



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 微分几何

第五版

梅向明 黄敬之 编

高等教育出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 微分几何

第五版

梅向明 黄敬之 编



高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，在第四版的基础上修订而成。这次再版主要修改了第四章 §4 中“完备曲面的比较定理”的证明，使读者进一步学习近代比较黎曼几何时，有较好的分析准备和直观的几何背景；补充了数学史料、拓展阅读类数字资源，以二维码或图标



示意。

本书可供高等师范院校数学院系用作教材。

## 图书在版编目(CIP)数据

微分几何/梅向明,黄敬之编. --5版. --北京:  
高等教育出版社, 2019.7

ISBN 978-7-04-050741-6

I. ①微… II. ①梅… ②黄… III. ①微分几何-高等学校-教材 IV. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 239645 号

项目策划 李艳馥 兰莹莹 李蕊  
策划编辑 兰莹莹 责任编辑 田玲 封面设计 王凌波 版式设计 徐艳妮  
插图绘制 于博 责任校对 窦丽娜 责任印制 尤静

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	北京明月印务有限责任公司		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	15	版 次	1981 年 7 月第 1 版
字 数	310 千字		2019 年 7 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印 次	2019 年 7 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	30.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 50741-00

# 微分几何

第五版

梅向明 黄敬之 编

1. 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1222725>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
2. 注册并登录, 进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号(20位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 [abook@hep.com.cn](mailto:abook@hep.com.cn)。



扫描二维码  
下载 Abook 应用



微分几何简史



第一版前言



## 第五版前言

在这一版中,我们把“完备曲面的比较定理”的证明作了修改,使得这个证明更简单、直观。这个比较定理是近代黎曼几何中的托波诺夫(Toponogov)定理的二维阐述,掌握它对于理解托波诺夫定理非常重要,为进一步掌握近代比较黎曼几何奠定基础。同时,二维情形又是高维情形的非常好的模型,希望读者们能对这部分内容感兴趣。

梅向明

2019年春节于北京



第四版前言



第三版前言



第二版前言



第一版前言

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

### 防伪查询说明

用户购书后刮开封底防伪涂层，利用手机微信等软件扫描二维码，会跳转至防伪查询网页，获得所购图书详细信息。用户也可将防伪二维码下的20位密码按从左到右、从上到下的顺序发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

### 反盗版短信举报

编辑短信“JB,图书名称,出版社,购买地点”发送至10669588128

### 防伪客服电话

(010)58582300

<b>第一章 曲线论</b> .....	1
§ 1 向量函数 .....	1
1.1 向量函数的极限 .....	1
1.2 向量函数的连续性 .....	3
1.3 向量函数的微商 .....	3
1.4 向量函数的泰勒 (Taylor) 公式 .....	5
1.5 向量函数的积分 .....	6
§ 2 曲线的概念 .....	9
2.1 曲线的概念 .....	9
2.2 光滑曲线 曲线的正则点 .....	11
2.3 曲线的切线和法平面 .....	13
2.4 曲线的弧长 自然参数 .....	15
§ 3 空间曲线 .....	19
3.1 空间曲线的密切平面 .....	19
3.2 空间曲线的基本三棱形 .....	21
3.3 空间曲线的曲率、挠率和伏雷内公式 .....	24
3.4 空间曲线在一点邻近的结构 .....	29
3.5 空间曲线论的基本定理 .....	31
3.6 一般螺线 .....	34
<b>第二章 曲面论</b> .....	37
§ 1 曲面的概念 .....	37
1.1 简单曲面及其参数表示 .....	37
1.2 光滑曲面 曲面的切平面和法线 .....	39
1.3 曲面上的曲线族和曲线网 .....	43
§ 2 曲面的第一基本形式 .....	45
2.1 曲面的第一基本形式 曲面上曲线的弧长 .....	45
2.2 曲面上两方向的交角 .....	47
2.3 正交曲线族和正交轨线 .....	48
2.4 曲面域的面积 .....	48
2.5 等距变换 .....	49
2.6 保角变换 .....	51
§ 3 曲面的第二基本形式 .....	53
3.1 曲面的第二基本形式 .....	53
3.2 曲面上曲线的曲率 .....	57

