普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微分几何

第五版

梅向明　黄敬之　编

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微分几何

第五版

梅向明　黄敬之　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，在第四版的基础上修订而成。这次再版主要修改了第四章 §4 中"完备曲面的比较定理"的证明，使读者进一步学习近代比较黎曼几何时，有较好的分析准备和直观的几何背景；补充了数学史料、拓展阅读类数字资源，以二维码或图标示意。

本书可供高等师范院校数学院系用作教材。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/梅向明，黄敬之编．--5 版．--北京：高等教育出版社，2019.7

ISBN 978-7-04-050741-6

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①梅…　②黄…　Ⅲ．①微分几何-高等学校-教材　Ⅳ．①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 239645 号

项目策划　李艳馥　兰莹莹　李　蕊
策划编辑　兰莹莹　责任编辑　田　玲　封面设计　王凌波　版式设计　徐艳妮
插图绘制　于　博　责任校对　窦丽娜　责任印制　尤　静

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120
印　　刷　北京明月印务有限责任公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　15
字　　数　310 千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.hepmall.com.cn
　　　　　http://www.hepmall.com
　　　　　http://www.hepmall.cn
版　　次　1981 年 7 月第 1 版
　　　　　2019 年 7 月第 5 版
印　　次　2019 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　30.00 元

物 料 号　50741-00

微分几何

第五版

梅向明　黄敬之　编

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1222725，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

微分几何简史

第一版前言

http://abook.hep.com.cn/1222725

第五版前言

在这一版中，我们把“完备曲面的比较定理”的证明作了修改，使得这个证明更简单、直观。这个比较定理是近代黎曼几何中的托波诺夫(Toponogov)定理的二维阐述，掌握它对于理解托波诺夫定理非常重要，为进一步掌握近代比较黎曼几何奠定基础。同时，二维情形又是高维情形的非常好的模型，希望读者们能对这部分内容感兴趣。

梅向明

2019年春节于北京

第四版前言

第三版前言

第二版前言

第一版前言

郑重声明

目 录

第一章
曲 线 论

§1 向 量 函 数

在本书的学习中,要广泛地应用向量分析的知识,因此在这里对向量分析的基本内容作简单扼要的介绍.

首先介绍向量函数的概念.

给出一点集 G,如果对于 G 中每一个点 x,有一个确定的向量 $\boldsymbol{r}$ 和它对应,则我们说,在 G 上给定了一个向量函数,记作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x), \quad x \in G.$$

例如,设 G 是实数轴上一区间 $[t_0,t_1]$,则得一元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

设 G 是平面上一区域,$(u,v)\in G$,则得二元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v).$$

设 G 是空间中一区域,$(x,y,z)\in G$,则得三元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y,z).$$

正如数学分析中对实函数所讨论的那样,我们也对向量函数引进极限、连续、微商和积分等概念.

1.1 向量函数的极限

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是所给的一元向量函数,$\boldsymbol{a}$ 是常向量(即长度与方向都固定的向量),如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在数 $\delta>0$,使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$$

成立,则我们说,当 $t\to t_0$ 时,向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 趋于极限 $\boldsymbol{a}$.记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

有关数量函数的极限性质,都可以推广到向量函数的情况,从而得到类似的命题.

命题 1 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 是两个一元向量函数,$\lambda(t)$ 是一个实函数,并且当 $t\to t_0$ 时这些函数的值趋向极限:

$$\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{b}, \quad \lambda(t)\to m,$$

即 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$, $|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|\to 0$, $|\lambda(t)-m|\to 0$,则有

(1) 两个向量函数之和(差)的极限等于极限之和(差):

$$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}.$$

(2) 乘积 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$(数量乘向量)的极限等于极限的乘积:

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\longrightarrow m\boldsymbol{a}.$$

(3) 数量积 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$ 的极限等于极限的数量积:

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

(4) 向量积 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$ 的极限等于极限的向量积:

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

证明　这些命题的证明原则上和数学分析中关于实函数所对应的命题的证明没有什么区别.

