■高等学校理工科数学类规划教材辅导用书

LECTURE NOTES ON EXERCISE CLASS IN ADVANCED MATHEMATICS

高等数学习题课讲义

（下册）

主编◎袁学海　张　成

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

■高等学校理工科数学类规划教材辅导用书

LECTURE NOTES ON EXERCISE CLASS IN ADVANCED MATHEMATICS

高等数学习题课讲义

(下册)

主编◎袁学海　张　成

编者◎张金涛　刘明增
郭庆杰　李彩云

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课讲义. 下册 / 袁学海，张成主编
. — 大连 : 大连理工大学出版社，2019. 3
ISBN 978-7-5685-1919-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①袁… ②张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 033400 号

高等数学习题课讲义
GAODENG SHUXUE XITIKE JIANGYI

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84708943　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://dutp.dlut.edu.cn
丹东新东方彩色包装印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:13.75　字数:310 千字
2019 年 3 月第 1 版　2019 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑:李宏艳　责任校对:周　欢
封面设计:奇景创意

ISBN 978-7-5685-1919-9　定　价:32.00 元

前　言

“高等数学”是大学本科生一年级的必修课，也是相关专业学生学习后继课程的基础，为日后从事学习和研究提供必备的知识和工具，因此国内外高校都将其列入本科一年级的必修课程. 通过该课程的学习，可培养学生的逻辑思维能力、计算能力、分析问题和解决问题的能力.

目前国内高校一般在 $8 \sim 12$ 个学分内完成该课程的教学任务. 由于当前高考压力，学生在中学学习时普遍以题型训练和习题量训练为主，进入大学后普遍不适应自主学习和每天要接受新知识的学习方式. 由于“高等数学”课程知识量大、计算量大、逻辑思维性强，所以学生在学习中普遍感到困难，呈现出两极分化和厌学的现象，久而久之便失去了学习兴趣，丧失了斗志.

“高等数学”的教学除了传授知识外，还肩负着培养学生学习方法、学习兴趣和学习能力的责任. 学生在“高等数学”课程学习上遇到的困难主要体现在如下四个方面：

(1) 对问题的理解不到位.

(2) 逻辑思维能力较差.

(3) 计算能力普遍不强.

(4) 解题能力较差.

这里仅举几例加以说明：

(1) 已知函数 $f(x)$ 连续且 $f(0) = 0, f'(0) = 2$，求极限 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$.

很多学生这样完成：连续使用两次洛必达法则，即

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} f'(x) = \frac{1}{2} f'(0) = 1$$

上述做法第一步是正确的，第二步是错误的. 因为题目给出的条件是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 时可导，因而不知道 $x \neq 0$ 时是否可导. 即使 $x \neq 0$ 时可导，也需 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续才能这样做.

正确的做法是：先使用洛必达法则，然后使用导数的定义，即

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} f'(0) = 1$$

这是在分段函数求导时常犯的错误.

(2) 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$，求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

很多学生这样完成：设 $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$，在 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ 两边取极限，得 $a = \sqrt{a(3 - a)}$，于是 $a = \dfrac{3}{2}$.

这种做法的错误在于：没有证明数列$\{x_n\}$极限的存在性. 应该首先使用单调有界原理证明数列$\{x_n\}$单调有界，然后求极限.

(3) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

很多学生这样完成：令 $F(x)=f(x)$，$G(x)=x^2$，在$[a,b]$内应用柯西中值定理，$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

于是有

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

这种做法的错误在于：在应用柯西中值定理时，不能出现 $G'(x)=0$ 的情况，而本题并不能排除 $G'(x)=0$ 的情况.

正确的做法是：令 $F(x)=f(x)(b^2-a^2)-x^2[f(b)-f(a)]$，然后应用拉格朗日中值定理即可.

(4) 设数列$\{u_n\}(u_n>0)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$.

很多学生这样完成：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_{n+1}-\ln u_n}{(n+1)-n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}}=e^{\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}}=e^{\ln\rho}=\rho$$

初看起来似乎没有问题，但如果 $\rho=0$，那么这种做法就不行了. 这是关于极限保号性的问题. 一般有：极限大于零 $\Rightarrow$ 数列(终究)会大于零；数列大于零 $\Rightarrow$ 极限大于或等于零(有可能等于零，例如 $x_n=\dfrac{1}{n}$).