3.3	迪潘 (Dupin) 指标线	60
3.4	曲面的渐近方向和共轭方向	61
3.5	曲面的主方向和曲率线	62
3.6	曲面的主曲率、高斯 (Gauss) 曲率和平均曲率	65
3.7	曲面在一点邻近的结构	69
3.8	高斯曲率的几何意义	71
§ 4	直纹面和可展曲面	76
4.1	直纹面	76
4.2	可展曲面	78
4.3	线汇	84
§ 5	曲面论的基本定理	85
5.1	曲面的基本方程和克里斯托费尔 (Christoffel) 符号	86
5.2	曲面的黎曼 (Riemann) 曲率张量和高斯-科达齐-迈因纳尔迪 (Gauss-Codazzi-Mainardi) 公式	88
5.3	曲面论的基本定理	91
§ 6	曲面上的测地线	95
6.1	曲面上曲线的测地曲率	95
6.2	曲面上的测地线	97
6.3	曲面上的半测地坐标网	99
6.4	曲面上测地线的短程性	101
6.5	高斯-波涅 (Gauss-Bonnet) 公式	103
6.6	曲面上向量的平行移动	105
6.7	极小曲面	109
§ 7	常高斯曲率的曲面	112
7.1	常高斯曲率的曲面	112
7.2	伪球面	113
7.3	罗氏几何	117
<b>第三章</b>	<b>外微分形式和活动标架</b>	<b>122</b>
§ 1	外微分形式	122
1.1	格拉斯曼 (Grassmann) 代数	122
1.2	外微分形式	125
1.3	弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 定理	131
§ 2	活动标架	142
2.1	合同变换群	142
2.2	活动标架	143
2.3	活动标架法	150
§ 3	用活动标架法研究曲面	152
3.1	曲面论的基本定理	152
3.2	曲面的第一和第二基本形式	153
3.3	曲面上的曲线 法曲率 测地曲率和测地挠率	154
3.4	曲面的主曲率 欧拉公式 高斯曲率和平均曲率	155
3.5	曲面上向量的平行移动	157
3.6	闭曲面的高斯-波涅公式	159



第四章 整体微分几何初步 .....	162
§ 1 平面曲线的整体性质 .....	162
1.1 旋转数 .....	162
1.2 凸曲线 .....	166
1.3 等周不等式 .....	169
1.4 四顶点定理 .....	172
1.5 等宽曲线 .....	173
1.6 平面上的克罗夫顿 (Crofton) 公式 .....	174
§ 2 空间曲线的整体性质 .....	177
2.1 芬切尔 (Fenchel) 定理 .....	177
2.2 球面上的克罗夫顿公式 .....	181
2.3 法里-米尔诺 (Fáry-Milnor) 定理 .....	183
2.4 闭曲线的全挠率 .....	186
§ 3 曲面的整体性质 .....	188
3.1 曲面的整体定义 .....	188
3.2 曲面的一般性质 .....	192
3.3 卵形面 .....	194
3.4 完备曲面 .....	207
3.5 负常高斯曲率的曲面 .....	212
§ 4 完备曲面的比较定理 .....	218
4.1 完备曲面上的极坐标系 .....	218
4.2 完备曲面的比较定理 .....	220
4.3 完备曲面的余弦定律 .....	221
名词索引 .....	224

### §1 向量函数

在本书的学习中,要广泛地应用向量分析的知识,因此在这里对向量分析的基本内容作简单扼要的介绍.

首先介绍向量函数的概念.

给出一点集  $G$ , 如果对于  $G$  中每一个点  $x$ , 有一个确定的向量  $\mathbf{r}$  和它对应, 则我们说, 在  $G$  上给定了一个向量函数, 记作

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x), \quad x \in G.$$

例如, 设  $G$  是实数轴上一区间  $[t_0, t_1]$ , 则得一元向量函数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

设  $G$  是平面上—区域,  $(u, v) \in G$ , 则得二元向量函数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

设  $G$  是空间中—区域,  $(x, y, z) \in G$ , 则得三元向量函数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z).$$

正如数学分析中对实函数所讨论的那样, 我们也对向量函数引进极限、连续、微商和积分等概念.

