应用技术型高等教育"十三五"精品规划教材

WEIJIFEN DAOXUE

微积分导学

主　编◎王海棠　马彦君
副主编◎李　丽　董爱君　于学光

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材

微积分导学

主编 王海棠 马彦君
副主编 李丽 董爱君 于学光

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内容提要

本书内容包括函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、无穷级数。

本书内容分按章节编写，与教材同步。每章开头是知识结构图、学习目标，每节包含知识点分析、典例解析、习题详解三个部分，最后配有单元练习题。本书融入了编者多年来的教学经验，汲取了众多参考书的优点，注重概括总结、循序渐进、重点突出，充分考虑到了学生的学习基础和学习能力，同时兼顾了教学要求。

本书是与中国水利水电出版社出版，曹海军主编的《经济数学—— 微积分》（第二版）相配套的学习指导书，主要面向使用该教材的教师和学生。同时本书可以单独使用，可作为其他经管类学生学习微积分的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分导学/王海棠，马彦君主编. —北京：中国水利水电出版社，2019.3

应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材

ISBN 978-7-5170-7424-3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①王… ②马… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 029351 号

书　　名	应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材 **微积分导学 WEIJIFEN DAOXUE**
作　　者	主　编　王海棠　马彦君
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京智博尚书文化传媒有限公司
印　　刷	三河市龙大印装有限公司
规　　格	170mm×240mm　16 开本　18.25 印张　388 千字
版　　次	2019 年 3 月第 1 版　2019 年 3 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	49.00 元

前　言

微积分是高等教育中一门重要的基础课，是经济类、管理类各专业的必修课。与初等数学相比，微积分的理论更加抽象，推理更加严密，初学者往往感到难以理解，不能很好地把握和理解学习的重点，缺乏解题的思想和方法，无法灵活运用所学知识。基于这种现状，为了解决学生的学习困扰，帮助学生更好地学习微积分这门课程，提高学习效果和教学质量，我们编写了这本书。

本书是与中国水利水电出版社出版，曹海军主编的《经济数学——微积分》（第二版）相配套的学习指导书，内容按章节编排，与教材同步。书中每章前面是知识结构图、学习目标；每节包含知识点分析、典例解析、习题详解三个部分；最后配有单元练习题。

知识结构图：展示本章主要知识点及彼此间的内在联系。旨在让学生能更好地掌握学科基本知识结构，对各章节关系有整体的认识；

学习目标：明确每章具体的学习任务和学习要求，使学生能够知道重点和难点，有的放矢。使用的动词“掌握”“理解”“会”表示要求较高，“了解”表示要求相对较低；

知识点分析：梳理每节的知识点，简单明了，重点突出，对教材内容作了概括总结，并适当进行了知识的综合和延伸；

典例解析：精心选取典型例题，对思想和方法进行剖析、点拨，力求使学生在牢固掌握基础知识和技能的基础上，能够把握问题的实质和规律，做到举一反三，灵活运用。例题的选取具有代表性、示范性，注重分析和一题多解，注重数学与经济学相结合，注重对教材的内容作适当的扩展和延伸，为教师上习题课和学生自学提供了丰富的资料；

习题详解：对配套教材中的课后习题和每章的课后复习题作了详细分析和解答。旨在引导学生先独立思考，自己做题，然后通过对照习题详解，对问题有更正确、更透彻的理解；

单元练习题：每章后面配有单元练习 A 和 B，供学生学完一章后复习、总结、提高之用。题目主要考查本章必须掌握的知识点，并强调知识点的综合性，注重运用主要的解题思路、解题方法，学生可用来自测。

参加本书编写的有王海棠（第 6、8 章），马彦君（第 7 章），于学光（第 2、3 章），董爱君（第 4、5 章），李丽（第 1、9 章）。全书由王海棠和马彦君统稿。本书的编写参考和借鉴了许多国内外相关资料，得到了山东交通学院各级领导和同行的支持和帮助。另外，尹金生院长、黄玉娟院长和曹海军老师为本书提出了很多中肯的建议，中国水利水电出版社的相关人员为本书的

