普通高等教育“十三五”规划教材

大学数学基础丛书

丛书主编 袁学刚 周文书 刘 满

线性代数学习指导

（理工类）

袁学刚 牛大田 王书臣 张 友 主编

黄永东 主审

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$Ax = b$$

清华大学出版社

| 大学数学基础丛书 |

线性代数学习指导

（理工类）

袁学刚　牛大田　王书臣　张　友　主编

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是与高等学校各专业的大学生学习“线性代数”课程同步的学习指导书。内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、向量及其运算、矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵与对角化、二次型。每节基本包括知识要点、疑难解析、经典题型详解和课后习题选解四个模块。每章的开始列出了本章的基本要求和知识网络图，最后部分是复习题解答和考研试题选编。编写本书的主要目的是为了帮助学生更好地理解“线性代数”课程的内容，掌握课程的基本理论、解题方法及技巧。

本书可以作为高等学校理科、工科和技术学科等非数学专业的线性代数的学习指导书，也可作为青年教师的教学参考书和考研学生的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导：理工类/袁学刚等主编. —北京：清华大学出版社，2019
(大学数学基础丛书)
ISBN 978-7-302-52511-0

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①袁…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 040844 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：董　瑾

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：17.75　　**字　　数**：427 千字
版　　次：2019 年 3 月第 1 版　　**印　　次**：2019 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：39.80 元

产品编号：083178-01

前言 PREFACE

在中学，初等数学处理的是数量关系，与其不同的是，线性代数需要从矩阵、向量的视角来看待并处理问题，二者在研究内容、解题方法及技巧上存在许多本质上的差异。线性代数作为高等学校一门重要的基础课程，对培养学生的理性思维能力、逻辑推理能力以及综合判断能力起着不可或缺的作用。编者认为，要想学好线性代数课程，首先要学习并用好"规则"，这里所指的"规则"包括教材内容涵盖的定义、性质、定理、推论及一些重要的结论等。学习并用好"规则"需要分为三个阶段：初级阶段是规范并合理使用"规则"，即能够使用基本概念和基本结论解决一些较为直观的问题；中级阶段是掌握并灵活运用"规则"，随着学习的深入，"规则"越来越多，需要解决的问题亦是如此，此阶段要求学生能够解决具有一定难度的问题；高级阶段是熟知并综合利用"规则"，通过规范的培养训练，使学生能够解决一些启发性和综合性较强的问题。

编写此学习指导书源于以下两方面的考虑：

一是加强教材内容的认知。目前已出版并正在使用的"线性代数"教材都有各自的特点和优势，但限于篇幅，不可能完全覆盖并诠释每个知识点的内涵和适用范围。想要达到"以人为本、因材施教、夯实基础、创新应用"的指导思想，任重道远。

二是弥补课堂教学的不足。学生在学习线性代数时，课堂教学只是其中的一部分。由于教学时数的限制，导致课堂教学密度大、速度快，多数大一新生不能适应线性代数教学方式和方法，并且许多解题方法与技巧不可能在课堂上得到完整的讲解与演练，当然更谈不上让学生系统掌握这些方法与技巧。

为此，本书对教材的各个知识要点进行了必要的提炼、释疑、分析、串联，目的是帮助初学者理解、熟悉并规范使用"规则"，掌握必要的解题方法与技巧，使其能够对各知识要点有更好的理解和参悟，达到融会贯通的效果，进而提升综合解题能力和自主学习能力。

此学习指导书的章节与我们编写的《线性代数》(清华大学出版社，袁学刚、牛大田、张友和王书臣主编)教材同步，与其他版本《线性代数》教材的内容并行，可以作为大一学生的学习指导书，与课堂教学同步使用，也可作为备考硕士研究生的考生进行总结性复习或专题性研究的学习资料。本书各章节的基本框架如下：

知识要点：列出本节必须掌握的知识点，包括定义、性质、定理、推论、一些重要的结论，并配以必要的说明。

疑难解析：根据多年教学的经验，选择一些容易出现理解不到位和混淆的知识点进行

解答,帮助读者正确理解并合理使用这些“规则”。

经典题型详解:每节精选了一些基础类、提高类和综合类的经典题型,给出有针对性的分析、归纳和总结,引领读者分析问题的内涵、定位所用的知识点、指出使用的方法和技巧,进而提高读者对相关“规则”的认知能力和综合应用能力。

课后习题选解及复习题解答:针对配套教材的课后习题和复习题中具有一定难度的题目给出了部分解答,更重要的是体现解题的标准步骤和解题的方法及技巧。

考研试题选编:在经典题型和课后习题基础上,精选了近年来的考研试题,并给出了必要的提示和解答。

本书由大连民族大学理学院组织编写。袁学刚、牛大田、王书臣和张友任主编,负责全书的统稿及定稿。参与编写本书的教师有:张文正(第1、2章)、张誉铎(第3、4章)、牛大田(第5、6章)。