#### 1.1 向量函数的极限

设  $\mathbf{r}(t)$  是所给的一元向量函数,  $\mathbf{a}$  是常向量(即长度与方向都固定的向量), 如果对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 都存在数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |t - t_0| < \delta$  时

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon$$

成立, 则我们说, 当  $t \rightarrow t_0$  时, 向量函数  $\mathbf{r}(t)$  趋于极限  $\mathbf{a}$ . 记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}. \tag{1.1}$$

有关数量函数的极限性质, 都可以推广到向量函数的情况, 从而得到类似的命题.

**命题 1** 如果  $\mathbf{r}(t)$  和  $\mathbf{s}(t)$  是两个一元向量函数,  $\lambda(t)$  是一个实函数, 并且当  $t \rightarrow t_0$  时这些函数的值趋向极限:

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{a}, \quad \mathbf{s}(t) \rightarrow \mathbf{b}, \quad \lambda(t) \rightarrow m,$$

即  $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| \rightarrow 0, |\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}| \rightarrow 0, |\lambda(t) - m| \rightarrow 0$ , 则有

(1) 两个向量函数之和(差)的极限等于极限之和(差):

$$\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t) \longrightarrow \mathbf{a} \pm \mathbf{b}.$$

(2) 乘积  $\lambda(t)\mathbf{r}(t)$  (数量乘向量)的极限等于极限的乘积:

$$\lambda(t)\mathbf{r}(t) \longrightarrow m\mathbf{a}.$$

(3) 数量积  $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)$  的极限等于极限的数量积:

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t) \longrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

(4) 向量积  $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t)$  的极限等于极限的向量积:

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t) \longrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

**证明** 这些命题的证明原则上和数学分析中关于实函数所对应的命题的证明没有什么区别.

$$(1) \quad |[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t)] - (\mathbf{a} \pm \mathbf{b})| = |[\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}] \pm [\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}]| \\ \leq |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| + |\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}|,$$

当  $t \rightarrow t_0$  时, 由已知条件  $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| \rightarrow 0$ ,  $|\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}| \rightarrow 0$ , 有

$$|[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t)] - (\mathbf{a} \pm \mathbf{b})| \longrightarrow 0,$$

即

$$\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t) \longrightarrow \mathbf{a} \pm \mathbf{b}.$$

(2) 作出向量的差

$$\lambda(t)\mathbf{r}(t) - m\mathbf{a} = \lambda(t)[\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}] + [\lambda(t) - m]\mathbf{a},$$

由此得出

$$|\lambda(t)\mathbf{r}(t) - m\mathbf{a}| \leq |\lambda(t)| |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| + |\lambda(t) - m| |\mathbf{a}|,$$

当  $t \rightarrow t_0$  时, 由已知条件  $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| \rightarrow 0$ ,  $|\lambda(t) - m| \rightarrow 0$  及

$$|\lambda(t)| \rightarrow |m|, |\mathbf{a}| \text{ 是常数,}$$

有

$$|\lambda(t)\mathbf{r}(t) - m\mathbf{a}| \rightarrow 0,$$

即

$$\lambda(t)\mathbf{r}(t) \longrightarrow m\mathbf{a}.$$

(3) 作出数量差

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}] \cdot \mathbf{s}(t) + [\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}] \cdot \mathbf{a},$$

由此得出

$$|\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |[\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}] \cdot \mathbf{s}(t)| + |[\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}] \cdot \mathbf{a}|. \quad (1.2)$$

因为任何两个向量  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  的数量积  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}})$ , 所以

$$|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}| \leq |\mathbf{p}| |\mathbf{q}|.$$

因此, 如果  $\mathbf{p}$  趋于零 (即  $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ ), 而  $\mathbf{q}$  趋于确定的极限  $\mathbf{q}_0$  (此时有  $|\mathbf{q}| \rightarrow |\mathbf{q}_0|$ ), 那么不等式的右边趋向于零. 这时有

$$|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}| \longrightarrow 0.$$

因而当  $t \rightarrow t_0$  时, 我们由已知条件

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| \longrightarrow 0, \quad |\mathbf{s}(t)| \longrightarrow |\mathbf{b}|,$$

知不等式(1.2)右边第一项有

$$|[\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}] \cdot \mathbf{s}(t)| \longrightarrow 0,$$

