"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

University Physics

大学物理学（第二版）

习题解答与学习指导

主编　施建青

编者　施建青　徐志君

高等教育出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

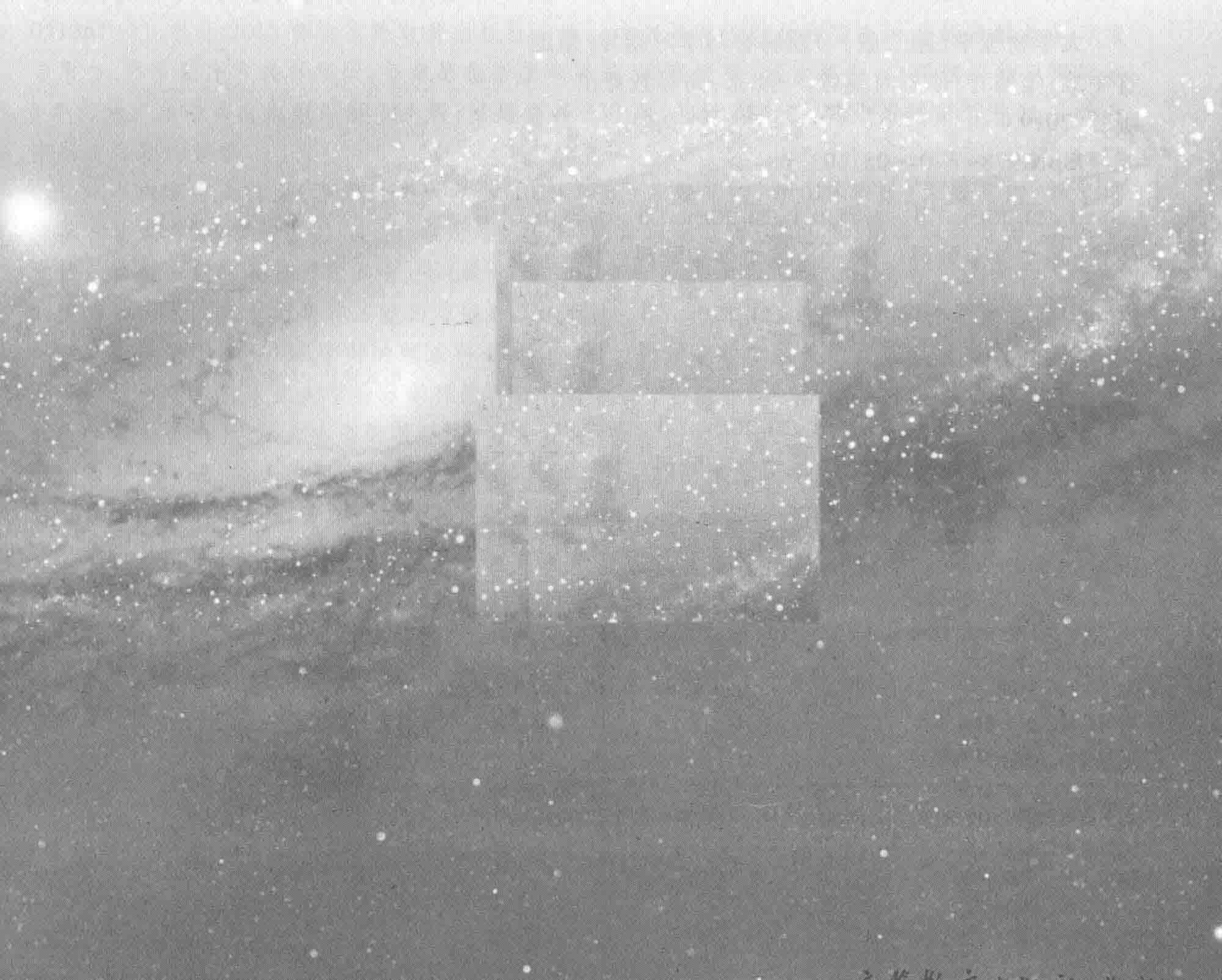
University Physics

大学物理学（第二版）

习题解答与学习指导

主编 施建青

编者 施建青 徐志君



高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与施建青教授主编的《大学物理学》(第二版)配套的习题解答与学习指导，并适当补充了部分扩展内容的习题。在编写过程中，作者贯彻重分析、简解答的指导思想，力求通过对题目的分析，使学生在解题之前，对相关的物理规律有进一步的认识；通过解题方法和技巧的介绍和运用，拓宽学生的解题思路；通过讨论计算结果来进一步明确物理意义。而对于解题过程，本书则力求简明扼要。