感谢大连民族大学各级领导在编写本书时给予的关心和支持。感谢清华大学出版社的刘颖编审在编写本书时给予的具体指导及宝贵建议。本书在编写过程中,参阅了一些同行专家编写的辅导书,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,成书仓促,书中一定存在某些不足或错误,恳请广大同行和读者批评指正。

编　者

2018年12月

目录 CONTENTS

第1章 行列式

一、基本要求

1. 理解行列式的定义。
2. 掌握行列式的性质和行列式按行(列)展开的方法。
3. 会计算一些特殊形式的 n 阶行列式。
4. 了解克莱姆法则。

二、知识网络图

- 行列式
  - 定义
    - 二阶行列式(定义 1.1)
    - 三阶行列式(定义 1.2)
    - (代数)余子式(定义 1.3)
    - n 阶行列式(定义 1.4)
    - 转置行列式(定义 1.5)
  - 性质
    - 1. 转置性
    - 2. 反号性及推论
    - 3. 倍乘性及推论 1、推论 2、推论 3
    - 4. 可加性
    - 5. 倍加性
  - 计算方法
    - 降阶法：按行(列)展开定理(定理 1.1)及推论
    - 化三角法：利用行列式的性质及推论化简并计算
    - 加边法：将行列式的阶数升高一阶，便于计算
    - 递推法：利用降阶法或化三角法得到行列式的递推公式
    - 数学归纳法：证明与 n 阶行列式相关的等式
  - 重要结论
    - 定理 1.2 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D_n, & i=j, \\ 0, & i\neq j; \end{cases}$ $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D_n, & i=j, \\ 0, & i\neq j \end{cases}$
    - 范德蒙德行列式
  - 克莱姆法则及相关结论(定理 1.3、定理 1.4 及推论)

1.1 行列式的概念

一、知识要点

1. 二阶、三阶行列式

定义 1.1 以数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为元素的二阶行列式定义为

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}。\tag{1.1}$$

对于如下的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}\tag{1.2}$$

其中 x_1,x_2 为未知量，$a_{ij}(i,j=1,2)$ 为未知量的系数，b_1,b_2 为常数项。若令

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2^1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2^2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当系数行列式满足 $D_2\neq 0$ 时，线性方程组(1.2)的解便可用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{D_2^1}{D_2},\qquad x_2=\frac{D_2^2}{D_2}。\tag{1.3}$$

式(1.3)即为二元线性方程组的求解公式($D_2\neq 0$)。其中，二阶行列式 D_2^1 是系数行列式 D_2 的第1列的元素被依次替换为常数项；D_2^2 是系数行列式 D_2 的第2列的元素被依次替换为常数项。

为了便于记忆，二阶行列式的**对角线法则**，如图1.1所示。在图1.1中，实线称为**主对角线**，虚线称为**次对角线**。于是，二阶行列式等于主对角线上两个元素乘积与次对角线上两个元素乘积之差。

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

图 1.1

定义 1.2 以数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为元素的三阶行列式定义为

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}。\tag{1.4}$$

对于如下三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}\tag{1.5}$$

其中 $x_i,a_{ij},b_i(i,j=1,2,3)$ 分别为未知量，未知量的系数以及常数项。若令

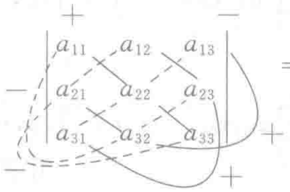
$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_3^1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_3^2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3^3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

当系数行列式满足 $D_3\neq 0$ 时，线性方程组(1.5)有唯一解，并且解的形式为

$$x_1 = \frac{D_3^1}{D_3}, \qquad x_2 = \frac{D_3^2}{D_3}, \qquad x_3 = \frac{D_3^3}{D_3}。 \tag{1.6}$$

式(1.6)即为三元线性方程组的求解公式($D_3 \neq 0$)。式(1.6)中,三阶行列式 D_3^1、D_3^2 和 D_3^3 是系数行列式 D_3 的第 1 列、第 2 列和第 3 列的元素分别被替换为常数项。

三阶行列式的**对角线法则**,如图 1.2 所示。



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

图 1.2

在图 1.2 中,元素 a_{11},a_{22},a_{33} 所连接的实线称为**主对角线**;元素 a_{13},a_{22},a_{31} 所连接的虚线称为**次对角线**。由图 1.2 可见,3 条实线(主对角线方向)上 3 个元素的乘积均取正号,3 条虚线(次对角线方向)上 3 个元素的乘积均取负号。

