小波与量子小波

（第三卷）

调频小波与量子小波

冉启文　冉　冉/著

科学出版社

小波与量子小波

(第三卷)

调频小波与量子小波

冉启文　冉　冉　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

《小波与量子小波》系统论述多尺度小波理论、线性调频小波理论和量子小波理论. 全书共十章, 分为三卷.

第一卷介绍小波简史与小波基础理论, 由第 1—5 章构成.

第二卷介绍图像小波与小波应用, 由第 6—8 章组成.

第三卷介绍调频小波与量子小波, 由第 9 章和第 10 章以及包含 296 个练习题的四个习题集构成, 核心内容包含调频小波理论、量子态小波理论和量子比特小波理论等.

本书适合数学、统计学、物理学、力学、信息科学、生命科学和医学、计算机科学、化学、天文学、材料科学、能源科学、测绘科学、电子学、机械学、环境科学、农学、林学、经济学和管理学等相关领域科学研究人员和工程技术人员参考,也适合高等院校相关学科专业高年级本科生和研究生作为学习与研究小波的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

小波与量子小波. 第三卷, 调频小波与量子小波/冉启文, 冉冉著. —北京: 科学出版社, 2019.3

ISBN 978-7-03-060915-1

I. ①小… II. ①冉… ②冉… III. ①小波理论 IV.①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 050959 号

责任编辑: 李静科 田轶静 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 3 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2019 年 3 月第一次印刷 印张: 28 1/2

字数: 572 000

定价:188.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

献给我深爱的妻子

——冉启文

将此书献给我的母亲

因为她一直以来的支持与爱，这本书才得以完成

——冉　冉

前　言

小波的出现是历史的必然，也是科学思想发展的必然.

小波是什么？这个问题已经在很多文献中被提出而且给出了各自的回答，其中典型代表应该是 20 世纪 90 年代初法国数学家迈耶(Meyer Y)在《小波与算子》中和比利时数学家朵蓓琪丝(Daubechies I)在《小波十讲》中给出的回答. 经过最近二十几年的快速发展以及对小波思想产生和发展历程的追溯，在“小波”名义下的各种研究无论是深度还是广度，都已经出现了十分显著的变化，重新“定义”小波正当其时.

《小波与量子小波》的小波包含丰富的逻辑内涵，体现为多尺度小波、线性调频小波和量子小波. 这样的小波具有将近两百年的历史渊源和传承，它是从 20 世纪 80 年代才得以真正兴起的深邃科学思想和方法，其产生、发展、完善和应用得益于数学、物理学、量子力学、计算机科学、信息科学、生物学和医学等广泛科学技术研究领域众多科学家和工程师们的卓越智慧和共同努力，小波的发展史淋漓尽致地展现出它是现代数学、现代物理学与现代科学技术研究交互推动的完美典范. 小波的思想简单、优美且普适，其数学理论是从一个或少数几个特别的函数出发，经过简单的“伸缩”和/或“平移”构造函数空间的规范正交基，其科学理念一脉相承于显微镜的思想精华，以任意的伸缩倍数聚焦于研究对象的任意局部位置，获得任意层次相互独立的局部细节. 小波在科学界享有“数学显微镜”的美誉.

《小波与量子小波》系统论述多尺度小波理论、线性调频小波理论和量子小波理论. 全书由十章和四个习题集(共 296 个练习题)构成，分为相对独立的三卷，它们分别是《小波与量子小波(第一卷)：小波简史与小波基础理论》，《小波与量子小波(第二卷)：图像小波与小波应用》和《小波与量子小波(第三卷)：调频小波与量子小波》.

本书是《小波与量子小波》的第三卷，由全书的第 9 章、第 10 章以及四个习题集(共 296 个练习题)构成. 本书重点研究小波思想和方法的两类延伸，第一类是利用线性调频函数以及线性调频函数线性组合构造能量有限信号(平方可积函数)空间的规范正交基，这构成了线性调频小波理论；第二类是利用基本的量子态和量子比特，根据量子力学理论构造量子系统态空间和量子计算机之量子比特空间的规范正交基，以及根据量子计算理论构造量子比特按照量子比特小波演化的量子算法，

这构成了量子小波理论.