本书适合选用《大学物理学》(第二版)的师生作为教学和学习参考书使用，也可供其他高等学校理工科各专业的师生和社会读者选用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学(第二版)习题解答与学习指导/施建青主编；施建青，徐志君编者.--北京：高等教育出版社，2019.4

ISBN 978-7-04-051603-6

Ⅰ.①大… Ⅱ.①施… ②徐… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第042186号

策划编辑 王 硕　责任编辑 王 硕　封面设计 杨立新　版式设计 马敬茹
插图绘制 邓 超　责任校对 窦丽娜　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	三河市春园印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	23.5		
字　数	570千字	版　次	2019年4月第1版
购书热线	010-58581118	印　次	2019年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	43.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　51603-00

前　言

大学物理是高等学校理工科各专业学生的一门非常重要的通识性必修基础课。通过大学物理的学习,学生可以对物理学的基本概念、基本理论和基本方法有比较系统的认识和正确的理解,为进一步的专业学习打下坚实的基础。

对于初入大学校门的一年级学生而言,学习大学物理时常常会感到困难,一是教学内容多,知识要点难以系统掌握,重点与难点难以突破;二是分析应用能力力不从心,解题困难,有些题目觉得难以下手。本书正是为了帮助学生克服学习大学物理课程的困难而编写的,旨在帮助学生全面总结大学物理课程知识要点,准确理解物理概念和规律,系统把握知识脉络,熟练掌握物理思想方法,总结归纳解题思路、方法和技巧。本书突出学习的重点和难点,以提高学生正确运用物理思想与物理规律来分析问题和解决问题的能力。

施建青主编的《大学物理学》是教育部普通高等教育“十一五”和“十二五”国家级规划教材。该教材的第二版分上下两册(上册:ISBN 978-7-04-051003-4;下册:ISBN 978-7-04-051367-7),已于2018年由高等教育出版社出版。本书是与该教材相配套的习题解答与学习指导用书,章节顺序和教材相同,每章都包括基本要求、内容提要、基本题型、典型题解和习题解答5个部分。本书共有典型题解154题,习题解答330题,共计484题,其中习题解答包括了教材中所有习题的解答。

本书内容也是按照《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010年版)来编写的,紧紧围绕基本要求,对各章的公式、定理、概念等进行全面总结,内容重点突出,语言通俗易懂,富有启发性。典型例题和教材习题具有一定的代表性,内容广泛,涵盖了理工科各专业大学物理教学的主要知识点。典型例题和习题的难度有高有低,适合不同类型、不同层次的学生学习。

本书适用于64~128学时的理工科专业的大学物理课程教学,教学内容具有普适性。本书既可以作为理工科专业大学物理课程的学习指导用书,也可以作为大学生物理创新竞赛理论考试的学习资料用书,因为本书的教学内容和教学安排与大学生物理创新竞赛理论考试大纲的内容和要求相一致,其中的相当一部分例题和习题也在一定程度上体现了大学生物理创新竞赛理论考试的要求。本书还可以作为专科院校、函授、电视大学、夜大学的本科学生的学习用书。

本书是浙江工业大学基础物理系列课程国家级教学团队多年教学实践和经验的结晶,得到许多老师的关心、指导和帮助,得到许多学生的关心、支持和帮助,得到省内外同行们的关心、指导和帮助,得到高等教育出版社的大力支持,还参考了有关书籍和资料,在此致以衷心的感谢。

书中的不足不妥之处,敬请批评、指正。

编者

2018年9月

目　　录

第1章　运动的描述

一、基本要求

1. 掌握描述质点运动状态的方法，建立质点、质点系、参考系、坐标系等描述运动学的基本概念，掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述物体运动和运动变化的物理量，理解这些物理量的矢量性、相对性和瞬时性.

2. 熟练掌握运动学两类基本问题的求解方法，即用微分法由已知的运动学方程求运动特征（速度和加速度），用积分法由已知运动特征（速度和加速度）和初始条件求运动学方程.