出版付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢！

本书汲取了多年来微积分教学改革和教学实践的成果，融入了编者多年来的教学经验，但由于编者水平有限，加之撰稿时间仓促，书中难免存在不足之处，敬请读者批评改正！

编　者

2018 年 12 月

目 录

第 1 章

函数与极限

知识结构图

- 函数
  - 常见类型 → 初等函数、分段函数、复合函数、常见经济函数
  - 几种特性 → 单调性、奇偶性、周期性、有界性
- 极限
  - 数列、函数极限 → 定义、性质
  - 极限存在的充要条件 →
    - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$
    - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$
  - 运算法则 → 极限的四则运算、复合函数的极限运算法则
  - 无穷小与无穷大
    - → 无穷小与无穷大的关系
    - → 无穷小量阶的比较
  - 极限准则 → 夹逼准则、单调有界准则
- 连续
  - 连续的定义 → $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
  - 连续的运算 → 四则运算、复合函数与反函数的连续性定理、初等函数的连续性定理
  - 闭区间上连续函数的性质 → 有界性定理、最值定理、介值定理
  - 间断点
    - → 第一类间断点 $f(x_0^-)$，$f(x_0^+)$ 都存在
      - → 可去间断断点 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$
      - → 跳跃间断 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$
    - → 第二类间断点 → 无穷间断点、振荡间断点

本章学习目标

- 理解函数的概念，会建立简单实际问题的函数关系式；
- 了解极限的概念，掌握简单的极限运算法则；
- 理解无穷小与无穷大的概念，掌握无穷小量的比较；
- 理解函数连续的概念，理解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大、最小值定理）.

1.1 函数

1.1.1 知识点分析

1. 集合的概念与运算、区间与邻域

2. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 若对于 D 中每个确定的变量 x 的取值，按照一定的法则 f，变量 y 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 x 叫作自变量，y 叫作因变量，D 叫作函数的定义域，全体函数值的集合 $R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

注 构成函数的两要素：定义域 D_f 及对应法则 f；从而当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，两个函数才相同.

例如，函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 表示不同的函数，因为定义域不相同，$g(x)$ 的定义域为 $x\neq 1$.

3. 函数的几种特性

(1) 单调性：设函数 $f(x)$ 在数集 I 上有定义，若对于 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加（或单调减少）的；单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，I 称为单调区间.

(2) 奇偶性：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$）恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

奇偶函数的运算性质：

① 奇函数的代数和仍为奇函数，偶函数的代数和仍为偶函数；

② 偶数个奇函数之积为偶函数，奇数个奇函数之积为奇函数；

③ 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

(3) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 T，使得对

$\forall x \in D$，有 $x+T \in D$，且恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

一般将 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期，但周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数.

(4) 有界性：设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，若存在正数 M，使得对 $\forall x \in X$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界；也就是说，若对于 $\forall M>0$，总存在 $x_1 \in X$，使得 $|f(x_1)|>M$，则 $f(x)$ 在 X 上无界.

4. 分段函数

在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同的式子来表示的函数，通常称为分段函数.

常见的分段函数：

(1) 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(2) 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

(3) 取整函数 $y=[x]$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分.

5. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，如果对于 R 中的每一个 y，D 中总有唯一的 x，使 $f(x)=y$，则在 R 上确定了以 y 为自变量，x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y \in R$，或称 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此函数 $y=f(x)$，$x \in D$ 的反函数通常表示为

$$y=f^{-1}(x),\ x \in R.$$

注 (1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合，而 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域.

(3) 单调函数 $y=f(x)$ 必存在单调的反函数 $y=f^{-1}(x)$，且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 具有相同的单调性.

6. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

f 与 φ 能构成复合函数 $f \circ \varphi$ 的条件是：$D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$.

7. 初等函数

(1) 基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

(2) 初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成，并且可以用一个式子表示的函数.

注 一般地，分段函数不是初等函数.

1.1.2 典例解析

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$； (2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{x+1}$.

解 (1) 要使函数有意义，需满足 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0.\end{cases}$ 解得

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<2n\pi+\pi,\ n\in Z.\end{cases}$$

则所求函数定义域为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

(2) 要使函数有意义，需满足 $\begin{cases}\left|\dfrac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1,\\ 1+x\neq 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ x\neq -1.\end{cases}$

则所求函数定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

点拨 求初等函数的定义域有下列原则：① 分母不能为零；② 偶次根式的被开方数须为非负数；③ 对数的真数须为正数；④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$. 求复合函数的定义域，通常将复合函数看成一系列的初等函数的复合，然后考查每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可以得到复合函数的定义域.

例 2 设 $f(e^x-1)=x^2+1$，求 $f(x)$.

解 变量代换法，令 $e^x-1=t$，则 $x=\ln(1+t)$，代入原式得，$f(t)=\ln^2(1+t)+1$，从而 $f(x)=\ln^2(1+x)+1$.

点拨 由函数概念的两要素可知，函数的表示法只与定义域和对应法则有关，而与用什么字母表示变量无关，这种特性被称为函数表示法的“无关特性”. 据此，求函数 $f(x)$ 表达式有两种方法：一种是拼凑法，将给出的表达式凑成对应符号 $f()$ 内的中间变量的表达式，然后用“无关特性”即可得出 $f(x)$ 的表达式；另一种是先作变量代换，再用“无关特性”可得出 $f(x)$ 的表达式.