线性调频小波的“尺度参数”表现为“调频率”或者“控制调频率的参数”，形式上可以选择任意实数，实际上可以限制在正实数范围内，甚至完全可以限制在一个有限区间内，比如，经常选择三角函数的一个完整周期 $\left[0,2\pi\right]$，再或者经过约定倍数的伸缩选择为整数区间 $\left[0,4\right]$，当然这些尺度参数发挥作用的最终形式是“三角函数线性的”，其中具体涉及“余切函数线性”和“余割函数线性”，这决定了线性调频小波构成函数空间规范正交基的方式有别于多尺度小波，每当决定“调频率”数值的参数确定之后，线性调频小波就提供函数空间的一组规范正交小波基. 除此之外，考虑到线性调频小波算子的可交换性以及“调频率”控制参数的可加性要求，需要函数空间的线性调频小波规范正交基之间或者线性调频小波算子之间必须满足“阿贝尔群限制”，即由“调频率”控制参数决定的线性调频小波算子集合构成一个阿贝尔群，这样，线性调频小波理论本质上就是利用调频类函数或者调频类函数组合构造函数空间规范正交基族的一般理论.

线性调频小波表现为多个等间隔调频参数决定的线性调频函数系按照统一的线性组合模式构造平方可积函数空间的规范正交基，为此要求组合模式的系数函数系满足一组给定的公理，以保证相应的线性调频小波算子族构成一个连续阿贝尔群. 在这种线性组合模式中，对参与组合的酉算子列并没有严格的限制，可以采用递归方式利用已经构造获得的酉算子群产生酉算子列，重复这种模式再次构造新的酉算子群. 本书仔细论述了这种递归构造模式的特点和相关问题，并将这种构造方法延伸应用最终获得耦合线性调频小波函数系，在通常条件下，这种耦合线性调频小波函数系将不再重现参与线性组合的已知酉算子列，这个显得稍微有些奇怪的性质，为耦合线性调频小波函数系或者小波算子在光学图像信息安全研究中的应用奠定了关键的理论基础.

量子小波包含了量子态小波和量子比特小波两种形式，其物理本质是将(连续和离散形式的)规范正交量子小波态作为基本量子态，给出量子系统量子态的规范正交(积分的或者级数的)叠加描述，或者将任何量子系统理解为多个相互正交的共同的小波量子系统的叠加，其数学本质与多尺度小波和线性调频小波是一样的，利用量子小波给出量子态空间函数表示或者量子态表示的规范正交基. 首先，量子态小波体现为量子力学系统的特殊量子态，它的压缩态产生一系列相互正交的基本量子态，可以将量子力学系统的任意量子态表达为这些基本量子态的“态叠加”. 这里需要强调的是，这些相互正交的基本量子态具有普遍的通用功能，任何量子力学系统的任意量子态都能够被这组“基本态”正交地表达，无论是什么样的量子力学系统，而且无论这个量子力学系统采用何种“表象”(坐标系)方法，比如位置表象，或者动量表象，或者任何其他合适的表象，这个结论都是成立的！这个特征很容易

联想到量子力学狄拉克符号体系的作用，即用专门的符号和符号形式演算系统，表达量子力学的运算和规律(定律)，而不论量子力学系统采用何种表象，同一个运算或者同一种规律(定律)始终表现为相同的形式符号或者形式符号演算关系．从这个意义上说，量子态小波理论体系与量子力学狄拉克符号体系处于同样的“抽象程度”或者“普适程度”．其次，量子比特小波本质上是量子比特运算酉算子，是量子小波的另一类表现形式，可以大致理解为离散形式的量子态小波．量子计算机和量子计算理论是 20 世纪 90 年代末量子力学与计算机理论以及计算科学理论的融合，在此基础上产生的量子比特小波出现比较晚，时至今日也只有将近二十年的发展时间，虽然已经得到了一些重要的研究成果，但理论体系尚未十分完善．考虑到量子计算机和量子计算理论未来可能对人类科技和社会带来不可估量的巨大推动作用以及小波思想和理论独特的方法论优势，有充足的理由相信，量子比特小波理论研究必将迎来小波理论与应用研究的又一个高潮．