3. 熟悉和掌握速度、加速度在直角坐标系、自然坐标系等几种常用坐标系中的表达形式.

4. 掌握圆周运动的角量表示及角量与线量之间的关系.

5. 理解运动的相对性，掌握在两个相对平动参考系中位置矢量、速度、加速度的变换式，会用变换式求解相对运动问题.

二、内容提要

1. 概念

(1) 质点、质点系和刚体

① 质点：只有质量、没有形状和大小的理想物体（几何点）.

② 质点系：许多质点的集合.

③ 刚体：在外力作用下物体的形状、大小都保持不变的物体.

(2) 参考系、坐标系、惯性系和非惯性系

① 参考系：在描述物体运动时选择参考的物体（或物体系）.

② 坐标系：为了定量确定一个物体相对于某参考系的位置，需要在参考系上选用一个固定的坐标系，而物体的位置就由它在此坐标系中的坐标来确定.最常用的坐标系是直角坐标系，其他还有自然坐标系、平面极坐标系、柱坐标系、球坐标系.

③ 惯性系：对某一特定物体惯性定律成立的参考系.

④ 非惯性系：对某一特定物体惯性定律不成立的参考系.

2. 质点运动的直角坐标描述

(1) 位置矢量（位矢、径矢）.如图1-1所示，在直角坐标系中位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的大小为

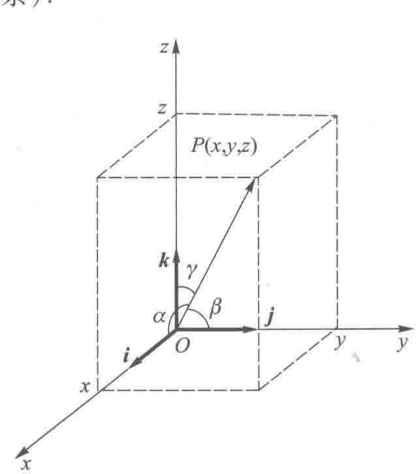


图1-1

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的方向可由 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦决定：

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

式中，α、β、γ 分别为 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴正方向的夹角，它们之间的关系为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

（2）运动学方程.质点的运动位置是随时间变化的函数，这就是质点的运动方程，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

用直角坐标系表示，则有

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

其分量式为

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$
$$z=z(t)$$

上式实际上就是以时间为参量的轨道方程.消去时间 t，就可以得到普遍的轨道（轨迹）方程.对平面运动来说，分量式为

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$

消去 t 后，轨道方程为

$$y=f(x)$$

（3）位移.如图1-2所示，质点在 t_1 时刻的位矢为 $\boldsymbol{r}_1$，在 t_2 时刻的位矢为 $\boldsymbol{r}_2$，在 t_1 到 t_2 的时间内质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

位移的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

方向也可以用方向余弦来表示.

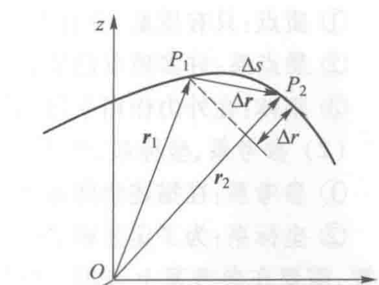


图1-2

关于位移，需要注意以下两点：

其一，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与路程 Δs 不同.位移表示质点的位置的改变，它并不是质点所经历的实际路程.位移是矢量，而路程是标量.质点在 Δt 时间内实际经过的路程一般是大于等于位移的大小，总有 $\Delta s\geqslant|\Delta\boldsymbol{r}|$.只是作单向直线运动时才有 $\Delta s=|\Delta\boldsymbol{r}|$，或者在 $\Delta t\to 0$ 的极限情况下，它们是相等的，即 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$.

其二，$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 Δr 不同.Δr 代表 $|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$，为两位矢的大小之差；而 $|\Delta\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$，为两位矢的矢量差的大小，一般总有 $|\Delta\boldsymbol{r}|\geqslant\Delta r$.只有在 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 方向相同的情况下才有 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta r$.

（4）速度.速度是描述物体运动快慢与方向的物理量.质点在 Δt 时间内的平均速度：

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

在 Δt 时间内的平均速率为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

注意平均速度与平均速率不同.平均速率是标量,不考虑质点的运动方向.例如,质点沿圆周运动一周,其平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}=0$,因而其大小 $|\bar{\boldsymbol{v}}|=0$,而平均速率却不等于零.