(1)
$$\begin{aligned}|[\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)]-(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})|&=|[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}]\pm[\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}]|\\&\leqslant|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|,\end{aligned}$$

当 $t\to t_0$ 时,由已知条件 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to0$, $|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|\to0$,有

$$|[\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)]-(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})|\longrightarrow0,$$

即

$$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}.$$

(2) 作出向量的差

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}=\lambda(t)[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}]+[\lambda(t)-m]\boldsymbol{a},$$

由此得出

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}|\leqslant|\lambda(t)||\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|+|\lambda(t)-m||\boldsymbol{a}|,$$

当 $t\to t_0$ 时,由已知条件 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to0$, $|\lambda(t)-m|\to0$ 及

$$|\lambda(t)|\to|m|,\ |\boldsymbol{a}|\text{是常数},$$

有

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}|\to0,$$

即

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\longrightarrow m\boldsymbol{a}.$$

(3) 作出数量差

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{s}(t)+[\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{a},$$

由此得出

$$|\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{s}(t)|+|[\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{a}|.\tag{1.2}$$

因为任何两个向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 的数量积 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos(\widehat{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}})$,所以

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}|\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|.$$

因此,如果 $\boldsymbol{p}$ 趋于零(即 $|\boldsymbol{p}|\to0$),而 $\boldsymbol{q}$ 趋于确定的极限 $\boldsymbol{q}_0$(此时有 $|\boldsymbol{q}|\to|\boldsymbol{q}_0|$),那么不等式的右边趋向于零.这时有

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}|\longrightarrow0.$$

因而当 $t\to t_0$ 时,我们由已知条件

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\longrightarrow0,\quad|\boldsymbol{s}(t)|\longrightarrow|\boldsymbol{b}|,$$

知不等式(1.2)右边第一项有

$$|[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{s}(t)|\longrightarrow0,$$

同理

$$|[\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{a}|\longrightarrow 0.$$

于是得到

$$|\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\longrightarrow 0,$$

即

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

(4) 作出向量的差

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}],$$

由此得出

$$|\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leqslant|[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{s}(t)|+|\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}]|. \quad (1.3)$$

因为两个向量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的向量积的模 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cdot|\sin(\widehat{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}})|$,所以 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|$.因此,如果 $|\boldsymbol{p}|\to 0$,而 $|\boldsymbol{q}|$ 趋于确定的极限,则 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|\to 0$.

把这个结论应用到不等式(1.3)的右边,便有当 $t\to t_0$ 时,由已知条件可得到

$$|\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\to 0,$$

即

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

1.2 向量函数的连续性

有了向量函数的极限概念,我们就可以引进向量函数的连续性概念.给出一元向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$,当 $t\to t_0$ 时,若向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{r}(t_0)$,则称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点是**连续的**.

利用极限的定义,向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 连续的定义可表示为

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0).$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 的每一点都连续,则称 $\boldsymbol{r}(t)$ **在区间** $[t_1,t_2]$ **上是连续**①**的**.

利用命题 1 的结果,我们可以得到:

命题 2 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 是在点 t_0 连续的向量函数,而 $\lambda(t)$ 是在点 t_0 连续的实函数,则向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)$,$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$,$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$ 和实函数 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$ 也都在点 t_0 连续(把命题中的点 t_0 改为区间 $[t_1,t_2]$ 时,命题也成立).

1.3 向量函数的微商

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是定义在区间 $[t_1,t_2]$ 上的一个向量函数.设 $t_0\in(t_1,t_2)$,如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在,则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点是可微分的,这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点的**微商**(**或导矢**),用 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}$ 或 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 表示,即

① 在端点 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 处指的是右连续和左连续.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}=\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在某个开区间的每一点都有微商存在，则我们说 $\boldsymbol{r}(t)$ 在**此区间内是可微的**或简称**向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是可微的**，它的微商记为 $\boldsymbol{r}'(t)$.