关于量子小波理论的研究，本书详细回顾了在量子力学理论研究过程中，量子态小波经历相干态量子小波和压缩态量子小波并最终发展成为具有现代小波形式的量子小波的过程．此外，利用量子光学压缩态的方法重点研究了量子态“伸缩-平移”算子按照狄拉克符号体系的表示问题，最终将量子力学系统任意量子态或者波函数的量子态小波变换表示为量子态伸缩-平移算子矩阵表达式中的矩阵元素．作为示范，在书中详细演算并具体给出了几个量子态小波的表达形式以及波函数的量子态小波变换，在这个过程中，顺便计算得到了线性调频形式的量子态小波以及它与伸缩平移量子态小波联合实现波函数量子态小波变换的演算实例．关于量子比特小波的研究，在量子计算机和量子计算理论基础上，将量子比特小波作为量子比特运算酉算子，重点研究这类酉算子的(矩阵直和、矩阵乘积或者克罗内克矩阵乘积)分解表达形式以及量子计算实现所需要的量子线路和网络的构造问题．考虑到量子比特小波计算的通用性要求，按照克罗内克矩阵乘积或者算子乘积方法以及矩阵或者算子直和的方法，尽量将小波包算法和金字塔算法需要的量子计算问题和量子计算实现问题转化为一些简单的量子比特运算酉算子的组合，比如在量子哈尔小波和量子朵蓓琪丝小波的小波包量子算法以及金字塔量子算法实现过程中，利用包括量子比特傅里叶算子、量子比特交叠置换算子、量子比特翻转置换算子等在内的已知量子比特运算酉算子，经过克罗内克算子乘积和算子直和，最终获得能够高效、物理可行量子计算实现小波包算法和金字塔算法的量子计算线路和线路网络，同时获得量子计算效率为量子比特位数多项式的综合评估结果．

本书内容除了线性调频小波理论和量子小波理论外，还包括 296 个关于小波理论与应用的练习题，内容涵盖了傅里叶级数基本性质、傅里叶变换基本性质、离散或者有限傅里叶变换的基本性质、多分辨率分析、小波基本理论、时频分析理论、

小波链理论、小波包理论以及金字塔理论，图像小波理论、图像小波链理论、图像小波包理论、图像金字塔理论、超级图像小波理论、超级图像小波链理论、超级图像小波包理论以及超级图像金字塔算法理论、有限数字图像小波算法和小波包算法以及金字塔算法理论等.

在撰写本书的过程中，第 9 章线性调频小波理论和第 10 章量子小波理论由冉启文和冉冉共同撰写成稿，其中线性调频小波理论相关内容由冉启文主笔、冉冉辅助完成，量子小波理论的相关内容由冉冉主笔、冉启文辅助撰写完成，出现在第三卷最后部分的 296 个练习题由冉冉和冉启文共同完成. 全书由冉启文统稿.

感谢已故洪家荣教授和冯英浚教授，正是两位教授的支持与帮助坚定了第一作者在 20 世纪 90 年代选择多尺度小波与分数傅里叶变换(线性调频小波)相关关系的研究工作. 感谢舒文豪教授以及第二作者在哈尔滨工业大学学习期间的导师刘树田教授，与他们的广泛讨论启迪作者研究并逐渐认识到多尺度小波与分数傅里叶变换(线性调频小波)的相似性.

感谢已故中国科学院院士马祖光教授、作为第一作者在博士后研究期间合作导师的王骐教授和马晶教授，与三位教授的学术交流和学术讨论如沐春风、受益匪浅，开启了第一作者系统构造线性调频小波和耦合调频小波的研究方向；同时感谢马晶和谭立英夫妇，与两位教授从 20 世纪 90 年代开始的友谊以及在光学、小波光学、分数傅里叶光学和卫星激光通信等领域的全面深入合作研究，深度影响了《小波与量子小波》的写作风格，特别是长期无私的讨论和争论形成的小波波前滤波思想和分数傅里叶光学调频域滤波思想，深深影响了本书图像小波理论、小波光场理论和线性调频小波理论的论述风格.