质点的瞬时速度(简称速度)是质点位矢随时间的变化率,在直角坐标系中有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

速度分量:

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

速度大小:

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

方向也可以用方向余弦来表示.

(5) 加速度.加速度是描述物体速度变化的物理量.质点在 Δt 时间内的平均加速度:

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

平均加速度的方向是速度变化的方向,即 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向,不代表运动方向.

质点的瞬时加速度(简称加速度)是质点运动速度随时间的变化率,在直角坐标系中有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

加速度分量:

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度大小:

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

加速度方向也可以用方向余弦来表示,总是指向曲线凹的一侧.

3. 质点运动的自然坐标描述

质点作平面运动时,在已知运动轨道的情况下,可采用自然坐标系来描述质点的运动.在轨道曲线上取一点作为坐标原点,以质点与原点间的轨道长度 s 来确定质点的位置,称 s 为自然坐标.当质点运动时,运动学方程为

$$s=s(t)$$

而在 t_1 到 t_2 的时间内,自然坐标之差就是质点运动的路程,即

$$\Delta s=s_2-s_1$$

在任一时刻,于质点所在处,可取两个相互垂直的单位矢量 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 和 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$.其中,$\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 沿轨道切线方向,指向质点运动的方向;$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 沿轨道法线方向,指向轨道凹进的一侧.

在自然坐标系中,质点运动速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$

速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$$

在自然坐标系中,加速度可以分解为切向分量 a_{t} 和法向分量 a_{n},即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

切向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ 的大小为

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

法向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$的大小为

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho}$$

切向加速度只是反映速度大小的变化,法向加速度只是反映速度方向的改变,并与运动轨道的曲率有关.

在自然坐标系中,加速度的大小:

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度$\boldsymbol{v}$ 的夹角 θ 为

$$\theta=\arctan\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$$

4. 圆周运动角量的描述

(1) 角量.描述质点圆周运动的角量有 4 个:角位置、角位移、角速度和角加速度.

角位置是描述质点在圆周上的位置的物理量.如图 1-3 所示,位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与极轴(图中为 x 轴)的夹角 θ 确定质点在圆周上的位置,θ 称为对 O 点的角位置(或角坐标).通常,规定从极轴沿逆时针方向为正,反之为负.当质点运动时,角位置 θ 是时间 t 的函数,质点圆周运动的运动方程是

$$r=R,\theta=\theta(t)$$

在 Δt 时间内质点的角位移为

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$$

在任一时刻 t,质点的角速度为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

质点作逆时针方向转动时,ω 为正,反之为负.

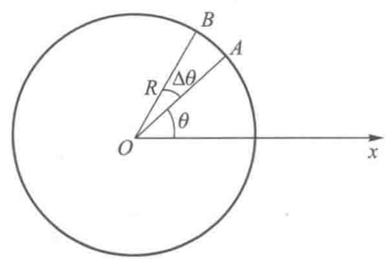


图 1-3

角加速度为

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

当 α 与 ω 同号时,质点作加速运动;当 α 与 ω 异号时,质点作减速运动.

(2) 角量与线量的关系.

$$\Delta s=R\Delta\theta$$
$$v=\omega R$$
$$a_t=\alpha R$$
$$a_n=\omega^2 R$$

5. 运动学两类基本问题

(1) 第一类问题(微分问题).已知质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,求质点在任意时刻的速度和加速度.这类问题采用微分方法.

(2) 第二类问题(积分问题).已知质点的加速度(或速度)随时间变化的关系和初始条件(即 $t=0$ 时刻的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和位矢 $\boldsymbol{r}_0$),求质点在任意时刻的速度和运动方程.这类问题采用积分方法.