(5) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^2}\right]=2$，求 $f'(0)$.

很多学生这样完成：两次应用洛必达法则，即

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+f'(x)+f'(x)+xf''(x)}{2}$$
$$=f'(0)+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}xf''(x)=f'(0)$$

这种做法等于增加了两个条件：$f(x)$ 二阶可导；$\lim\limits_{x\to 0}xf''(x)=0$. 但题目中没有这两个条件.

正确的做法是：应用泰勒公式或应用一次洛必达法则，然后用导数定义求解.

为了帮助学生学习"高等数学"课程，教师在教学中适当引入习题课，帮助学生对知识点进行梳理，增加一些为理解知识点而设计的典型题目，对典型题目加以分类、归纳和总结，无疑会对学生的学习起到事半功倍的作用. 为此，我们根据多年教学经验，在教学中有意识地对知识点加以认真归纳和总结，对典型题目进行分类和归纳，尽量从不同角度处理习题，做到一题多解，逐渐总结出有一定特色的习题课教学内容，通过加工整理和适度

拓展,从而形成了这部《高等数学习题课讲义》.

在本书的编写过程中,我们力图突出如下特色:

(1) 对教材中每章的内容做了简单而实用的总结.

(2) 对每章内容设计了 3 ～ 5 次习题课内容,对典型题目做了归纳和分类.尽量给出每道题的分析过程、解题切入点和解题过程.教师可选讲部分内容,其余留给学生自学.

(3) 设计了综合题选讲,学有余力的学生可选学此部分内容.编者从事数学竞赛辅导多年,在辅导的竞赛试题中精选了一些题目作为此部分内容.通过这部分内容的学习,学生在参加各类高等数学竞赛和考研时获得了较好的成绩.如大连理工大学 2013 级姜延鑫同学在 2016 年全国大学生高等数学竞赛中获得辽宁赛区第一名,并在 2017 年全国大学生高等数学竞赛决赛中获得二等奖;2016 级苏宇鹏同学在 2017 年全国大学生高等数学竞赛中获得辽宁赛区第一名,并在 2018 年全国大学生高等数学竞赛决赛中获得一等奖.

(4) 每章都补充了部分习题.这些习题都是围绕知识点设计的,可以帮助学生学习、理解教材的内容,强化解题技巧.

(5) 设计了期中考试模拟试题(四套)和期末考试模拟试题(四套),并附参考答案.

本书可作为教师教学的辅助用书,也是学生学习高等数学的理想辅助资料.实际上,任何一本参考书都不能代替亲自做习题,"只看不练"不会收到理想的效果.建议初学者仔细阅读各章最前面的导读,并认真研读例题,先独立求解,然后再与书中解法做比较.我们相信:学生使用本书,一定会提高学习高等数学的积极性,提高期末、考研和各种高等数学竞赛的成绩.

全书由袁学海和张成负责全面设计、统稿和最后定稿.本书共九章,分上、下两册.张金涛负责第一章的编写,袁学海负责第二章、第三章、第六章、第九章及部分模拟试题的编写,李彩云负责第四章的编写,张成负责第五章及部分模拟试题的编写,刘明增负责第七章的编写,郭庆杰负责第八章的编写.

在本书的编写过程中,贺明峰教授、谢琳教授、刘会民教授和赵植武教授都提出了很好的建设性意见.我们参考了国内外相关教材和资料.大连理工大学盘锦校区教学事务部在"高等数学"课程建设上给予了很大帮助.在此一并表示感谢!

读者在使用过程中如果发现错误和疏漏之处,欢迎提出宝贵意见.

大连理工大学　袁学海
大 连 大 学　张 成
2018 年 9 月

目　录

第五章　向量代数与空间解析几何

本章内容包括内积、外积和混合积；平面；直线；两直线的夹角、两平面的夹角、直线与平面的夹角；曲面和曲线等内容.

一、内积、外积和混合积

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，则：

1. $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角：$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

2. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$（注意：这是一个数，不是一个向量）.

3. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积（叉积）

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$（表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的体积）.

4. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

注意　(1) $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积；

(2) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关.

5. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向向量为 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$\cos\alpha=\dfrac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\beta=\dfrac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$，其中 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角（实际上，令 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 的夹角为 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{i}|}=\dfrac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}=\cos\alpha$）.

二、平面

1. 平面方程的一般形式：$Ax+By+Cz+D=0$.

2. 已知平面法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 和平面上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 可确定一个平面

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

3. 不共线的三点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$ 确定一个平面方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

4. 平面的截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（$a,b,c$ 依次称为平面在 x,y,z 轴上的截距）.

5. 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

三、直线

1. 两相交平面确定一条直线 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，$L$ 的方向向量可取为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

2. 直线的点向式方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

3. 直线的参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$.

4. 点 M_1 到直线的距离公式（取直线上一点 M_0，直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$）

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$$

也可用直线的参数方程转化成一元函数极值问题（例 5-6）.

5. 过直线 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程可写为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad \text{(例 5-7)}$$

四、两直线的夹角、两平面的夹角、直线与平面的夹角

1. 两直线的夹角为它们的方向向量 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 的夹角的锐角.

2. 两平面的夹角为它们的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角的锐角.

3. 直线 L 与平面 Π 的夹角 φ 由直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 和平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ 来确定

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}$$

五、曲面和曲线

要求会求曲线绕坐标轴的旋转曲面(例 5-13)和曲线在坐标面的投影(例 5-16、例 5-17).

本章设计了一类习题课内容:综合题选讲. 含有以下基本题型,在学习时要注意体会几何方法与代数方法的结合:

(1)点积、叉积、混合积的应用(例 5-1～例 5-3、例 5-5).

(2)如何判断两直线为异面直线(例 5-5).

(3)点到直线的距离与垂足坐标(例 5-6).

(4)两异面直线的距离(例 5-8、例 5-10).

(5)平面束的应用(例 5-14).

习题课　综合题选讲

【例 5-1】 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,$|\boldsymbol{b}|=1,\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$,求$\lim\limits_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

解　由于

$$\begin{aligned}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}&=\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=\frac{(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{x\sqrt{(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})}+\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}}\\&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{x(\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}+\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}})}\\&=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x}{\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}+\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}}=\frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

【例 5-2】 已知单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴的夹角相等,B 是点 $M(1,-3,2)$关于点 $N(-1,2,1)$的对称点. 求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

解　(1)设$\overrightarrow{OA}=(x,y,z)$,则由于 $\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OA}|},\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OA}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OA}|}$,且$\alpha=\beta=\gamma$,故 $x=y=z$. 又$|\overrightarrow{OA}|=1$,所以 $3x^2=1$,则 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)设点 B 坐标为(a,b,c),则点 N 为点 M 与点 B 的中点,故

$$\frac{a+1}{2}=-1,\frac{b-3}{2}=2,\frac{c+2}{2}=1$$

因此点 B 坐标为$(-3,7,0)$. 于是

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3} & \pm\frac{\sqrt{3}}{3} & \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(-7\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k})$$

【例 5-3】 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 满足 $\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{b}$ 且在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影为 14，求 $\boldsymbol{\gamma}$.

解 由于 $\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{b}$，故可设 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$. 又 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，所以 $\boldsymbol{\gamma}=(-7\lambda,-5\lambda,-\lambda)$. 由 $14=\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{\gamma}=\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{c}|}$ 知，$-14\lambda-5\lambda-2\lambda=14|\boldsymbol{c}|=42$，于是 $\lambda=-2$. 因此 $\boldsymbol{\gamma}=(14,10,2)$.

【例 5-4】 一直线过点 $M(2,3,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0\\x-y+z+4=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+3y-1=0\\y+z-2=0\end{cases}$ 相交，求此直线方程.

解 (1)求过点 $M(2,3,1)$ 和直线 L_1 的平面方程 Π_1.

设过 L_1 的平面束方程为 $x+y+\lambda(x-y+z+4)=0$，即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+\lambda z+4\lambda=0$$

由于 Π_1 过点 $M(2,3,1)$，所以有 $2(1+\lambda)+3(1-\lambda)+\lambda+4\lambda=0$，则 $\lambda=-\dfrac{5}{4}$. 于是有平面 $\Pi_1:x-9y+5z+20=0$.