例 3 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$，$g(x)=1-x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 代入法，由题意得，$f[g(x)]=\dfrac{1-g(x)}{1+g(x)}$，$g(x)\neq -1$，再将 $g(x)$ 代入得

$$f[g(x)]=\frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{x}{2-x}\ (x\neq 2),$$

同理，$g[f(x)]=1-f(x)=1-\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2x}{1+x}\ (x\neq -1)$.

点拨 复合函数求解的方法主要有两种：① 代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替，适用于初等函数的复合；② 分析法：抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，适用于初等函数与分段函数的复合或两个分段函数的复合.

例 4 求 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的反函数.

解 函数的定义域为 $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，值域为 $\left[0,\sqrt{3\pi}\right]$，由 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 解得 $x=\sin\dfrac{1}{4}(y^2-\pi)$，故反函数为 $y=\sin\dfrac{1}{4}(x^2-\pi)$，$x\in\left[0,\sqrt{3\pi}\right]$.

点拨 由函数 $y=f(x)$ 出发解出 x 的表达式，然后交换 x 与 y 的位置，即可求出反函数 $y=f^{-1}(x)$.

点拨 求分段函数的反函数，只要求出各区间段的反函数及定义域即可.

例 5 判定函数 $f(x)=\varphi(x)\left(\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$的奇偶性，其中 $\varphi(x)$ 为奇函数.

解 令 $F(x)=\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{1}{2}$，则 $F(-x)=\dfrac{1}{e^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{-e^x}{e^x-1}+\dfrac{1}{2}$，从而

$$F(x)+F(-x)=\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{-e^x}{e^x-1}+\frac{1}{2}=0,$$

所以 $F(x)$ 为奇函数，又 $\varphi(x)$ 为奇函数，故 $f(x)$ 为偶函数.

例 6 下列函数中非奇非偶的函数是（　　）.

A. $f(x)=3^x-3^{-x}$　　　　B. $f(x)=x(1-x)$

C. $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$　　　　D. $f(x)=x^2\cos x$

解 易验证 A 为奇函数，B 为非奇非偶函数，C 为奇函数，D 为偶函数.

点拨 判定函数奇偶性常用的方法：① 根据奇偶性的定义或者利用运算性质；② 证明 $f(x)+f(-x)=0$ 或者 $f(x)-f(-x)=0$.

例 7 设 $g(x)$ 是以正数 T 为周期的函数，证明 $g(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

证明 令 $G(x)=g(ax)$，则

$$G\left(x+\frac{T}{a}\right)=g\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=g(ax+T)=g(ax)=G(x),$$

故 $\frac{T}{a}$ 为 $g(ax)$ 的周期.

点拨 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明.

例 8 证明函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在其定义域内有界.

证明 $\forall x\in R$, $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2x}\right|=\frac{1}{2}$, 由有界性的定义可知，$f(x)$ 在其定义域内有界.

点拨 这是利用函数有界性的定义进行证明，对函数取绝对值，然后对不等式进行放缩处理；另外，后续章节还可以利用连续函数的性质和导数等证明函数有界性.

例 9 某商场以每件 a 元的价格出售某商品，若顾客一次购买 50 件以上，则超出 50 件的商品以每件 0.8a 元的优惠价出售. (1) 试将一次成交的销售收入 R 表示成销售量 x 的函数；(2) 若每件商品的进价为 b 元，试写出一次成交的销售利润 L 与销售量 x 之间的函数关系式.

解 (1) 由题意知，当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，售价为 a 元/件，故

$$R(x)=ax;$$

当 $x>50$ 时，50 件内售价为 a 元/件，其余 $x-50$ 件售价 0.8a 元/件，故

$$R(x)=50a+0.8a(x-50)=0.8ax+10a,$$

即
$$R(x)=\begin{cases}ax, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.8ax+10a, & x>50.\end{cases}$$

(2) 易知销售 x 件商品的成本为 bx 元，故

$$L(x)=R(x)-bx=\begin{cases}ax-bx, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.8ax-bx+10a, & x>50.\end{cases}$$

1.1.3 习题详解

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{\ln 3}{\sqrt{x^2-1}}$；　　(2) $y=\ln(x^2-3x+2)$；

(3) $y=\arcsin\sqrt{x^2-1}$；　　(4) $y=\ln(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$；

(5) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；　　(6) $y=\ln\sqrt[3]{x^2-4}+\tan x$.

解 (1) $|x|>1\Rightarrow(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；

(2) $x^2-3x+2>0\Rightarrow(x-1)(x-2)>0\Rightarrow(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$；