Göedel

哥德尔
不完全性定理

〔美〕雷蒙德·M. 斯穆里安/著
余俊伟/译

科学出版社

哥德尔不完全性定理

〔美〕雷蒙德·M. 斯穆里安　著
余俊伟　译

科学出版社
北京

图字：01-2017-8705

内 容 简 介

本书主要介绍哥德尔不完全性定理，在用简单例子解说哥德尔的本质思想的基础上，证明了基于加、乘及幂的塔斯基算术定理和基于加与乘的皮亚诺算术系统的不完全性定理，给出了基于 ω-一致性的原初证明、基于简单一致性的证明、基于一些基本技术素材和一个不动点原理的证明，结合典型逻辑谜题与证明结果，表明了证明结果与模态逻辑的紧密联系。

本书适合数学、哲学和计算机科学专业的高等院校师生、科研工作者，也可供其他熟悉一阶逻辑演算系统、能够识别一些初等公式有效性的逻辑爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

哥德尔不完全性定理/（美）雷蒙德·M. 斯穆里安（Raymond M.Smullyan）著；余俊伟译. 一北京：科学出版社，2019.1

书名原文：Gödel's Incompleteness Theorems

ISBN 978-7-03-059634-5

I. ①哥… II. ①雷… ②余… III. ①哥德尔定理一研究 IV. ①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 261696 号

责任编辑：郭勇斌 邓新平／责任校对：张凤琴

责任印制：张 伟／封面设计：无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http：//www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 1 月第 一 版 开本：890×1240 1/32

2019 年 1 月第一次印刷 印张：5 1/2

字数：135 000

定价：78.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

余俊伟，1974年生，江西安义人。1995年于华东师范大学获学士学位，2001年于中国社会科学院获博士学位。此后一直任职于中国人民大学，现为哲学院教授。研究方向为逻辑与形而上学。学术成果有专著《道义逻辑研究》（2005）、《否定词研究》（2014），论文《理解弗雷格的专名涵义》（2014）、《关于模态形而上学的几点思考》（2016）、《三种逻辑理论的哲学背景分析》（2018），等等。

本成果受到中国人民大学哲学与认知科学交叉平台及国家社会科学基金（基金项目号：13BZX064）支持。

本成果受到中国人民大学 2018 年度“中央高校建设世界一流大学（学科）和特色发展引导专项资金”支持。

前　言

这本介绍哥德尔（Gödel）不完全性定理的书既是为普通数学家、哲学家、计算机科学家所写，也是为其他任何对一阶逻辑的符号化（逻辑联结词与量词）至少略知一二，能看出一些基本公式的逻辑有效性且对此抱有好奇心的人所写。一个学期的标准数理逻辑课程对于理解此书绰绰有余。

我们所给证明非常简单。所有这些证明中最简单的（这里是针对专家而非初学的读者所说的），显然是使用塔斯基（Tarski）的真集的证明。它是我们首先给出的证明。它相比于标准的证明是如此简单，以致我们对于它未被大家所普遍知晓而感到惊讶。[可以在 Mostowski（1952）中找到此类材料，尽管 Quine（1940）的最后一章更接近于我们心目中所想的。]

在第 1 章我们（使用一种简单的机器语言）先从简单的例子解说哥德尔的本质思想，然后进一步考虑一些纯粹抽象的不完全性定理。哥德尔原初论文的导言提示过这些抽象定理。我们证明，任何一个具有某些非常一般特征的数学系统，哥德尔的论证对之都适用。接下来的几章我们考察一些明确且具体的数学系统并证明：它们确实具有这些一般的特征。

在第 2 章我们证明基于加、乘及幂的塔斯基算术定理。在第 3 章，

我们给出哥德尔不完全性定理的第一个证明。这是基于加、乘及幂的**公理化**算术。在第 4 章，我们证明更为人们所熟知的仅基于加与乘的皮亚诺算术系统的不完全性定理。这两个证明都使用塔斯基的真集。正如我们已经指出的，它大大地简化了证明。[简单地说，可证性是算术的；真不是，因而这二者不重合。]简化的另一个原因是，我们使用了一阶逻辑的蒙塔古-卡利什（Montague-Kalish）公理化，因而无须算术化的代入。[在第 5 章一系列练习中，我们提示如何修改这些证明以适合更标准的公理化。]