同理

$$|[\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}] \cdot \mathbf{a}| \longrightarrow 0.$$

于是得到

$$|\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \longrightarrow 0,$$

即

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t) \longrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

(4) 作出向量的差

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t) - \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}] \times \mathbf{s}(t) + \mathbf{a} \times [\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}],$$

由此得出

$$|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t) - \mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq |[\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}] \times \mathbf{s}(t)| + |\mathbf{a} \times [\mathbf{s}(t) - \mathbf{b}]|. \quad (1.3)$$

因为两个向量  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{q}$  的向量积的模  $|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cdot |\sin(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}})|$ , 所以  $|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| \leq |\mathbf{p}| |\mathbf{q}|$ . 因此, 如果  $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ , 而  $|\mathbf{q}|$  趋于确定的极限, 则  $|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| \rightarrow 0$ .

把这个结论应用到不等式(1.3)的右边, 便有当  $t \rightarrow t_0$  时, 由已知条件可得到

$$|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t) - \mathbf{a} \times \mathbf{b}| \rightarrow 0,$$

即

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t) \longrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

## 1.2 向量函数的连续性

有了向量函数的极限概念, 我们就可以引进向量函数的连续性概念. 给出一元向量函数  $\mathbf{r}(t)$ , 当  $t \rightarrow t_0$  时, 若向量函数  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t_0)$ , 则称向量函数  $\mathbf{r}(t)$  在  $t_0$  点是连续的.

利用极限的定义, 向量函数  $\mathbf{r}(t)$  在  $t_0$  连续的定义可表示为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

如果  $\mathbf{r}(t)$  在区间  $[t_1, t_2]$  的每一点都连续, 则称  $\mathbf{r}(t)$  在区间  $[t_1, t_2]$  上是连续<sup>①</sup>的.

利用命题 1 的结果, 我们可以得到:

**命题 2** 如果  $\mathbf{r}(t)$  和  $\mathbf{s}(t)$  是在点  $t_0$  连续的向量函数, 而  $\lambda(t)$  是在点  $t_0$  连续的实函数, 则向量函数  $\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t)$ ,  $\lambda(t)\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t)$  和实函数  $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)$  也都在点  $t_0$  连续 (把命题中的点  $t_0$  改为区间  $[t_1, t_2]$  时, 命题也成立).

## 1.3 向量函数的微商

设  $\mathbf{r}(t)$  是定义在区间  $[t_1, t_2]$  上的一个向量函数. 设  $t_0 \in (t_1, t_2)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在, 则称  $\mathbf{r}(t)$  在  $t_0$  点是可微分的, 这个极限称为  $\mathbf{r}(t)$  在  $t_0$  点的微商 (或导矢), 用

$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{t_0}$  或  $\mathbf{r}'(t_0)$  表示, 即

① 在端点  $t=t_1$  和  $t=t_2$  处指的是右连续和左连续.

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{t_0} = \mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

如果  $\mathbf{r}(t)$  在某个开区间的每一点都有微商存在, 则我们说  $\mathbf{r}(t)$  在此区间内是可微的或简称向量函数  $\mathbf{r}(t)$  是可微的, 它的微商记为  $\mathbf{r}'(t)$ .

对于向量函数的微分法有以下命题:

**命题 3** 设  $\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t)$  分别是可微的向量函数,  $\lambda(t)$  是可微的实函数, 则  $\lambda(t)\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t), (\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t), \mathbf{u}(t))$  都是可微的, 并且

$$\begin{aligned}(\lambda \mathbf{r})' &= \lambda \mathbf{r}' + \lambda' \mathbf{r}, \\(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})' &= \mathbf{r}' \pm \mathbf{s}', \\(\mathbf{r} \times \mathbf{s})' &= \mathbf{r}' \times \mathbf{s} + \mathbf{r} \times \mathbf{s}', \\(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})' &= \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}', \\(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u})' &= (\mathbf{r}', \mathbf{s}, \mathbf{u}) + (\mathbf{r}, \mathbf{s}', \mathbf{u}) + (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u}').\end{aligned}$$

这些公式的证明和数学分析中实函数的对应公式的证明相似, 但是应该注意的是向量的向量积和混合积跟向量的次序有关, 不能把次序任意交换. 作为例子, 我们证明后面三个结果.