(2)求过点 $M(2,3,1)$ 和直线 L_2 的平面方程 Π_2.

设过 L_2 的平面束方程为 $x+3y-1+\lambda(y+z-2)=0$，即

$$x+(3+\lambda)y+\lambda z-1-2\lambda=0$$

将点 $M(2,3,1)$ 代入得 $\lambda=-5$. 于是有平面 $\Pi_2:x-2y-5z+9=0$.

(3)由于 Π_1 与 Π_2 均过点 $M(2,3,1)$，所以此两平面相交，其交线 L 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -9 & 5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}=(55,10,7)$$

易知直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-1,-2)$，$\boldsymbol{s}_2=(3,-1,1)$.

由于 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{s}_1$ 不共线，$\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 不共线，而 L 与 L_1 共面，故 L 与 L_1 相交. 同理：L 与 L_2 相交. 因此，所求直线为 Π_1 与 Π_2 的交线

$$\begin{cases}x-9y+5z+20=0\\x-2y-5z+9=0\end{cases}$$

【例 5-5】 （如何判断两直线是否共面）问通过两直线

$$L_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}\text{和 }L_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$$

能否决定一个平面？若能，则求出此平面方程.

解 (1)L_1 上的点 $M_1=(2,-2,3)$，方向向量为 $s_1=(1,-1,2)$，L_2 上的点 $M_2=(1,-1,1)$，方向向量为 $s_2=(-1,2,1)$，则 L_1 与 L_2 共面$\Leftrightarrow s_1,s_2,\overrightarrow{M_1M_2}$共面$\Leftrightarrow$混合积$[s_1,s_2,\overrightarrow{M_1M_2}]=(s_1\times s_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0$.

由于$(s_1\times s_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&2&1\\-1&1&-2\end{vmatrix}=0$，因此两直线 L_1 与 L_2 共面.

(2)设 L_1 与 L_2 决定的平面 Π 的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则 $\boldsymbol{n}\perp s_1$ 且 $\boldsymbol{n}\perp s_2$，于是可令

$$\boldsymbol{n}=s_1\times s_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\-1&2&1\end{vmatrix}=(-5,-3,1)$$

又平面 Π 通过直线 L_1，故 M_1 在平面 Π 上，于是平面 Π 的方程为$-5(x-2)-3(y+2)+(z-3)=0$，即 $5x+3y-z-1=0$.

【例 5-6】 求点$(5,4,2)$到直线$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$的距离与垂足坐标.

解法 1 由公式 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$，将 $M_0(-1,3,1)$，$M_1(5,4,2)$，$\boldsymbol{s}=(2,3,-1)$代入得

$$d=\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\6&1&1\\2&3&-1\end{matrix}\right\|/|\boldsymbol{s}|=2\sqrt{6}$$

设垂足坐标为 $M(x,y,z)$，则$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}=t$，于是 $x=-1+2t$，$y=3+3t$，$z=1-t$.

令 $d^2=(x-5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=(2t-6)^2+(3t-1)^2+(t+1)^2$，由 $d^2=(2\sqrt{6})^2=24$ 知 $t=1$. 于是 $x=1$，$y=6$，$z=0$，即垂足坐标为 $M(1,6,0)$.

解法 2 易知直线的参数方程为 $x=-1+2t$，$y=3+3t$，$z=1-t$.

则点 $M_1(5,4,2)$到直线上点(x,y,z)的距离为 $d=\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2}$.

令 $f(t)=d^2=(2t-6)^2+(3t-1)^2+(t+1)^2$，则$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=4(2t-6)+6(3t-1)+2(t+1)=0$时，有 $t=1$. 由实际意义知 $t=1$ 时 $f(t)$取最小值，$f(1)=24$. 故 $d=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. 垂足坐标为 $M(1,6,0)$.

【例 5-7】 设平面 Π:$Ax+By+Cz+D=0$ 过直线 L:$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$.