需要注意的是,由加速度$\boldsymbol{a}$求速度 $\boldsymbol{v}$ 时,根据函数的具体形式,应采用不同的方法.例如,对于一维运动,若已知 $a=a(t)$,可直接积分:

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_{t_0}^{t}a\mathrm{d}t$$

若已知 $a=a(v)$,先分离变量再积分:

$$a(v)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$$

若已知 $a=a(x)$,先通过积分变量变换,进行换元后再积分:

$$a(x)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v$$

6. 几种简单质点运动的规律

(1) 直线运动

① 匀速直线运动

$$x=x_0+vt$$

② 匀变速直线运动

$$v=v_0+at$$

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)=2as$$

③ 变速直线运动

$$v=v_0+\int_{t_0}^{t}a\mathrm{d}t$$

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}v\mathrm{d}t$$

(2) 圆周运动

① 匀速率圆周运动

$$\theta=\theta_0+\omega t,\quad a_n=\omega^2R,\quad a_t=0$$

② 匀变速圆周运动

$$\omega=\omega_0+\alpha t$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)=2\alpha\Delta\theta$$

③ 变速圆周运动

$$\omega=\omega_0+\int_{t_0}^{t}\alpha\mathrm{d}t$$

$$\theta=\theta_0+\int_{t_0}^{t}\omega\mathrm{d}t$$

(3) 一般曲线运动

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}t$$

在直角坐标系中,分量表达式为

$$v_x=v_{0x}+\int_{t_0}^{t}a_x\cdot\mathrm{d}t,\quad x=x_0+\int_{t_0}^{t}v_x\cdot\mathrm{d}t$$

$$v_y=v_{0y}+\int_{t_0}^{t}a_y\cdot\mathrm{d}t,\quad y=y_0+\int_{t_0}^{t}v_y\cdot\mathrm{d}t$$

$$v_z=v_{0z}+\int_{t_0}^{t}a_z\cdot\mathrm{d}t,\quad z=z_0+\int_{t_0}^{t}v_z\cdot\mathrm{d}t$$

(4) 抛体运动

包括平抛运动和斜抛运动.

7. 相对运动

用两个相对平动的参考系 S、S′可以来描述同一质点 P 的运动.如果 S′系相对 S 系运动,其位置矢量的变换关系为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{R}$$

式中,$\boldsymbol{r}$ 称为质点 P 的绝对位矢;$\boldsymbol{r}'$称为相对位矢;$\boldsymbol{R}$ 称为牵连位矢.

速度的变换关系为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

式中,$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$是质点 P 相对于 S 系运动的速度,称为绝对速度;$\boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$是质点 P 相对于 S′系运动的速度,称为相对速度;$\boldsymbol{u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}$是 S′系相对于 S 系运动的速度,称为牵连速度.

其加速度的变换关系为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{A}$$

式中，$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$是质点 P 相对 S 系运动的加速度，称为绝对加速度；$\boldsymbol{a}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}$是质点 P 相对 S′系运动的加速度，称为相对加速度；$\boldsymbol{A}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$是 S′系相对 S 系运动的加速度，称为牵连加速度.

为了便于记忆，上面 3 式也可表示为

$$\boldsymbol{r}_{P对\mathrm{S}}=\boldsymbol{r}_{P对\mathrm{S}'}+\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}'对\mathrm{S}}$$
$$\boldsymbol{v}_{P对\mathrm{S}}=\boldsymbol{v}_{P对\mathrm{S}'}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{S}'对\mathrm{S}}$$
$$\boldsymbol{a}_{P对\mathrm{S}}=\boldsymbol{a}_{P对\mathrm{S}'}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{S}'对\mathrm{S}}$$

三、基本题型

1. 已知质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求质点的运动轨迹、速度、加速度.
2. 已知质点的加速度及初始条件，求速度和运动方程.
3. 已知质点的运动方程 $s=s(t)$，求质点的速度、切向加速度和法向加速度；或已知切向加速度为时间或坐标等的函数以及必要的初始条件，求质点的速度、运动方程.
4. 由速度和加速度变换（伽利略变换）求解有关问题.

四、典型题解

例 1-1 已知质点的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(6-2t^2)\boldsymbol{j}\quad(\text{SI 单位})$$

试求：

（1）质点的轨道方程.

（2）在 $t_1=1$ s 和 $t_2=2$ s 之间的 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和 Δr.

（3）在 $t_1=1$ s 时的速度和加速度.

（4）在什么时刻质点的位矢与速度矢量恰好垂直？

（5）在什么时刻质点离原点最近？

分析：这是二维运动情况.在运动方程中，消去 t，即得轨道方程.应注意区分 $\Delta\boldsymbol{r}$、Δr 和 Δs 的区别.根据矢量分析，当两个矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$垂直时，则$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$.计算质点离原点最近时，需用求导方法得到极值.