对于向量函数的微分法有以下命题：

命题 3　设 $\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{u}(t)$ 分别是可微的向量函数，$\lambda(t)$ 是可微的实函数，则 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t),(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{u}(t))$ 都是可微的，并且

$$(\lambda\boldsymbol{r})'=\lambda\boldsymbol{r}'+\lambda'\boldsymbol{r},$$
$$(\boldsymbol{r}\pm\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\pm\boldsymbol{s}',$$
$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}',$$
$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}',$$
$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}').$$

这些公式的证明和数学分析中实函数的对应公式的证明相似，但是应该注意的是向量的向量积和混合积跟向量的次序有关，不能把次序任意交换. 作为例子，我们证明后面三个结果.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]\times\boldsymbol{s}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{r}(t)\times[\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)]}{\Delta t}\right\}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\times\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{s}(t+\Delta t)+\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}(t)\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}\\&=\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}'(t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]\cdot\boldsymbol{s}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{r}(t)\cdot[\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)]}{\Delta t}\right\}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{s}(t+\Delta t)+\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}\\&=\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}'(t).\end{aligned}$$

由上面的结果可以得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'&=[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}]'\\&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'\\&=(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}')\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'\\&=(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}')\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'\\&=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}').\end{aligned}$$

向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的微商 $\boldsymbol{r}'(t)$ 仍为 t 的一个向量函数，如果函数 $\boldsymbol{r}'(t)$ 也是连续的和可微的，则 $\boldsymbol{r}'(t)$ 的微商 $\boldsymbol{r}''(t)$ 称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的**二阶微商**. 类似地可以定义三阶、四阶等的微商. 在区间 $[t_1,t_2]$ 上有直到 k 阶连续微商的函数称为这区间上的 k **次可微函数**或 C^k **类**

函数,连续函数也称为 C^0 类函数,无限可微的函数记为 C^∞ 类函数,解析函数记为 C^ω 类函数.

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是笛卡儿直角坐标系的三个基向量,向量函数$\boldsymbol{r}(t)$可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3,$$

所以每一个向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 与三个有序实函数组$\{x(t),y(t),z(t)\}$一一对应.

命题 4 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在$[t_1,t_2]$上是 C^k 类函数,则向量函数所对应的三个实函数 $x(t),y(t),z(t)$ 在$[t_1,t_2]$上是 C^k 类函数.

证明 将 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$ 两边点乘 $\boldsymbol{e}_1$ 得

$$x(t)=\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{e}_1.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 是常向量,而 $\boldsymbol{r}(t)$ 是 C^k 类函数,所以 $x(t)$ 是 C^k 类函数.

同理可证 $y(t),z(t)$ 是 C^k 类函数.

1.4 向量函数的泰勒(Taylor)公式

定理 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在$[t_0,t_0+\Delta t]$上是 C^{n+1}类函数,则有泰勒展开式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=&\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+\\&\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)],\end{aligned}$$

其中 $\Delta t\to 0$ 时,$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\to\boldsymbol{0}$.

证明 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3.$$

由已知条件在$[t_0,t_0+\Delta t]$上有 $\boldsymbol{r}(t)\in C^{n+1}$,所以在$[t_0,t_0+\Delta t]$上有 $x(t),y(t),z(t)\in C^{n+1}$.根据实函数的泰勒公式得知

$$\begin{aligned}x(t_0+\Delta t)=&x(t_0)+\Delta tx'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}x''(t_0)+\cdots+\\&\frac{(\Delta t)^n}{n!}x^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[x^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_1(t_0,\Delta t)],\\y(t_0+\Delta t)=&y(t_0)+\Delta ty'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}y''(t_0)+\cdots+\\&\frac{(\Delta t)^n}{n!}y^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[y^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_2(t_0,\Delta t)],\\z(t_0+\Delta t)=&z(t_0)+\Delta tz'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}z''(t_0)+\cdots+\\&\frac{(\Delta t)^n}{n!}z^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[z^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_3(t_0,\Delta t)].\end{aligned}$$

把上面三式分别乘 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 再相加,则得到所求的向量函数的泰勒公式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=&\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+\\&\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)].\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{r}(t)\in C^{\infty}$ 时,我们就可以把它展开成泰勒级数,即

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\cdots,$$

上述泰勒级数是收敛的.

1.5 向量函数的积分

向量函数的积分的定义和实函数的情形相同,即

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),$$

其中 $a=t_0,t_1,\cdots,t_{n-1},t_n=b$ 表示区间 $[a,b]$ 的分点,ξ_i 是区间 (t_{i-1},t_i) 中的任一点,当 $n\to\infty$ 时,$|t_i-t_{i-1}|\to 0$.