求证：存在实数 λ_1,λ_2，使得该平面方程可写为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

证明 首先，直线 L 的方向向量可取为：$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，这里 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. 由于 L 在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上，故 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$垂直，则$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即混合积

$$[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}]=(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

于是 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}$ 共面，则 $\boldsymbol{n}$ 可由 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 线性表示，即存在实数 λ_1,λ_2，使得 $\boldsymbol{n}=\lambda_1\boldsymbol{n}_1+\lambda\boldsymbol{n}_2$. 则 $A=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$, $B=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2$, $C=\lambda_1C_1+\lambda_2C_2$. 因此平面 Π 可写为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+D-\lambda_1D_1-\lambda_2D_2=0$$

又平面 Π 过直线 L，所以 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则有 $D=\lambda_1D_1+\lambda_2D_2$. 因此平面 Π 可写为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

【例 5-8】 设直线 $L_i:\dfrac{x-x_i}{m_i}=\dfrac{y-y_i}{n_i}=\dfrac{z-z_i}{p_i}(i=1,2)$ 为两条异面直线，证明：L_1 与 L_2 之间的距离为 $d=\dfrac{|[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}]|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$，这里 $\boldsymbol{s}_i=(m_i,n_i,p_i)(i=1,2)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，$[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}]$ 表示 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$ 的混合积.

证法 1 因为 L_1 与 L_2 为异面直线，所以 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$ 组成一个平行六面体，其体积 $V=|[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}]|$. 设 $s=|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|$，则 $d\cdot s=V$. 于是

$$d=\frac{V}{s}=\frac{|[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}]|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$$

证法 2 设 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$，则 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_2$. 则 L_1 与 L_2 之间的距离是 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影长度，即

$$d=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{M_1M_2}|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}]|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$$

【例 5-9】 证明：点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

证法 1 在平面上任取一点 M，则向量 $\overrightarrow{MM_0}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 在平面法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{MM_0}=\dfrac{-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

于是点 M_0 到平面的距离为 $d=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{MM_0}|=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

证法 2 令 $f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$，则问题归结为 $f(x,y,z)$ 在条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 下的极值问题. 令

$$L=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D)$$

则有

$$\begin{cases}L_x=2(x-x_0)+\lambda A=0 & (1)\\ L_y=2(y-y_0)+\lambda B=0 & (2)\\ L_z=2(z-z_0)+\lambda C=0 & (3)\\ Ax+By+Cz+D=0 & (4)\end{cases}$$

(1)×A+(2)×B+(3)×C 且代入(4)得 $\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$.

于是 $x-x_0=-\frac{\lambda}{2}A, y-y_0=-\frac{\lambda}{2}B, z-z_0=-\frac{\lambda}{2}C$，则

$$\min f(x,y)=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2(A^2+B^2+C^2)=\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{A^2+B^2+C^2}$$

因此 $d=\sqrt{\min f(x,y)}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

【例 5-10】 求两异面直线 $L_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ 和 $L_2: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$ 之间的最短距离.

解法 1 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,1,2)$，L_1 上的点 $M_1(-1,0,1)$；L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(1,3,4)$，L_2 上的点 $M_2(0,-1,2)$，则 $d=\frac{|(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$.易知

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=(-2,-2,2), \overrightarrow{M_1M_2}=(1,-1,1)$$

所以 $d=\frac{|-2+2+2|}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法 2 L_1 的参数方程为 $x=t-1, y=t, z=2t+1$，L_2 的参数方程为 $x=r, y=3r-1, z=4r+2$，则 L_1 上的点到 L_2 上的点的距离的平方为

$$f(t,r)=(t-1-r)^2+(t-3r+1)^2+(2t-4r-1)^2$$

令 $\frac{\partial f}{\partial t}=4(3t-6r-1)=0, \frac{\partial f}{\partial r}=4(13r-6t+1)=0$，则 $r=1, t=\frac{7}{3}$，于是

$$d^2=\min f(t,r)=f\left(\frac{7}{3},1\right)=\frac{1}{3}$$

故 $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法 3 直线 $L_1: \begin{cases} y-x-1=0 \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$，过 L_1 的平面束 $y-x-1+\lambda(2y-z+1)=0$，即 $-x+(1+2\lambda)y-\lambda z-1+\lambda=0$. 令其与直线 L_2 平行，则 $\boldsymbol{n}=(-1,1+2\lambda,-\lambda)$ 垂直于 $\boldsymbol{s}_2=(1,3,4)$. 则 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}_2=2\lambda+2=0$，即 $\lambda=-1$. 于是平面方程为 $-x-y+z-2=0$ 或 $x+y-z+2=0$. L_2 上点 $M_2(0,-1,2)$ 到该平面的距离为

$$d=\frac{|0-1-2+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

【例 5-11】 设有两直线 $L_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$，$L_2: \frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$，求平行于 L_1，L_2 且与它们等距的平面方程.