感谢已故中国工程院院士张乃通教授，他生前大力推动小波理论在通信理论和技术研究中的应用，积极组织团队加强小波方法与超宽带无线通信方法和技术的融合、多尺度小波和线性调频小波方法与多域协同通信理论和方法的交叉联合研究，在他生前的最后几年，还特别鼓励和推荐第一作者将这些交叉融合研究成果撰写并公开出版，虽然因为各种原因未能完成这些成果的独立出版，但其中部分成果已经融入本书的相关章节，希望对相关领域研究者和学生有所裨益，告慰辞世不久的张乃通院士.

感谢沙学军教授针对小波方法在通信理论和技术研究中应用的有益建议和无私讨论，特别是在基于加权分数傅里叶变换域的多分量多天线通信方法研究和异构网络协同信号处理理论与方法研究过程中深入的、全方位的交流和探索，启发第一作者在本书的撰写过程中重新考虑并采用更恰当的方式阐述多尺度小波理论和线性调频小波理论的某些问题.

感谢严质彬教授，第一作者和他三十多年的友谊一直伴随着小波、分形和混

沌、随机过程和随机计算算法等理论的发展以及关于这些理论应用的长期、广泛而且深入的讨论和争论，受益良多，深刻影响着第一作者在《小波与量子小波》中对小波理论以及小波应用某些专题研究的理解和诠释.

除此之外，张海莹博士、赵辉博士、魏德运博士、杨中华博士、赵铁宇博士、袁琳博士、陈冰冰硕士和在读博士研究生王玲参与了部分文献资料的搜集整理工作，在“小波与科学”慕课课程建设过程中，张海莹博士、肖宇博士、杨占文博士、李莉博士和袁腊梅博士部分参与了将《小波与量子小波》中多尺度小波理论的部分内容转换成线上课程内容的工作，在此一并表示感谢.

《小波与量子小波》能够顺利出版，感谢哈尔滨工业大学研究生院和本科生院的资助和大力支持！ 特别感谢“973”计划课题“资源复用与抗干扰机理(2007CB310606)”和“异构网络协同信号处理理论与方法(2013CB329003)”的资助和大力支持！感谢国家自然科学基金项目“基于加权分数傅里叶变换域的多分量多天线通信方法(61671179)”的资助和大力支持！

最后，感谢吕春玲女士，不仅因为她对作者长期在工作、生活等多方面的关心和照顾，更因为她在《小波与量子小波》的成书过程中付出了大量的时间和精力，完成了十分繁重的相关资料整理、文字编辑排版以及巨量的数学公式和符号编排工作，同时，在将《小波与量子小波》的部分早期内容以“小波理论与应用”的课程名称在‘超星学术网’上公开授课过程中，以及在按照‘学堂在线’要求将《小波与量子小波》中多尺度小波理论的部分内容和习题转换、处理、编辑和整理成为在线慕课课程“小波与科学”的过程中，她完成了超出想象的大量繁琐复杂工作，深得相关网站工作人员的好评和赞赏. 作者再次感谢她，唯愿《小波与量子小波》的出版能够对相关领域科学技术研究人员和学生理解及应用小波有所助益，以此回馈和报答她的辛勤付出！

冉启文

2018 年 4 月于中国哈尔滨

冉　冉

2018 年 4 月于加拿大多伦多

目 录

第三卷 调频小波与量子小波

第一卷　小波简史与小波基础理论

第二卷　图像小波与小波应用

第 9 章　线性调频小波理论

线性调频小波函数最早出现在 Namias(1980a, 1980b)建立的“分数阶傅里叶变换(the fractional order Fourier transform)算子”中，具体方式是作为这种线性积分变换算子的(变换)核函数. 利用这些算子能够建立一种简便方法，便于求解出现在经典二次哈密顿(量)函数量子力学系统中的常微分方程和偏微分方程. 线性调频小波在自由和受限量子力学调和振荡器研究中的应用实例详细说明了如何使用这类线性变换算子. 除此之外，这种变换算子在三维函数空间的普遍形式被用于研究定磁场电子运动量子力学特征(电动力学特征)，建立在通用算子演算规则上的线性调频小波变换算子可以十分方便地刻画定态、能量跃迁态和初始波包的演化过程，以及求解刻画时变磁场电子量子动力学的具有时间依赖系数的二阶偏微分方程. 这些成果意味着这类变换算子理论将会被广泛用于科学技术研究的各个领域.