然后我们转向更为大家所知的不使用真概念的不完全性证明——哥德尔的基于ω-一致性的原初证明（第 5 章）和罗瑟（Rosser）的基于简单一致性的证明（第 6 章）。我们不使用通常的递归函数，而是使用在《形式系统的理论》（*Theory of Formal Systems*，T.F.S.）中引入的构造性的算术关系证明这些结果。特别容易证明，这些关系在所考虑的形式理论中是可定义的，因而我们的哥德尔定理和哥德尔-罗瑟定理的证明都相应地简化了。简化的另一个原因是，我们不是同一些关键的元数学关系的特征函数打交道（这是通常的做法），而是同这些关系本身打交道，直接证明它们在所讨论的理论中的可表示性。

在第 6 章末尾，读者将看到三种不同的皮亚诺算术不完全性的证明。每一种都有其价值，揭示了其他方法都未揭示的一定事实。我们细心指出并比较了这三种证明在不同方向上的推广。就纯粹出于直接和简单的目的来说，哥德尔-塔斯基的证明是最好的。就运用哥德尔第二定理来说，我们需要哥德尔原初的证明。哥德尔定理的克林对称形式及有关递归与能行的不可分离性的整个主题——在本书的后续中我们将详细研究的主题——得自于罗瑟的证明。

第 7 章是探讨 John Shepherdson（1961）卓越的表示与分离定理

（representation and separation theorems）。这些结果对于本书接下来的几章不是必需的，但是它们本身极具魅力（并且在我们的后续中起主要作用）。专业人士及普通读者都会对这一章的许多内容感兴趣（例如，加强的谢泼德森定理（Shepherdson's theorem）——它有递归定理的某种风格，以及罗瑟的不可判定的句子的一些新奇的变体）。

第 8 章含有一些基本的技术素材和一个不动点原理的证明。这些对于研究哥德尔第二不完全性定理及洛伯定理（Löb's theorem）是必需的。我们会在第 9 章讨论它们。第 10 章包括对可证性与真的一些一般性评论，并陈述了 Askanas（1975）中的一个有趣结果。最后一章（一点甜点）将作者的一些典型逻辑谜题与前面几章几个结果的评论与推广结合起来，并表明它们是如何同模态逻辑这类主题的近期发展紧密联系的。Boolos（1979）非常技术性地（而 Smullyan（1987）半形式化地）处理了它们。

尽管本书主要是为介绍不完全性定理而写，但我也打算把它作为后续《元数学的递归论》的预备。在后续中，我们深入探讨了不完全性与递归不可解性之间的一些关联。这些关联令人着迷。

达纳•斯科特（Dana Scott）、阿尼尔•古普塔（Anil Gupta）、佩里•斯密斯（Perry Smith）及我的学生彼得哈伦（Peter Harlan）、苏雷升•西维纳斯（Suresh Srivinas）和文卡泰什•肖普拉（Venkatesh Choppella）给了我许多极有帮助的建议。我在此对他们表示感谢。

目　录

第1章 哥德尔证明背后的一般思路

我们将在下面几章研究算术的各种公理化的不完全性证明。哥德尔在1931年完成了针对公理集合论的独创证明，这种方法同样可运用于公理化数论。公理化数论的不完全性实际上是一个更强的结果，因为它很容易导出公理集合论的不完全性。

哥德尔的著名论文从下述令人惊讶的话开始：

数学更加精确方向上的发展已经导致它很大范围的形式化，以致证明可以根据一些机械规则进行。截至目前，最完善的形式系统，一方面是怀特海和罗素（Whitehead and Russell）的《数学原理》（*The Principia Mathematica*）中给出的系统，另一方面是策梅洛-弗兰克尔（Zermelo-Fraenkel）的公理集合论。两个系统都是如此全面以致今天数学中所用的所有证明方法都可以在其中予以形式化——即可以归约为一些公理及推理规则。因此，似乎可以合理推测，这些公理和推理规则足以断定所有在所涉系统里可表述的数学问题。接下来我们证明事实并非如此，而是：在所说的这两个系统里都存在通常的整数理论的简单问题，它们不能被这些公理断定。