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} \times \mathbf{s})'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) \times \mathbf{s}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t)}{\Delta t} \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)] \times \mathbf{s}(t+\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\mathbf{r}(t) \times [\mathbf{s}(t+\Delta t) - \mathbf{s}(t)]}{\Delta t} \right\} \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{s}(t+\Delta t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}(t+\Delta t) - \mathbf{s}(t)}{\Delta t} \\&= \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}'(t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{s}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)}{\Delta t} \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{s}(t+\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{s}(t+\Delta t) - \mathbf{s}(t)]}{\Delta t} \right\} \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{s}(t+\Delta t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}(t+\Delta t) - \mathbf{s}(t)}{\Delta t} \\&= \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}'(t).\end{aligned}$$

由上面的结果可以得到

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u})' &= [(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{u}]' \\&= (\mathbf{r} \times \mathbf{s})' \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{u}' \\&= (\mathbf{r}' \times \mathbf{s} + \mathbf{r} \times \mathbf{s}') \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{u}' \\&= (\mathbf{r}' \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{r} \times \mathbf{s}') \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{u}' \\&= (\mathbf{r}', \mathbf{s}, \mathbf{u}) + (\mathbf{r}, \mathbf{s}', \mathbf{u}) + (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u}').\end{aligned}$$

向量函数  $\mathbf{r}(t)$  的微商  $\mathbf{r}'(t)$  仍为  $t$  的一个向量函数, 如果函数  $\mathbf{r}'(t)$  也是连续的和可微的, 则  $\mathbf{r}'(t)$  的微商  $\mathbf{r}''(t)$  称为  $\mathbf{r}(t)$  的二阶微商. 类似地可以定义三阶、四阶等的微商. 在区间  $[t_1, t_2]$  上有直到  $k$  阶连续微商的函数称为这区间上的  $k$  次可微函数或  $C^k$  类

函数,连续函数也称为  $C^0$  类函数,无限可微的函数记为  $C^\infty$  类函数,解析函数记为  $C^\omega$  类函数.

设  $e_1, e_2, e_3$  是笛卡儿直角坐标系的三个基向量,向量函数  $r(t)$  可以表示为

$$r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3,$$

所以每一个向量函数  $r(t)$  与三个有序实函数组  $\{x(t), y(t), z(t)\}$  一一对应.

**命题 4** 如果向量函数  $r(t)$  在  $[t_1, t_2]$  上是  $C^k$  类函数,则向量函数所对应的三个实函数  $x(t), y(t), z(t)$  在  $[t_1, t_2]$  上是  $C^k$  类函数.

**证明** 将  $r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$  两边点乘  $e_1$  得

$$x(t) = r(t) \cdot e_1.$$

由于  $e_1$  是常向量,而  $r(t)$  是  $C^k$  类函数,所以  $x(t)$  是  $C^k$  类函数.

同理可证  $y(t), z(t)$  是  $C^k$  类函数.

## 1.4 向量函数的泰勒 (Taylor) 公式

**定理** 设向量函数  $r(t)$  在  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  上是  $C^{n+1}$  类函数,则有泰勒展开式

$$\begin{aligned} r(t_0 + \Delta t) &= r(t_0) + \Delta t r'(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} r''(t_0) + \cdots + \\ &\quad \frac{(\Delta t)^n}{n!} r^{(n)}(t_0) + \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} [r^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon(t_0, \Delta t)], \end{aligned}$$

其中  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\varepsilon(t_0, \Delta t) \rightarrow 0$ .

**证明** 向量函数  $r(t)$  可表示为

$$r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3.$$

由已知条件在  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  上有  $r(t) \in C^{n+1}$ ,所以在  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  上有  $x(t), y(t), z(t) \in C^{n+1}$ .根据实函数的泰勒公式得知

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) &= x(t_0) + \Delta t x'(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} x''(t_0) + \cdots + \\ &\quad \frac{(\Delta t)^n}{n!} x^{(n)}(t_0) + \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} [x^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon_1(t_0, \Delta t)], \\ y(t_0 + \Delta t) &= y(t_0) + \Delta t y'(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} y''(t_0) + \cdots + \\ &\quad \frac{(\Delta t)^n}{n!} y^{(n)}(t_0) + \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} [y^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon_2(t_0, \Delta t)], \\ z(t_0 + \Delta t) &= z(t_0) + \Delta t z'(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} z''(t_0) + \cdots + \\ &\quad \frac{(\Delta t)^n}{n!} z^{(n)}(t_0) + \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} [z^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon_3(t_0, \Delta t)]. \end{aligned}$$