解 L_1 上的点 $M_1(1,0,-1)$，方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(-1,2,1)$，$L_2$ 上的点 $M_2(-2,1,2)$，方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(0,1,-2)$，由于 $[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=10\neq 0$，故 L_1 与 L_2 为异面直线. 设平面 Π 平行于 L_1 且平行于 L_2，则其法向量 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_2$，则可令

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-5,-2,-1)$$

又 Π 到 L_1,L_2 的距离相等，故 Π 过 M_1 与 M_2 的中点 $M\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，于是平面的方程为 $-5\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\left(y-\frac{1}{2}\right)-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$，即 $5x+2y+z+1=0$.

【例 5-12】 求圆 $\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100\\ 2x-2y-z+9=0\end{cases}$ 的圆心与半径.

解法 1 该圆是球面与平面的交线，故先过球心作平面的垂线. 该垂线垂直于平面，故其方向向量可取为平面的法向量，即 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=(2,-2,-1)$. 则垂线方程为 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$，其参数方程形式为 $x=3+2t,y=-2-2t,z=1-t$. 设垂足坐标为 (x,y,z)，则有 $2\cdot(3+2t)-2\cdot(-2-2t)-(1-t)+9=0$，则 $t=-2$.

于是垂足坐标为 $(-1,2,3)$. 则圆的圆心为 $(-1,2,3)$，半径 $r=\sqrt{100-d^2}$，其中 d 为球心到圆心的距离 $=\sqrt{(3+1)^2+(-2-2)^2+(1-3)^2}=6$，则 $r=\sqrt{100-6^2}=8$.

解法 2 球心 $(3,-2,1)$ 到平面的距离为

$$d=\frac{|2\times3-2\times(-2)-1\times1+9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=6$$

则所求的半径 $r=\sqrt{100-d^2}=\sqrt{100-36}=8$. 设圆的圆心为 (x_0,y_0,z_0)，则 (x_0,y_0,z_0) 为下列条件极值问题的极值点

$$\min f(x,y)=(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$$

使得

$$2x-2y-z+9=0$$

令 $L(x,y,z,\lambda)=(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2+\lambda(2x-2y-z+9)$，则

$$\begin{cases}L_x=2(x-3)+2\lambda=0\\ L_y=2(y+2)-2\lambda=0\\ L_z=2(z-1)-\lambda=0\\ L_\lambda=2x-2y-z+9=0\end{cases}$$

则有 $x_0=-1,y_0=2,z_0=3$. 于是圆心为 $(-1,2,3)$.

解法 3 在平面上求一点 (x,y,z)，使其到球心 $(3,-2,1)$ 的距离最小，令

$$D^2=(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$$

由于 $2x-2y-z+9=0$，故 $z=2x-2y+9$，于是

$$G(x,y)=D^2=(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=(x-3)^2+(y+2)^2+(2x-2y+8)^2$$

则

$$G_x=2(x-3)+4(2x-2y+8)=0 \tag{1}$$

$$G_y=2(y+2)-4(2x-2y+8)=0 \tag{2}$$

(1)+(2)得 $y=1-x$. 再代入(1)得 $x=-1, y=2, z=2x-2y+9\Big|_{\substack{x=-1\\y=2}}=3$.

故圆心坐标为$(-1,2,3)$, $D^2=36$. 故 $r=\sqrt{100-6^2}=\sqrt{64}=8$.

解法 4　球心$(3,-2,1)$到平面 $2x-2y-z+9=0$ 的距离为

$$d=\frac{|2\times 3+(-2)\times(-2)+1\times(-1)+9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=6$$

以球心$(3,-2,1)$为球心,以 6 为半径作球面

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=36 \tag{3}$$

则平面 $2x-2y-z+9=0$ 与此球面相切,切平面法向量 $\boldsymbol{n}_0=(2(x_0-3),2(y_0+2),2(z_0-1))$与 $\boldsymbol{n}=(2,-2,-1)$平行. 则

$$2(x_0-3)=2k, 2(y_0+2)=-2k, 2(z_0-1)=-k$$

从而

$$x_0-3=k, y_0+2=-k, z_0-1=-\frac{k}{2}$$

将其代入(3)得 $k^2+k^2+\frac{k^2}{4}=36$,则 $k=\pm 4$.