需要指出的是,对角线法则是为了便于理解并记忆二阶、三阶行列式的表达式,这个法则只对二阶、三阶行列式适用,对 4 阶及以上的行列式不再适用。

2. n 阶行列式

定义 1.3 基于已定义的二阶、三阶行列式,对于由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

划去元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$所在的第 i 行和第 j 列后,剩下的元素按原来的相对顺序排列所构成的数表所定义的数表所定义的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij},即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.7}$$

并且称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1.8}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

定义 1.4 由 n 行 n 列共 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$构成的 n 阶行列式 D_n 定义为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}, \tag{1.9}$$

其中 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$ 是分别与第1行的元素 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$ 对应的代数余子式。通常,式(1.9)也称为 n 阶行列式 D_n 按第1行的展开式。

定理1.1 对于给定的 n 阶行列式,它可以表示为它的任意一行(列)的各元素与其对应代数余子式的乘积之和,即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.10}$$

或

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \qquad j = 1,2,\cdots,n。 \tag{1.11}$$

该定理又称为行列式的**按行(列)展开定理**。

推论 如果 n 阶行列式中第 i 行的元素除 a_{ik} 外都为零,那么行列式等于 a_{ik} 与其对应的代数余子式的乘积,即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ik} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ik}A_{ik}。$$

此时,n 阶行列式被约化为一个 $n-1$ 阶行列式。

一些特殊行列式:

(1) $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

该行列式称为**下三角形行列式**,特点是:当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$。

(2) $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

该行列式称为**上三角形行列式**,特点是:当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$。

(3) $D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。

该行列式称为**主对角行列式**,特点是:当 $i\neq j$ 时,$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$。

(4) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$。

(5) $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$。

(6) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。

二、疑难解析

1. 余子式 M_{ij} 和元素 a_{ij} 有什么关系？余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 之间有什么关系？

答 根据定义 1.3，余子式 M_{ij} 和元素 a_{ij} 是隶属关系，即 M_{ij} 是元素 a_{ij} 的**余子式**，是一个由 n 行 n 列共 n^2 个数组成的数表，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，剩下的元素按原来的相对顺序排列所构成的数表所定义的 $n-1$ 阶行列式。余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 的关系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，即当 $i+j$ 为偶数时，$A_{ij}=M_{ij}$；当 $i+j$ 为奇数时，$A_{ij}=-M_{ij}$。

2. 如何理解 n 阶行列式的定义？

答 根据数学递归的思想。由二阶、三阶行列式的表达式不难发现它们之间有如下关系：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}。\end{aligned}$$

由上式可见，三阶行列式可由二阶行列式计算。通过观察，可以发现等式右端的表达式存在一定的规律：

(1) 每一项都是三阶行列式中的第 1 行的某个元素与一个二阶行列式的乘积；

(2) 每个二阶行列式恰好是在划掉前面相乘的元素所在行和所在列的元素之后，由剩余的元素按照原来的相对顺序组成的；

(3) 每一项前面取正号还是取负号，恰好与元素的下标之和相对应，即每一项前面的符号恰好为 $(-1)^{1+j}$。

进一步地，利用代数余子式的定义，第 1 行元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}。$$

利用以上结果，可将三阶行列式的表达式重新记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k}。$$

这表明，一个三阶行列式等于它的第 1 行元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 与所对应的代数余子式 A_{11}，A_{12}，A_{13} 的乘积之和。

由此可见，三阶行列式可以表示为它的第 1 行元素与所对应的代数余子式（二阶行列式）的乘积之和。事实上，这种表示方法具有一般性。按照这样的思想方法，仿照三阶行列式的情形，4 阶行列式可以表示为它的第 1 行元素与所对应的代数余子式（三阶行列式）的乘积之和，以此类推，n 阶行列式可以表示为它的第 1 行元素与所对应的代数余子式（$n-1$ 阶行列式）的乘积之和，即定义 1.4。

特别地，当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$，它不能与数的绝对值相混淆，如一阶行列式，$|-1|=-1$。

3. n 阶行列式的定义与定理 1.1 有什么联系？如何理解定理 1.1 的结论？

答 定理 1.1 又称为行列式的按行（列）展开定理，n 阶行列式的定义是定理 1.1 的一种特殊情形。仍然以三阶行列式为研究对象，根据定义 1.2，将行列式的表达式经过移项并且合并同类项，还可以整理得到如下的一些有用的表达式：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}（按第 2 行展开） \\ &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}（按第 3 行展开） \\ &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}（按第 1 列展开） \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}（按第 2 列展开） \\ &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}。（按第 3 列展开）。 \end{aligned}$$