然后哥德尔继续解释，这种情形并不依赖于所考虑的两个系统的特殊性质，而是对一大类数学系统都成立。

这个“一大类”数学系统确切是指什么？这个词有各种解释，而哥

德尔定理相应地在几个方面已经推广了。本书将考虑许多这样的推广。非常奇怪，这些推广中最直接的、对于一般读者来说最易理解的一种也是最不为人们所知晓的一种。尤为奇怪的是，所说的这种方式恰恰是哥德尔本人在其原始论文的导言部分所提及的！我们不久将讨论这个问题（或者更确切地说是它的进一步推广）。但在讨论此之前，我们想让读者看看下面这个小谜题。它简单而富有启发地阐释了哥德尔的本质想法。

一个哥德尔式的谜题 让我们考虑一台机器，它打印出由以下 5 种符号组成的各种表达式：

$$\sim \quad P \quad N \quad (\quad).$$

一个表达式是这 5 种符号的任意有穷非空序列。如果这台机器能打印它，称表达式X是**可打印的**。我们假定这台机器被设计成凡是能被它打印出来的表达式迟早都将被打印出来。

表达式 X 的**范式**（norm）是指表达式 $X(X)$。例如，$P\sim$的范式是$P\sim(P\sim)$。一个**句子**是指具有下列 4 种形式之一的表达式：

（1）$P(X)$；

（2）$PN(X)$；

（3）$\sim P(X)$；

（4）$\sim PN(X)$。

非形式地说，P 代表“可打印的”，N 代表“……的范式”，$\sim$代表“并非”。于是，我们定义：如果（并且只有）X 是可打印的，则$P(X)$为**真**。如果 X 的**范式**是可打印的，则$PN(X)$为真。我们称$\sim P(X)$为真当且仅当（即如果且只有）X 不是可打印的，而$\sim PN(X)$被定义为真当且仅当 X 的范式不是可打印的。[这最后一个句子我们读作“并非可打印的 X 的范式”，或者，以更好的自然语言说：“X 的范式不是可打印的。”]

现在，关于一个句子为真，我们已经给出了相当精确的定义，并且我们此处有一个自指的有趣例子：这台机器正在打印各种关于这台机器能打印什么、不能打印什么的句子。因而，它正在描述它自己的行为！[它有些像一个具有自我意识的生物体，而且我们能看出，为什么从事人工智能方面研究的人对这样的机器感兴趣。]

假定这台机器在下述意义上是完全准确的：此台机器打印的所有句子都是真的。于是，例如，如果这台机器打印了 $P(X)$，那么 X 实际上是可打印的（X 迟早将由这台机器打印出）。而且，如果 $PN(X)$ 是可打印的，那么 $X(X)$（X 的范式）也是可打印的。现在，假设 X 是可打印的。是否可得出 $P(X)$ 是可打印的？不一定。如果 X 是可打印的，那么 $P(X)$ 当然是**真的**，但是并没有假定这台机器能够打印出**所有**真句子，而只是假定：这台机器绝不会打印任何假句子。[这台机器是否能打印根本不是句子的表达式是无关紧要的。重要的是，在由这台机器可打印出的**句子**中，它们全都是真的。]

这台机器是否**能**打印出所有真句子？答案是**不能**。为读者留的题目是这样的：找出一个不能被这台机器打印的真句子。[提示：找出一个句子，它断定它自己是不可打印的——即一个句子，其为真当且仅当其不可被这台机器打印。答案在下一个题目之后给出。]

谜题的变体　上述谜题的以下变体将为读者介绍**哥德尔编码**（Gödel numbering）概念。

我们现在有另一台机器，它打印出由下列 5 个符号组成的表达式：

$$\sim \quad P \quad N \quad 1 \quad 0.$$

我们用二进制表示自然数（为 1 与 0 的串）。出于该问题的考虑，我们将自然数等同于表示它们的二进制数字。

我们为每个表达式指派一个数，称其为该表达式的**哥德尔数**（Gödel

number）。我们根据下述模式来指派：分别给单个符号 ~、P、N、1 及 0 指派哥德尔数 10、100、1000、10000、100000。这样，一个复合表达式的哥德尔数是将每个符号用**它的**哥德尔数替换所得——例如，PNP 的哥德尔数是 1001000100。我们定义一个表达式的**范式**是在该表达式后写上其哥德尔数所得的表达式——例如，PNP 的范式是 PNP1001000100。现在，一个**句子**是形如以下 4 种形式之一的表达式：PX，PNX，$\sim PX$，$\sim PNX$，其中 X 是任意数（以二进制表示的）。我们称 PX 是真的，如果 X 是一个可打印的句子的**哥德尔数**。我们称 PNX 是真的，当且仅当X 是一个其**范式**是可打印的表达式的哥德尔数。如果 PX 不是真的（X不是一个可打印的表达式的哥德尔数），我们就称 $\sim PX$ 是真的；我们称$\sim PNX$ 是真的当且仅当 PNX 不是真的。