如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$ 是可积的,则有

$$\begin{aligned}\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t&=\int_a^b[x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3]\,\mathrm{d}t\\&=\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t.$$

由此可得出有关向量函数积分的命题:

命题 5 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$$

存在,并且

1° $a<c<b$ 时有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2° m 是常数时有

$$\int_a^b m\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t=m\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t.$$

3° 如果 $\boldsymbol{m}$ 是常向量,则有

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{m}\cdot\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{m}\times\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t.$$

4° $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t\right]=\boldsymbol{r}(x).$

证明 向量函数可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3. \tag{1.4}$$

根据命题 4 可知若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $[a,b]$ 上是连续函数(C^0 类函数),则 $x(t),y(t),z(t)$ 在 $[a,b]$ 上也是连续函数(C^0 类函数).

再由实函数的积分定理可知,在区间 $[a,b]$ 上连续的实函数在该区间上是可积的,

即积分

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t$$

存在,则由(1.4)式可知积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$$

存在且等于

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t.$$

以下我们只证明 1°,其余的结果请读者自己证明.

由于

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t,$$

当 $a<c<b$ 时,根据实函数的积分性质可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \boldsymbol{e}_1\left[\int_a^c x(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b x(t)\,\mathrm{d}t\right] + \boldsymbol{e}_2\left[\int_a^c y(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b y(t)\,\mathrm{d}t\right] + \boldsymbol{e}_3\left[\int_a^c z(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b z(t)\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \boldsymbol{e}_1\int_a^c x(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^c y(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^c z(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_1\int_c^b x(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_c^b y(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_c^b z(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^c \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

下面我们介绍有关向量函数的两个命题,这两个命题在以后要用到.

我们在这里假定所给出的向量函数具有所需要的各阶连续微商.

命题 6 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有固定模的充要条件是对于 t 的每一个值,$\boldsymbol{r}'(t)$ 都与 $\boldsymbol{r}(t)$ 垂直.

证明 由所给条件 $|\boldsymbol{r}(t)|=$ 常数,有

$$\boldsymbol{r}^2(t) = |\boldsymbol{r}(t)|^2 = \text{常数}.$$

上式对 t 求微分得

$$2\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t) = 0,$$

由此得到

$$\boldsymbol{r}(t) \perp \boldsymbol{r}'(t).$$

反之,如果 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^2(t) = 0.$$

因而得到

$$\boldsymbol{r}^2(t) = \text{常数},$$

即

$$|\boldsymbol{r}(t)| = \text{常数}.$$

特别地,对于可微的单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$(即 $|\boldsymbol{r}(t)|=1$),有 $\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{r}'(t)$.

为了介绍以下命题,我们先引入关于向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对于变量 t 的旋转速度的概念.

对于 t 的不同的值,这个旋转速度一般来说具有不同的值.

我们给出以下定义:给 t 以增量 Δt,用 $\Delta\varphi$ 表示由向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 所组成的角(如图 1-1),作成比值 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.当 Δt 趋于零时,$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$ 的极限就叫做向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 关于变量 t 的**旋转速度**.

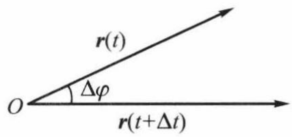

图 1-1

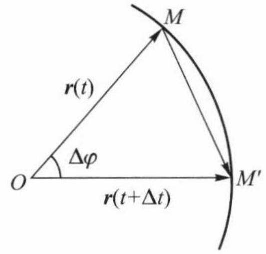

图 1-2

命题 7 单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$(即 $|\boldsymbol{r}(t)|=1$)关于 t 的旋转速度等于其微商的模 $|\boldsymbol{r}'(t)|$.

证明 把 $\boldsymbol{r}(t)$,$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 移动到同一个始点 O(如图 1-2),以 O 为圆心画单位圆,它通过 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 的终点 M、M',则两个向量的夹角大小等于 $\overset{\frown}{MM'}$ 的长度.于是有

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\Delta t|}=\frac{|\overrightarrow{MM'}|}{|\Delta t|}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|},$$

因为

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{MM'},$$

所以有

$$|\overrightarrow{MM'}|=|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|,$$

于是

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}.$$

由于当 Δt 趋于零时有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\varphi}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}=1.$$

因此

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}=|\boldsymbol{r}'(t)|.$$