解：（1）按题意，质点在 Oxy 平面内运动，运动方程的分量式为

$$x=2t,\quad y=6-2t^2$$

消去 t，得质点的轨道方程：

$$y=6-\frac{x^2}{2}$$

其轨迹为抛物线.

（2）在 $t_1=1$ s 和 $t_2=2$ s 之间的 $\Delta\boldsymbol{r}$ 矢量为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_2=2\text{ s})-\boldsymbol{r}(t_1=1\text{ s})=(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})\text{ m}-(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\text{ m}=(2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j})\text{ m}$$

当然，也可以表示为大小和方向（与 x 轴正向间的夹角）形式：

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{2^2+6^2}\text{ m}=6.32\text{ m}$$

$$\theta=\arctan\frac{\Delta y}{\Delta x}=\arctan\frac{-6}{2}=-71^\circ 33'54''$$

而 Δr 为

$$\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{4^2+2^2}\ \text{m}-\sqrt{2^2+4^2}\ \text{m}=0$$

（3）根据定义：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

把 $t_1=1$ s 代入得

$$\boldsymbol{v}=(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$
$$\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

速度的大小和方向为

$$v=\sqrt{2^2+(-4)^2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=4.47\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\theta=\arctan\frac{-4}{2}=-63^\circ 26'5''$$

加速度为

$$a=4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

方向沿 y 轴负方向.

（4）当 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 垂直时，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$，即

$$[2t\boldsymbol{i}+(6-2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})=0$$

得

$$4t(5-2t^2)=0$$

$$t=0,t=\sqrt{\frac{5}{2}}\ \text{s}=1.58\ \text{s},\quad t=-1.58\ \text{s}(舍去)$$

（5）质点离原点的距离就是位置矢量的大小：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2t)^2+(6-2t^2)^2}$$

求极值，使得 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$，最后整理后得

$$8t(2t^2-5)=0$$

$$t=0,t=\sqrt{\frac{5}{2}}\ \text{s}=1.58\ \text{s},\quad t=-1.58\ \text{s}(舍去)$$

例 1-2 一艘船 A 以速率 u 驶向码头 P，另一艘船 B 以速率 v 自码头离去，试证当两船的距离最短时，两船与码头的距离之比为

$$(v+u\cos\alpha):(u+v\cos\alpha)$$

设航路均为直线，α 为两直线的夹角.

分析：求两船的距离最短，说明需要对两船的距离求极值.为此，先可分别设两船与码头的距离，然后写出两船的距离表达式，再求极值.在求极值过程中，注意到船到码头距离对时间的求导

就是该船的速度大小.

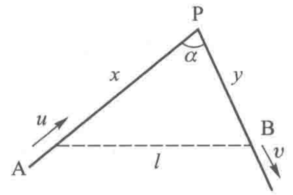


图 1-4

证:如图 1-4 所示,设任一时刻两船与码头的距离分别为 x、y,两船的距离为 l,则有

$$l^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$$

对 t 求导,得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2(\cos\alpha)x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2(\cos\alpha)y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

将 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-u$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v$ 代入上式,并应用 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=0$ 作为求极值的条件,则得

$$0=-ux+vy-xv\cos\alpha+yu\cos\alpha=-x(u+v\cos\alpha)+y(v+u\cos\alpha)$$

由此可求得

$$\frac{x}{y}=\frac{v+u\cos\alpha}{u+v\cos\alpha}$$

即当两船的距离最短时,两船与码头的距离之比为 $(v+u\cos\alpha):(u+v\cos\alpha)$.

例 1-3 一物体悬挂在弹簧上作竖直振动,其加速度为 $a=-ky$.式中,k 为常量,y 是以平衡位置为原点所测得的坐标. 假定振动的物体在坐标 y_0 处的速度为 v_0,试求速度 v 与坐标 y 的函数关系式.

分析:本题中加速度为位置的函数,可以利用积分变量变换:

$$a(y)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

进行换元后再积分.