我们再次假定：这台机器绝不打印假句子。找出一个不能被这台机器打印的真句子。

解答　对第一个题目，这个句子是 $\sim PN(\sim PN)$。根据“真的”的定义，这个句子是真的当且仅当 $\sim PN$ 的范式不是可打印的。但 $\sim PN$ 的范式恰恰是 $\sim PN(\sim PN)$！因此，这个句子是真的当且仅当它不是可打印的。这意味着，这个句子或者是真的且不是可打印的，或者是可打印的但不是真的。后一种选择违反了所给的假设：这台机器绝不打印不真的句子。因此，这个句子一定是真的，但这台机器不能打印它。

当然，我们可以不谈论一台**打印**由这五个符号组成的各种各样的表达式的机器，而是谈论一个数学系统。这个数学系统**证明**由这同样的五个符号组成的各种各样的句子。这样我们就要重新解释 P 为意指系统内**可证的**，而非由这台机器可打印的。于是，假定这个系统是完全准确的（即在它里面假句子决不会得证），句子 $\sim PN(\sim PN)$ 就是一个为真但在系统内不可证的句子。

我们进一步注意到，句子 $PN(\sim PN)$ 是假的（既然其否定为真）。因此，它也是不可证的（假设该系统是准确的）。于是

$$PN(\sim PN)$$

就是一个在一系统内**不可判定的**句子——它与它的否定在这个系统内都不是可证的——的例子。

对第二个题目，答案是 $\sim PN101001000$。

现在我们转向一般背景下的一些不完全性证明。我们考虑一个非常宽泛的数学系统概念，并且证明：如果它具有一定的特征，则哥德尔的证明就能行得通。在接下来的几章，我们会看到一些具体的系统并证明它们的确都具有这些特征。

1.1　哥德尔定理和塔斯基定理的抽象形式

可将哥德尔的证明运用于其中的每个语言 $\mathcal{L}$ 至少包含以下几项：

（1）一个可数集 $\mathcal{E}$，其元素被称为 $\mathcal{L}$ 的**表达式**。

（2）$\mathcal{E}$ 的一个子集 $\mathcal{S}$，其元素被称为 $\mathcal{L}$ 的**句子**。

（3）$\mathcal{S}$ 的一个子集 $\mathcal{P}$，其元素被称为 $\mathcal{L}$ 的**可证的**句子。

（4）$\mathcal{S}$ 的一个子集 $\mathcal{R}$，其元素被称为 $\mathcal{L}$ 的**可驳斥的**（有时被称为**可否证的**）句子。

（5）一个表达式的集合 $\mathcal{H}$，其元素被称为 $\mathcal{L}$ 的**谓词**。[在哥德尔的导言中它们被称为**类名称**（class names）。非形式地说，每个谓词 H 被视为一个自然数集合的名称。]

（6）一个函数 Φ，它给每个表达式 E、每个自然数 n 指派一个表达式 $E(n)$。该函数要满足条件：对每个谓词 H、每个自然数 n，表达式

$H(n)$是一个句子。[非形式地说，句子 $H(n)$表达了命题：数 n 属于被 H命名的集合。]

在我们将给出的针对一个**具体的**系统 $\mathcal{L}$ 的第一个不完全性证明中，我们将使用一个基本概念，它是由 Alfred Tarski（1936）予以精确化的——即一个**真的**句子这个概念（与一个系统的一个可证的句子完全不同地被定义）。于是，我们考虑语言 $\mathcal{L}$ 的第 7 项，也是最后一项。