在此之前，Weyl(1927)和 Wiener(1929)研究揭示埃尔米特(Hermite)多项式、埃尔米特-高斯(Hermite-Gauss)正交函数系以及傅里叶变换特征值问题之间的关联关系，在群论与量子力学研究过程中，他们虽然没有命名这种积分变换算子，但确实把与傅里叶变换特征性质相关的一些重要成果推广到了这种积分变换算子类中.

Condon(1937)通过把傅里叶变换算子嵌入函数变换连续群的方式建立了傅里叶变换的一种推广形式，此后 Kober(1939)、Bargmann(1961)和 Wolf(1979)在构造各种各样的积分变换和正则变换的过程中，都涉及或初步建立了非常接近线性调频小波变换的线性积分变换算子，这些在早期研究中初步显现出线性调频小波函数的雏形.

McBride 和 Kerr(1987)统一刻画了此前文献中出现的多种分数阶傅里叶变换算子的积分核函数，这些核函数就是以变换幂次作为参数的线性调频函数，正因为这样，这类线性变换的核函数被称为线性调频小波函数，相应的线性变换或积分变换被称为线性调频小波变换. Lohmam(1993)发现并证明在维格纳(Wigner, 1932)分布时频平面上线性调频小波变换与平面旋转算子是等价的，从而开启了线性调频小波和线性调频小波变换在光学和光学工程、信号处理和图像信息安全等学科领域的研究和应用.

Almeida(1994)在线性调频小波函数基础上建立了线性调频小波变换的时移、频移以及尺度性质，奠定了线性调频小波在滤波器设计以及信号滤波理论中应用的方

法基础, 从此开启了线性调频小波和线性调频小波变换在信号最优滤波、雷达信号识别等领域的研究和应用.

此后相继出现了以一些线性调频小波函数有限项级数和为核函数的线性积分变换算子, 开启了以“组合线性调频小波函数系”为规范正交基函数的时代, 为函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 以及其中函数的表达和研究提供大量的形式统一而且转换关系简单的规范正交基, 取得了丰硕的理论和应用研究成果, 为线性调频小波理论在图像信息安全和光信息安全等研究领域的应用奠定了坚实的理论基础.

本章的主要研究内容包括采用两种完全不同的理论方法建立线性调频小波理论, 即对角化傅里叶积分变换算子的特征化方法和以简单线性调频函数有限项级数和为核函数的“组合和/或耦合线性调频小波”构造方法.

在这里特别说明, 为了行文简便只在本章范围内, 将函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交傅里叶变换基选择为 $\{\varepsilon_\omega(x) = e^{2\pi i\omega x}; \omega \in \mathbb{R}\}$, 这和全书除本章之外的其他各章略有不同.

9.1 对角化傅里叶变换与调频小波

自从 Weyl(1927)和 Wiener(1929)研究并获得 Hermite 多项式、Hermite-Gauss 正交函数系与傅里叶变换特征值问题之间的关联关系之后, 傅里叶变换算子的特征值问题得到了广泛深入的研究, 由傅里叶积分变换算子特征值的本质多重性决定的规范正交特征函数系的多样性以及多样性的刻画得到了充分表达, 这些研究成果奠定了线性调频小波函数构造的特征化方法的理论基础.

9.1.1 傅里叶积分变换及其对角化

(α) 傅里叶变换

在非周期能量有限信号空间或平方可积函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中, 考虑傅里叶变换基 $\{\varepsilon_\omega(x) = e^{2\pi i\omega x}; \omega \in \mathbb{R}\}$, 它是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

任意 $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 在平凡规范正交基 $\{\delta(x-\omega); \omega \in \mathbb{R}\}$ 下的“坐标”写成

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-\omega)dx$$

它在这个平凡规范正交基下的表示为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\delta(x-\omega)d\omega$$

定义 $\mathscr{F}: \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 将 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的平凡规范正交基 $\{\delta(x-\omega); \omega \in \mathbb{R}\}$ 变换为

规范正交基 $\{\varepsilon_\omega(x)=e^{2\pi i\omega x};\omega\in\mathbb{R}\}$ 如下:

$$\mathscr{F}:\delta(x-\omega)\mapsto\varepsilon_\omega(x)=e^{2\pi i\omega x},\quad\omega\in\mathbb{R}$$