解:根据加速度的定义,可以写为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

又 $a=-ky$,所以有

$$-ky=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

$$-\int ky\mathrm{d}y=\int v\mathrm{d}v$$

$$-\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}v^2+C$$

当 $y=y_0$ 时,$v=v_0$,则有

$$C=-\frac{1}{2}v_0^2-\frac{1}{2}ky_0^2$$

所以,速度 v 与坐标 y 的函数关系式为

$$v^2=v_0^2+k(y_0^2-y^2)$$

例 1-4 质点 M 在水平面内的运动轨迹如图 1-5 所示,OA 段为直线,AB、BC 段分别为不同半径的两个 1/4 圆周.设 $t=0$ 时,M 在 O 点,已知运动方程为

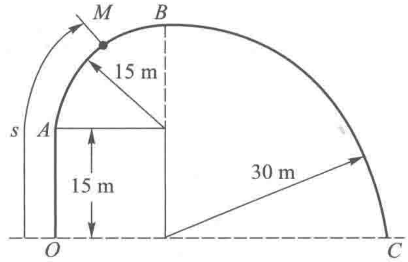


图 1-5

$$s=30t+5t^2 \quad (\text{SI 单位})$$

求 $t=2$ s 时刻，质点 M 的切向加速度和法向加速度.

分析：此题已知运动方程，求加速度，是微分问题.但是，要注意先需要判断，题中所求时刻质点运动到图中的哪段曲线.

解：首先求出 $t=2$ s 时质点在轨迹上的位置 $s=80$ m，显然在图中的大圆上.由定义得质点的速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=30+10t$$

故 $t=2$ s 时，$v=50$ m/s.

因此，质点的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=10\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

故 $t=2$ s 时，$a_t=10\ \mathrm{m/s^2}$，$a_n=83.3\ \mathrm{m/s^2}$.

例 1-5　有一个物体以初速度 v_0、仰角 α 由地面抛出，最后落回到与抛出处同一水平面上的某个位置，试求该物体在运动过程中其运动轨道的最大与最小曲率半径.

分析：这是一个物体作一般曲线运动的问题，注意到物体在向上斜抛过程中其法向加速度实际上就是重力加速度的一个分量，利用 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$ 即可求出其运动轨道的最大与最小曲率半径.

解：如图 1-6 所示，以 θ 表示物体在运动轨道上任意点 P 处其速度与水平方向的夹角，则有

$$v\cos\theta=v_0\cos\theta_0,\quad v=\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}v_0$$

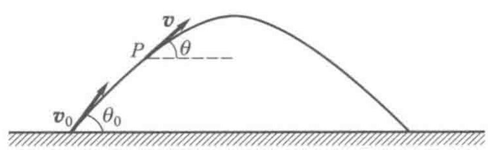


图 1-6

因为物体在向上斜抛过程中其法向加速度实际上就是重力加速度的一个分量，即

$$a_n=g\cos\theta$$

所以

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos^3\theta}$$

又因为该物体在运动过程中的轨道各点均有 $|\theta|\leqslant\theta_0$，所以 $\cos\theta\geqslant\cos\theta_0$，上式的分母在 $\theta=\theta_0$ 处最小，在 $\theta=0$ 处最大，从而可得其运动轨道的最大与最小曲率半径分别为

$$\rho_{\min}=\frac{v_0^2}{g\cos\theta_0},\quad \rho_{\max}=\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}$$

例 1-6　设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处，然后又向西飞回 A 处，飞机相对空气保持不变的速率 v_1，而空气相对地面的速率为 v_2，A 和 B 之间的距离为 l.试求下列三种情况下飞机来回飞行的时间.

(1) 空气是静止的.

(2) 空气的速度向东.

(3) 空气的速度向西.

分析:在求解相对运动物体时,应该注意三个研究对象:其一是运动物体;其二是绝对参考系(静系);其三是相对参考系(动系).在本题中,飞机为运动物体,地面为绝对参考系,空气相对地面运动,为相对参考系.明确这三者关系,即可根据速度变换关系进行求解.