把上面三式分别乘  $e_1, e_2, e_3$  再相加,则得到所求的向量函数的泰勒公式

$$\begin{aligned} r(t_0 + \Delta t) &= r(t_0) + \Delta t r'(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} r''(t_0) + \cdots + \\ &\quad \frac{(\Delta t)^n}{n!} r^{(n)}(t_0) + \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} [r^{(n+1)}(t_0) + \varepsilon(t_0, \Delta t)]. \end{aligned}$$



当  $\mathbf{r}(t) \in C^\infty$  时,我们就可以把它展开成泰勒级数,即

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \Delta t \mathbf{r}'(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \mathbf{r}''(t_0) + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \mathbf{r}^{(n)}(t_0) + \cdots,$$

上述泰勒级数是收敛的.

### 1.5 向量函数的积分

向量函数的积分的定义和实函数的情形相同,即

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}(\xi_i) (t_i - t_{i-1}),$$

其中  $a=t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n=b$  表示区间  $[a, b]$  的分点,  $\xi_i$  是区间  $(t_{i-1}, t_i)$  中的任一点,当  $n \rightarrow \infty$  时,  $|t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$ .

如果向量函数  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3$  是可积的,则有

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{r}(t) dt &= \int_a^b [x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3] dt \\ &= \mathbf{e}_1 \int_a^b x(t) dt + \mathbf{e}_2 \int_a^b y(t) dt + \mathbf{e}_3 \int_a^b z(t) dt, \end{aligned}$$

即

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{e}_1 \int_a^b x(t) dt + \mathbf{e}_2 \int_a^b y(t) dt + \mathbf{e}_3 \int_a^b z(t) dt.$$

由此可得出有关向量函数积分的命题:

**命题 5** 如果向量函数  $\mathbf{r}(t)$  是区间  $[a, b]$  上的连续函数,则积分

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt$$

存在,并且

1°  $a < c < b$  时有

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \int_a^c \mathbf{r}(t) dt + \int_c^b \mathbf{r}(t) dt.$$

2°  $m$  是常数时有

$$\int_a^b m\mathbf{r}(t) dt = m \int_a^b \mathbf{r}(t) dt.$$

3° 如果  $\mathbf{m}$  是常向量,则有

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}(t) dt &= \mathbf{m} \cdot \int_a^b \mathbf{r}(t) dt, \\ \int_a^b \mathbf{m} \times \mathbf{r}(t) dt &= \mathbf{m} \times \int_a^b \mathbf{r}(t) dt. \end{aligned}$$

4°  $\frac{d}{dx} \left[ \int_a^x \mathbf{r}(t) dt \right] = \mathbf{r}(x)$ .

**证明** 向量函数可以表示为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3. \quad (1.4)$$

根据命题 4 可知若  $\mathbf{r}(t)$  在  $[a, b]$  上是连续函数 ( $C^0$  类函数), 则  $x(t), y(t), z(t)$  在  $[a, b]$  上也是连续函数 ( $C^0$  类函数).

再由实函数的积分定理可知, 在区间  $[a, b]$  上连续的实函数在该区间上是可积的,

即积分

$$\int_a^b x(t) dt, \quad \int_a^b y(t) dt, \quad \int_a^b z(t) dt$$

存在,则由(1.4)式可知积分

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt$$

存在且等于

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{e}_1 \int_a^b x(t) dt + \mathbf{e}_2 \int_a^b y(t) dt + \mathbf{e}_3 \int_a^b z(t) dt.$$

以下我们只证明 1°, 其余的结果请读者自己证明.