于是 $f(x)$ 在傅里叶变换基 $\{\varepsilon_\omega(x)=e^{2\pi i\omega x};\omega\in\mathbb{R}\}$ 之下的“坐标”为

$$\mathscr{F}f=\mathscr{f}:\ \mathscr{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i\omega x}dx$$

此即 $f(x)$ 的傅里叶变换 $\mathscr{f}(\omega)$. 在傅里叶变换基 $\{\varepsilon_\omega(x)=e^{2\pi i\omega x};\omega\in\mathbb{R}\}$ 之下, $f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{f}(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega$$

这正好是 $\mathscr{f}(\omega)$ 的傅里叶逆变换 $f(x)$.

(β) 傅里叶变换的酉性

任意 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, 其傅里叶变换

$$\mathscr{F}f=\mathscr{f}:\mathscr{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i\omega x}dx$$

是一个酉变换, 即任给 $f(x),g(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, Parseval 恒等式或 Plancherel 能量守恒定理成立:

$$\begin{aligned}\left\langle f(x),g(x)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g}(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{f}(\omega)\overline{\mathscr{G}}(\omega)d\omega\\&=\left\langle\mathscr{f}(\omega),\overline{\mathscr{G}}(\omega)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

或者

$$\|f(x)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}^2=\|\mathscr{f}(\omega)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}^2$$

(γ) Hermite-Gauss 函数系

规范正交的 Hermite-Gauss 函数系定义如下:

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^m n!\sqrt{\pi}}}h_n(x)\exp(-0.5x^2),\quad n\in\mathbb{N}$$

其中 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\},h_n(x)=(-1)^n e^{x^2}d^n e^{-x^2}/dx^n$ 是 n 阶 Hermite 多项式. 容易验证 Hermite-Gauss 函数系 $\{\varphi_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_m(x)\varphi_n^*(x)dx=\delta_{m,n}=\begin{cases}1,&m=n\\0,&m\neq n\end{cases}$$

(δ) 傅里叶变换算子的规范正交特征函数系

将傅里叶变换算子 $\mathscr{F}:\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\to\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 表示如下:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}:\ \mathscr{F}[f(x)](\omega)&=\mathscr{F}(\omega)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i\omega x}dx\end{aligned}$$

容易验证傅里叶变换算子 $\mathscr{F}$ 具有如下特征关系:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\varphi_n(x)](\omega)&=\lambda_n\varphi_n(\omega)\\\lambda_n&=\exp(-2\pi ni/4)\\n&=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

即 Hermite-Gauss 函数系 $\{\varphi_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 是傅里叶变换算子 $\mathscr{F}$ 的规范正交特征函数系，而 $\lambda_n=\exp(-2\pi ni/4),n=0,1,2,\cdots$ 是傅里叶变换算子的特征值序列.

可以证明，$\{\varphi_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 是函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

(ε) 傅里叶变换算子的对角化形式

利用傅里叶积分变换算子 $\mathscr{F}:\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\to\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的完全规范正交特征函数系 $\{\varphi_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 构成的函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基，可以把傅里叶变换算子表示为对角化的形式.

函数空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的任何函数 $f(x)$ 具有如下形式的级数展开:

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\varphi_n(x)\\f_n&=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi_n^*(x)dx\\n&=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

因为，$\mathscr{F}[\varphi_n(x)](\omega)=\lambda_n\varphi_n(\omega),n=0,1,2,\cdots$，由此导出算子 $\mathscr{F}$ 的分解形式;

$$\mathscr{F}[f(x)](\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\lambda_n\varphi_n(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\omega)\lambda_n\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi_n^*(x)dx$$

按照如下方式定义 3 个酉算子:

$$\begin{cases}\mathcal{U}^*:\quad f(x)\mapsto\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}},\quad & f_n=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi_n^*(x)dx\\\mathcal{D}:\quad\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}},\quad & g_n=\lambda_nf_n\\\mathcal{U}:\quad\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\mathscr{G}(\omega),\quad & \mathscr{G}(\omega)=\sum_{n\in\mathbb{N}}g_n\varphi_n(\omega)\end{cases}$$