解:(1) 空气是静止的,即 $v_2=0$,那么飞机相对于地面往返飞行速度的大小都为 v_1,飞机往返的时间为

$$t_1=t_{AB}+t_{BA}=\frac{l}{v_1}+\frac{l}{v_1}=\frac{2l}{v_1}$$

(2) 根据速度变换关系,飞机从 A 处向东飞到 B 处时相对于地面的速度大小为

$$v_{AB}=v_1+v_2$$

从 B 处向东飞到 A 处时相对地面的速度大小为

$$v_{BA}=v_1-v_2$$

所以,飞机往返的时间为

$$t_2=t_{AB}+t_{BA}=\frac{l}{v_1+v_2}+\frac{l}{v_1-v_2}=\frac{2v_1 l}{v_1^2-v_2^2}=\frac{2l/v_1}{1-(v_2/v_1)^2}=\frac{t_1}{1-(v_2/v_1)^2}$$

(3) 当空气的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 向北时,根据速度变换关系,飞机相对于地面的飞行速度 $\boldsymbol{v}$ 和飞机相对于空气速度 $\boldsymbol{v}_1$ 为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$$

飞机从 A 处向东飞到 B 处,还是从 B 处向东飞到 A 处,相对于地面的速度大小均为

$$v=\sqrt{v_1^2-v_2^2}$$

所以,飞机往返的时间为

$$t_3=t_{AB}+t_{BA}=\frac{2l}{v}=\frac{2l}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}=\frac{2l/v_1}{\sqrt{1-(v_2/v_1)^2}}=\frac{t_1}{\sqrt{1-(v_2/v_1)^2}}$$

例 1-7 当火车静止时,乘客发现雨滴下落方向偏向车头,偏角为 30°,当火车以 35 m/s 的速率沿水平直路行驶时,发现雨滴下落方向偏向车尾,偏角为 45°,假设雨滴相对地面的速度保持不变,试计算雨滴相对地面的速度大小.

分析:这是一个相对运动问题.先需要确定参考系,一个是地面,另一个是火车.然后根据题意写出已知条件,画出矢量图.最后按照伽利略变换关系和矢量图求解.

解:选地为静系,火车为动系.题中已知雨滴对地速度 $\boldsymbol{v}_a$ 的方向偏前 30°,火车行驶时,雨滴对火车的相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 偏后 45°,火车速度 $\boldsymbol{v}_t=35$ m/s,方向水平.

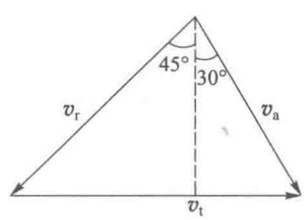


图 1-7

根据题意,矢量图如图 1-7 所示.由图可知

$$v_a\sin 30°+v_r\sin 45°=v_t$$

$$v_a\cos 30°=v_r\cos 45°$$

解上述两式,可得

$$v_a=\frac{v_t}{\sin 30^\circ+\sin 45^\circ\frac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ}}=25.6\ \text{m/s}$$

五、习题解答

习题 1-1 设质点的运动函数为 $x=x(t)$,$y=y(t)$,在计算质点的速度时,有以下两种解法:

(1) 先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,然后求出 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$及 $a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$.

(2) 先求出$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,然后求出

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2},\quad a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

试问哪种方法正确?两者差别何在?

解:质点的速度和加速度是矢量.根据已知的质点平面运动参量方程:

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

可知,质点的速度和加速度分量为

$$\begin{cases}v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{cases}\qquad\begin{cases}a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ a_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\end{cases}$$

这样,质点的速度和加速度的大小分别为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2},\quad a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

所以,(2) 的解法是正确的.而在(1) 的解法中,由于 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 为质点到坐标原点的距离,$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$只是表示距离随时间的变化率,因此(1) 的解法是错误的.

习题 1-2 一人自原点出发,25 s 内向东走 30 m,又在 10 s 内向南走 10 m,再在 15 s 内向正西北走 18 m.求在这 50 s 内:

(1) 平均速度的大小和方向.

(2) 平均速率的大小.

解:(1) 在这 50 s 内的位移为

$$|OC|=|OA|+|AB|+|BC|=\{30\boldsymbol{i}+(-10\boldsymbol{j})+18[(-\cos 45^\circ\boldsymbol{i})+\sin 45^\circ\boldsymbol{j}]\}\ \text{m}=(17.27\boldsymbol{i}+2.73\boldsymbol{j})\ \text{m}$$

平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{OC}{\Delta t}=(0.345\boldsymbol{i}+0.055\boldsymbol{j})\ \text{m/s}$$

其中,平均速度的大小为

$$v=\sqrt{0.345^2+0.055^2}\ \text{m/s}=0.35\ \text{m/s}$$