由于

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{e}_1 \int_a^b x(t) dt + \mathbf{e}_2 \int_a^b y(t) dt + \mathbf{e}_3 \int_a^b z(t) dt,$$

当  $a < c < b$  时, 根据实函数的积分性质可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1 \int_a^b x(t) dt + \mathbf{e}_2 \int_a^b y(t) dt + \mathbf{e}_3 \int_a^b z(t) dt \\ &= \mathbf{e}_1 \left[ \int_a^c x(t) dt + \int_c^b x(t) dt \right] + \mathbf{e}_2 \left[ \int_a^c y(t) dt + \int_c^b y(t) dt \right] + \mathbf{e}_3 \left[ \int_a^c z(t) dt + \int_c^b z(t) dt \right] \\ &= \mathbf{e}_1 \int_a^c x(t) dt + \mathbf{e}_2 \int_a^c y(t) dt + \mathbf{e}_3 \int_a^c z(t) dt + \mathbf{e}_1 \int_c^b x(t) dt + \mathbf{e}_2 \int_c^b y(t) dt + \mathbf{e}_3 \int_c^b z(t) dt \\ &= \int_a^c \mathbf{r}(t) dt + \int_c^b \mathbf{r}(t) dt. \end{aligned}$$

下面我们介绍有关向量函数的两个命题, 这两个命题在以后要用到.

我们在这里假定所给出的向量函数具有所需要的各阶连续微商.

**命题 6** 向量函数  $\mathbf{r}(t)$  具有固定模的充要条件是对于  $t$  的每一个值,  $\mathbf{r}'(t)$  都与  $\mathbf{r}(t)$  垂直.

**证明** 由所给条件  $|\mathbf{r}(t)| = \text{常数}$ , 有

$$\mathbf{r}^2(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = \text{常数}.$$

上式对  $t$  求微分得

$$2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0,$$

由此得到

$$\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{r}'(t).$$

反之, 如果  $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ , 则有

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}^2(t) = 0.$$

因而得到

$$\mathbf{r}^2(t) = \text{常数},$$

即

$$|\mathbf{r}(t)| = \text{常数}.$$

特别地, 对于可微的单位向量函数  $\mathbf{r}(t)$  (即  $|\mathbf{r}(t)| = 1$ ), 有  $\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{r}'(t)$ .

为了介绍以下命题, 我们先引入关于向量函数  $\mathbf{r}(t)$  对于变量  $t$  的旋转速度的概念.

对于  $t$  的不同的值, 这个旋转速度一般来说具有不同的值.

我们给出以下定义: 给  $t$  以增量  $\Delta t$ , 用  $\Delta\varphi$  表示由向量  $\mathbf{r}(t)$  和  $\mathbf{r}(t+\Delta t)$  所组成的角 (如图 1-1), 作成比值  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ . 当  $\Delta t$  趋于零时,  $\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right|$  的极限就叫做向量函数  $\mathbf{r}(t)$  关于变量  $t$  的旋转速度.

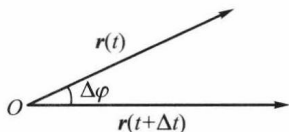


图 1-1

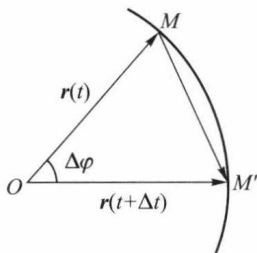


图 1-2

**命题 7** 单位向量函数  $\mathbf{r}(t)$  (即  $|\mathbf{r}(t)| = 1$ ) 关于  $t$  的旋转速度等于其微商的模  $|\mathbf{r}'(t)|$ .

**证明** 把  $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t+\Delta t)$  移动到同一个始点  $O$  (如图 1-2), 以  $O$  为圆心画单位圆, 它通过  $\mathbf{r}(t)$  和  $\mathbf{r}(t+\Delta t)$  的终点  $M, M'$ , 则两个向量的夹角大小等于  $\widehat{MM'}$  的长度. 于是有

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \frac{\widehat{MM'}}{|\Delta t|} = \frac{|\overrightarrow{MM'}|}{|\Delta t|} \cdot \frac{\widehat{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|},$$

因为

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{MM'},$$

所以有

$$|\overrightarrow{MM'}| = |\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)|,$$

于是

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right| \cdot \frac{\widehat{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}.$$

由于当  $\Delta t$  趋于零时有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{2\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} = 1.$$

因此

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right| \cdot \frac{\widehat{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|} = |\mathbf{r}'(t)|.$$