\ &\geq \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+cd} = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+\frac{1}{ab}} \\ &= \frac{1}{1+ab} + \frac{ab}{1+ab} = 1 \end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=c=d=1$ 时等号成立.

2 算术—几何平均不等式

我们先介绍 AM-GM 不等式(即算术—几何平均不等式)最简单的情况

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

对于所有非负实数 a 和 b , 该不等式等价于 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, 这显然是成立的. 当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 即 $a = b$ 时, 等号成立. 对于 4 个非负实数 a, b, c, d , 应用前面的不等式两次, 我们可以得到类似的结果. 实际上

$$\begin{aligned} a+b+c+d &\geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \\ &\geq 4\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = 4\sqrt[4]{abcd} \end{aligned}$$

处理 3 个非负数的情况有一点小困难. 我们来考察两种方法, 即推论法或其他. 对于后者, 我们使用经典的因式分解方法. 设 a, b, c 是非负实数, 利用恒等式

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z) \left[\frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2} \right]$$

设 $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$, 则

$$a+b+c - 3\sqrt[3]{abc} = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) \cdot \frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c})^2 + (\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a})^2}{2}$$

因为 a, b, c 是非负实数, 上式右边显然是非负的, 因此

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

这就是 3 个变量的 AM-GM 不等式. 现在, 我们使用推论的技术再来证明这个结果. 假设 $a, b, c, d \geq 0$, 利用前面我们已经证明过的不等式

$$a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

取 $d = \frac{a+b+c}{3}$, 则

$$\frac{4}{3}(a+b+c) \geq 4\sqrt[4]{abc \left(\frac{a+b+c}{3} \right)}$$

两边同时除以 4, 然后再 4 次平方, 最后两边再除以 $a+b+c$, 得到

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc$$

这可以简化为

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

这就是 3 个变量的 AM-GM 不等式,证毕.我们必须要注意到当 $a=b=c=0$ 时除以 $a+b+c$ 时的小问题,但是在这种情况下不等式是显然成立的(事实上,等号成立).我们现在模仿这个方法证明 AM-GM 不等式的一般情况.

定理 2.1 (AM-GM 不等式) 对于所有非负实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

即 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的算术平均大于或等于相应数的几何平均.

证明 我们首先来证明变量个数是 2 的幂个时,不等式成立.采用归纳法,即我们对 k 进行归纳,来证明

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k} \geq 2^k \sqrt[2^k]{x_1 x_2 \dots x_{2^k}}$$

对所有非负实数 $x_1, x_2, \dots, x_{2^k}$ (其中 $k \geq 1$) 成立.在前面,已经证明了 $k=1$ 的情况.我们可以采用两次归纳假设从 k 推出 $k+1$.实际上

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k} + \dots + x_{2^{k+1}} &\geq 2^k \sqrt[2^k]{x_1 x_2 \dots x_{2^k}} + 2^k \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} x_{2^k+2} \dots x_{2^{k+1}}} \\ &\geq 2^{k+1} \sqrt[2^{k+1}]{x_1 x_2 \dots x_{2^{k+1}}} \end{aligned}$$

其中,这最后的不等式是对 $2^k \sqrt[2^k]{x_1 x_2 \dots x_{2^k}}$ 和 $2^k \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} x_{2^k+2} \dots x_{2^{k+1}}}$ 应用了 $k=1$ 的情况.这就证明了当变量个数是 2 的幂个时,AM-GM 不等式是成立的.注意到这是上面 AM-GM 不等式从两个变量到 4 个变量的过程.

现在,我们考虑任意一个正整数 n 和非负实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$. 考虑到 k 满足 $2^k > n$ (比如 $k = \lceil \log_2 n \rceil$), 设

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2^k} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

则,使用上述不等式

$$x_1 + \dots + x_n + (2^k - n) \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \geq 2^k \sqrt[2^k]{x_1 \dots x_n \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^{2^k - n}}$$

不等式两边同时除以 $2^k \cdot \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, 然后再 2^k 次方, 则

$$1 \geq x_1 x_2 \dots x_n \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^{-n}$$

这可以简化为

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

这正是我们所要证明的不等式.这个方法模仿了我们证明 3 个变量不等式的情况.在上面

的证明中再次出现了当 $x_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 除以 $2^k \cdot \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ 的小问题,但是这种情况不等式是显然成立的.

我们也可以证明当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时, AM-GM 不等式等号成立,这个问题作为练习题留给读者.

我们提供 AM-GM 不等式的第二个证明是使用下面这个引理.

引理 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是正实数且满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

引理的证明 采用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 不等式显然成立. 仔细观察, 我们很快地得到当 $n = 2$ 的情况, 因为 $a_1 a_2 = 1$, 因此

$$a_1 + a_2 - 2 = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

这就证明了当 $n = 2$ 时, 不等式成立. 采用归纳步骤, 假设不等式对任何 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 成立. 现在考察 $n + 1$ 个数 $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, 满足 $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$, 因为它们的乘积是 1, 因此它们不可能同时都小于 1 或者同时都大于 1. 至少有一个数大于或等于 1, 不妨设为 b_n , 并且至少有一个数小于或等于 1, 不妨设为 b_{n+1} , 则

$$(b_n - 1)(b_{n+1} - 1) \leq 0$$

即

$$b_n + b_{n+1} \geq 1 + b_n b_{n+1}$$

现在, 令 $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{n-1} = a_{n-1}$, 并且考虑 n 个数 $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n b_{n+1}$ (乘积 $b_n b_{n+1}$ 作为一个数处理). 由假设, 我们有

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n b_{n+1} \geq n$$

和不等式 $b_n + b_{n+1} \geq 1 + b_n b_{n+1}$ 相加, 可得

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n + b_{n+1} \geq n + 1$$

这就证明了引理.

现在来证明 AM-GM 不等式, 设

$$a_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}, a_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}, \dots, a_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

很显然, 其乘积是 1, 由引理可知其和至少是 n , 即

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} \geq n$$

这就等价于 AM-GM 不等式.

现在, 我们提出两个相关的不等式: QM-AM 不等式和 GM-HM 不等式.

定理 2.2 (QM-AM 不等式) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是正实数, 则