当 $k=4$ 时,$x_0=7, y_0=-6, z_0=-1$(不在平面上);

当 $k=-4$ 时,$x_0=-1, y_0=2, z_0=3$.

由于$(-1,2,3)$在平面 $2x-2y-z+9=0$ 上,故$(-1,2,3)$为圆心,$r=\sqrt{100-36}=8$.

【例 5-13】　求直线 L:$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程.

解　用平面 $z=t$ 去截旋转曲面得一交线,直线 L 与此交线的交点为 $M_0(x_0,y_0,t)$. 在交线上任取一点 $M(x,y,t)$,平面 $z=t$ 与 z 轴的交点为 $D(0,0,t)$,则有

$$|MD|^2=|M_0D|^2$$

即 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$.

又 $x_0=1+z_0-1=t, y_0=2(z_0-1)=2(t-1)$,故有交线方程

$$\begin{cases}x^2+y^2=t^2+4(t-1)^2\\ z=t\end{cases}$$

消去 t 得旋转曲面方程为 $x^2+y^2=z^2+4(z-1)^2$.

【例 5-14】　求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解　过直线作平面 Π,使之垂直于已知平面,则平面 Π 的方程可写为 $2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$,即$(2+3\lambda)x+(-4-3\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$. 则其法向量 $\boldsymbol{n}=(2+3\lambda,-(4+3\lambda),1-2\lambda)\perp \boldsymbol{n}_1=(4,-1,1)$. 于是

$$4\cdot(2+3\lambda)+(4+3\lambda)+1-2\lambda=0$$

则 $\lambda=-1$. 则平面 Π 为 $-x-y+3z+9=0$,所求投影直线方程为

$$\begin{cases}4x-y+z=1\\ x+y-3z=9\end{cases}$$

【例 5-15】 求单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1$与球面$x^2+y^2+z^2=4$的交线且与直线$\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$垂直的平面方程.

解 直线的方向向量$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&0\\0&3&1\end{vmatrix}=(0,-1,3)$.由于所求平面与直线垂直,故其法向量可取为$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}$,则平面方程为$y-3z+D=0$.又平面过交线

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1 & (1)\\x^2+y^2+z^2=4 & (2)\end{cases}$$

$4(1)-(2)$得$y^2-9z^2=0$.

则两曲面的交线为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\y-3z=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\y+3z=0\end{cases}$$

故所求平面方程为$y-3z=0$.

【例 5-16】 假定直线L在yOz面上的投影方程为$\begin{cases}2y-3z=1\\x=0\end{cases}$,而在$zOx$面上的投影方程为$\begin{cases}x+z=2\\y=0\end{cases}$,求直线$L$在$xOy$面上的投影方程.

解 由所给条件知,L在yOz面上的投影为平面$2y-3z=1$及平面$x=0$的交线,故直线L必在平面$2y-3z=1$上.同理,直线L也必在平面$x+z=2$上.于是L为这两个平面的交线,即$\begin{cases}2y-3z=1\\x+z=2\end{cases}$.消去$z$得$3x+2y=7$.于是直线$L$在$xOy$面上的投影方程为

$$\begin{cases}3x+2y=7\\z=0\end{cases}$$

【例 5-17】 求曲线L:$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2-Ry=0\end{cases}$$(R>0)$在各坐标轴上的投影方程.

解 一般,求曲线方程$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$在$xOy$面上的投影方程,可先消去$z$,得到方程$\varphi(x,y)=0$,则该曲线在$xOy$面上的投影曲线为$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\z=0\end{cases}$(它是曲面$\varphi(x,y)=0$与平面$z=0$的交线).

(1)曲线L在xOy面上的投影.

注意 曲线L为柱面$x^2+y^2=Ry$与球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的交线,该交线在xOy面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2-Ry=0\\z=0\end{cases}$$