由此可见，三阶行列式可以表示为它的任意一行（列）的各元素与其对应代数余子式的乘积之和。以此类推，这种展开式对 n 阶行列式也成立。

4. 对于任意给定的常数 k，判断如下两个等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix}$$

是否成立？

答 利用对角线法则，对上面的行列式展开可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}),$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}(a_{33}+ka_{23}) + a_{12}a_{23}(a_{31}+ka_{21}) + a_{13}a_{21}(a_{32}+ka_{22}) - \\ &\quad a_{13}a_{22}(a_{31}+ka_{21}) - a_{12}a_{21}(a_{33}+ka_{23}) - a_{11}a_{23}(a_{32}+ka_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}。\end{aligned}$$

因此，第一个等式不成立；第二个等式成立。

通过观察不难发现，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$是标准形式的三阶行列式，$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$是将标准形式的行列式的第 1 列和第 2 列的元素进行了互换，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix}$是将标准形式的行列式的第 2 行元素乘以数 k 之后对位加到第 3 行。为什么会出现第一个等式不成立；而第二个等式成立的情况呢？这不是偶然出现的，事实上，用 1.2 节中行列式的性质可以直接验证这两个等式是否成立。

三、课后习题选解

A类题

1. 计算下列行列式：

(1) $D_2 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$；　　(2) $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $D_5 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$。

分析　二阶行列式利用对角线法则求解；三阶行列式利用对角线法则或行列式的展开定理求解；高阶行列式观察特点然后利用行列式的定义或展开定理求解。

解　(1) 利用对角线法则，有

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos 2x。$$

(2) 根据行列式的结构特点，可以直接利用对角线法则求解。于是

$$D_3=\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix}=0\times0\times0+a\times c\times0+0\times b\times d-0\times c\times d-a\times b\times0-0\times0\times0=0。$$

(3) 根据行列式的结构特点，依次按照第1列，(原行列式的)第2列，(原行列式的)第3列展开，可得

$$D_5=\begin{vmatrix}3&0&0&0&4\\0&0&0&2&3\\0&0&5&0&2\\0&0&0&0&1\\0&4&0&0&1\end{vmatrix}=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&0&2&3\\0&5&0&2\\0&0&0&1\\4&0&0&1\end{vmatrix}=3\times4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&2&3\\5&0&2\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-3\times4\times5\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=120。$$

(4) 根据行列式的结构特点，按照第1列展开，可得

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}=n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-2&0\\0&0&\cdots&0&n-1\end{vmatrix},$$

注意到，展开后的$n-1$阶行列式为对角行列式，因此

$$D_n=(-1)^{1+n}1\times2\times3\times\cdots\times n=(-1)^{1+n}n!。$$

2. 利用行列式求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases}4x_1+\ x_2=6,\\2x_1-3x_2=-4;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=5,\\2x_1+x_2-3x_3=-3,\\2x_1+2x_2-x_3=2。\end{cases}$

分析 利用二元、三元线性方程组的求解公式求解，计算三阶行列式时可利用对角线法则或行列式的展开定理。

解 (1) 利用二阶行列式的对角线法则，不难求得

$$D_2=\begin{vmatrix}4&1\\2&-3\end{vmatrix}=4\times(-3)-1\times2=-14,\quad D_2^1=\begin{vmatrix}6&1\\-4&-3\end{vmatrix}=6\times(-3)-1\times(-4)=-14,$$

$$D_2^2=\begin{vmatrix}4&6\\2&-4\end{vmatrix}=4\times(-4)-6\times2=-28。$$

因为$D_2=-14\neq0$，所以线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_2^1}{D_2}=\frac{-14}{-14}=1,\qquad x_2=\frac{D_2^2}{D_2}=\frac{-28}{-14}=2。$$

(2) 利用三阶行列式的对角线法则，不难求得

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&1&-3\\2&2&-1\end{vmatrix}=19,\qquad D_3^1=\begin{vmatrix}5&-2&3\\-3&1&-3\\2&2&-1\end{vmatrix}=19,$$

$$D_3^2=\begin{vmatrix}1&5&3\\2&-3&-3\\2&2&-1\end{vmatrix}=19,\qquad D_3^3=\begin{vmatrix}1&-2&5\\2&1&-3\\2&2&2\end{vmatrix}=38。$$

因为$D_3=19\neq0$，由求解公式(1.6)，线性方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_3^1}{D_3}=1,\qquad x_2=\frac{D_3^2}{D_3}=1,\qquad x_3=\frac{D_3^3}{D_3}=2。$$