（7）句子集 $\mathcal{T}$，其元素被称为 $\mathcal{L}$ 的**真的**句子。

这就完成了抽象地描述接下来几章我们将研究的那类系统。

$\mathcal{L}$ 中的可表达式性　我们马上定义 $\mathcal{L}$ 中的**可表达式性**。这一概念考虑的是真集合 $\mathcal{T}$，而非集合 $\mathcal{P}$ 或 $\mathcal{R}$。

本书接下来的语词**数**意指**自然数**。对一个谓词 H 、一个自然数 n，如果 $H(n)$是一个真句子（即是 $\mathcal{T}$ 的一个元素），我们就说 H 对 n 是**真的**，或者 n **满足** H。被 H **表达的**集合指由所有满足 H 的 n 所组成的集合。因此，对任意数集合 A：

$$H(n)\in\mathcal{T}\leftrightarrow n\in A.$$

定义 1.1　对一个集合 A，如果它被 $\mathcal{L}$ 的某个谓词表达，则称 A 在 $\mathcal{L}$ 中是**可表达的**（expressible）或**可命名的**（nameable）。

既然 $\mathcal{L}$ 只有可数多个表达式，那么 $\mathcal{L}$ 就只有有穷或可数多个谓词。但是，根据有名的康托尔定理，有不可数多个自然数集。因此，不是每个自然数集在 $\mathcal{L}$ 中都是可表达的。

定义 1.2　如果每个可证句子是真的且每个可驳斥的句子是假的（不是真的），就称系统 $\mathcal{L}$ 是**正确的**。这意味着，$\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{T}$ 的子集而 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{T}$ 不相交。我们现在感兴趣的是充分条件：如果 $\mathcal{L}$ 是正确的，则必定含有一个真的但在 $\mathcal{L}$ 中不可证的句子。

哥德尔编码与对角线化　我们令 g 是一个 1-1 函数。它给每个表达

式 E 指派一个自然数 $g(E)$——被称为 E 的**哥德尔数**。在本章接下来的部分函数 g 都将固定不变。[在随后几章详加考察的系统中将会给出一个具体的哥德尔编码。]从技术上考虑，假设每个数是一个表达式的哥德尔数是方便的。[哥德尔原来的编码不具有此性质，但是在随后几章我们将使用的哥德尔编码有此性质。然而，稍作修改，可不受此限制地证明本章的结果（参考练习 1.5）。]现在假设每个数 n 是唯一一个表达式的哥德尔数，我们令 E_n 是那个其哥德尔数为 n 的表达式。于是，$g(E_n)=n$。

E_n 的**对角线化**是指表达式 $E_n(n)$。如果 E_n 是一个谓词，那么它的对角线当然是一个句子；这个句子是真的当且仅当谓词 E_n 被它自己的哥德尔数 n 满足。[我们写“当且仅当”(iff)表示如果且只有；我们在相同意义上使用“$\leftrightarrow$”。]

对任意 n，我们令 $d(n)$是 $E_n(n)$的哥德尔数。接下来，函数 $d(x)$ 一直起着关键的作用。我们称它为系统的**对角线函数**。

我们使用语词**数集**（number-set）表示（自然）数的集合。对任意数集 A，我们以 A^* 表示所有满足 $d(n)\in A$ 的数 n 的集合。因此，对任意 n，根据 A^* 的定义，等值式：

$$n\in A^* \leftrightarrow d(n)\in A$$

成立。[A^* 也可以写成 $d^{-1}(A)$，因为它是 A 在对象线函数 $d(x)$下的原像。]

哥德尔定理的一种抽象形式　我们令 P 是所有可证句子的哥德尔数的集合。对任意数集 A，它的补 $\widetilde{A}$ 是指 A 相对自然数集 N 的补集——即，$\widetilde{A}$ 是所有不在 A 中的自然数的集合。

定理 1.1 (GT)——仿哥德尔兼受塔斯基的影响　如果集合 $\widetilde{P}^*$ 在 $\mathcal{L}$ 中可表达并且 $\mathcal{L}$ 是正确的，那么 $\mathcal{L}$ 有一个真的但在 $\mathcal{L}$ 中不可证的句子。

证明：假设 $\mathcal{L}$ 是正确的并且 $\widetilde{P}^*$ 在 $\mathcal{L}$ 中可表达。令 H 是一个在 $\mathcal{L}$ 中表达 $\widetilde{P}^*$ 的谓词，令 h 是 H 的哥德尔数。令 G 是 H 的对角线化（即句