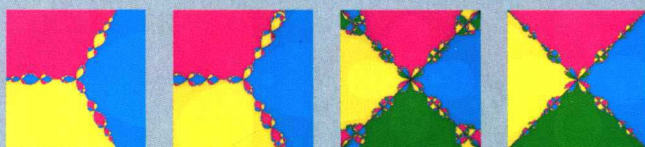


Research on Multipoint Iterative Methods for
Solving Nonlinear Equations

解非线性方程（组）的 多点迭代法研究

王晓锋 张盛 李静 翟军昌/著



科学出版社

解非线性方程（组）的多点 迭代法研究

王晓锋 张 盛 李 静 翟军昌 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书介绍解非线性方程(组)多点迭代法的构造方法,提出一些具有高计算效率和高计算精度的多点迭代法,并分析这些方法的计算效率、收敛性和稳定性。本书内容包括:解非线性方程的无记忆和有记忆牛顿型多点迭代法的研究;解非线性方程的无记忆和有记忆史蒂芬森型多点迭代法的研究;解非线性方程组的多点迭代法的研究。书中利用符号软件对部分解非线性方程的多点迭代法的收敛阶进行计算,给出了源程序。本书反映十几年来国际上多点迭代法研究方面取得的新进展和新成果。此外,本书利用分形图来判断多点迭代法的稳定性,这是本书的特色之处。

本书内容深入浅出,理论联系实际,可作为计算数学、应用数学等专业的本科生、研究生教材或参考书,也可供从事科学与工程计算应用与研究工作的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

解非线性方程(组)的多点迭代法研究/王晓锋等著. —北京:科学出版社, 2019.4

ISBN 978-7-03-060821-5

I. ①解… II. ①王… III. ①非线性方程-方程组-迭代法-解法-研究 IV. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 045423 号

责任编辑:姜 红 常友丽 / 责任校对:张小霞

责任印制:吴兆东 / 封面设计:无极书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 4 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2019 年 4 月第一次印刷 印张:12 3/4

字数:258 000

定价:99.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

多点迭代法是一类可用于非线性方程（组）求解的数值方法，其具有高计算精度和高收敛速度。与传统迭代法相比，在高精度计算中，多点迭代法可以显著节省计算时间和计算成本。1964 年，J. F. Traub 提出了多点迭代法的概念，并构造了一些多点迭代法，受当时实验条件的限制，多点迭代法的研究并没有得到学界足够的重视。近年来，计算机技术的发展推动了多点迭代法研究的发展，符号计算软件为设计具有高计算效率的多点迭代法提供了方便，涌现出了许多高效率的多点迭代法。同时，一些新的研究手段被应用到多点迭代法的研究当中。目前，国内没有关于解非线性方程（组）的多点迭代法的专著，因此有必要出版这样一本专著，将作者近年来的研究成果介绍给国内的科研工作者。

本书力求反映多点迭代法的最新研究成果，主要介绍用于求解非线性方程（组）的多点迭代法的常用方法，提出一些具有高收敛阶和高计算效率的多点迭代法，证明迭代法的局部收敛阶，比较迭代法的计算效率，并通过数值实验和绘制迭代法的分形图对迭代法的收敛性和稳定性进行比较。本书共 7 章：第 1 章介绍多点迭代法的研究概况；第 2 章介绍求解非线性方程的迭代法的基本概念；第 3 章介绍几种两点牛顿型迭代法；第 4 章介绍三点和 n 点牛顿型迭代法；第 5 章介绍三点史蒂芬森型迭代法；第 6 章介绍四点和 $n+1$ 点史蒂芬森型迭代法；第 7 章介绍用于求解非线性方程组的多点迭代法。

本书内容是作者近年来研究工作的总结，大部分内容在渤海大学计算数学专业研究生课程中讲授过。在本书撰写过程中，许多专家和学者提出了一些中肯的意见，为本书的顺利完成提供了保障，在此对他们表示感谢。此外，也向对本书的整理付出了辛勤劳动的张铁、王海龙、段淑元、王旭飞、王雨铮等老师和我的家人表示衷心的感谢。本书获得辽宁省自然科学基金项目“解非线性方程（组）的无记忆多点迭代法的稳定性及其应用研究”（项目编号：20180551262）的资助，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，希望使用本书的广大读者提出宝贵意见。

王晓锋

2018 年 8 月 8 日

目 录

前言

第 1 章 多点迭代法的研究概况	1
1.1 多点迭代法的研究背景和意义	1
1.2 多点迭代法的历史与发展	1
第 2 章 基本概念	5
2.1 多点迭代法的分类	5
2.2 迭代法的收敛阶	6
2.3 迭代法的计算效率	7
2.4 分形	8
第 3 章 两点牛顿型迭代法	12
3.1 单参数两点牛顿型迭代法	12
3.1.1 单参数无记忆两点牛顿型迭代法	12
3.1.2 单参数有记忆两点牛顿型迭代法	17
3.1.3 数值实验	29
3.2 双参数两点牛顿型迭代法	32
3.2.1 双参数无记忆两点牛顿型迭代法	33
3.2.2 双参数有记忆两点牛顿型迭代法	34
3.2.3 数值实验	40
3.3 两点牛顿型迭代法的动态行为分析	42
3.4 两点牛顿型迭代法的计算效率	48
第 4 章 三点和 n 点牛顿型迭代法	50
4.1 三点牛顿型迭代法	50
4.1.1 无记忆最优三点牛顿型迭代法	50
4.1.2 有记忆三点牛顿型迭代法	60
4.1.3 数值实验	64

4.2	n 点牛顿型迭代法	67
4.2.1	无记忆 n 点牛顿型迭代法	67
4.2.2	有记忆 n 点牛顿型迭代法	71
4.2.3	数值实验	78
4.3	三点牛顿型迭代法的动态行为分析	79
4.4	三点牛顿型迭代法的计算效率	85
第 5 章	三点史蒂芬森型迭代法	86
5.1	无记忆三点史蒂芬森型迭代法	86
5.1.1	最优三点史蒂芬森型迭代法 I	86
5.1.2	最优三点史蒂芬森型迭代法 II	88
5.1.3	最优三点史蒂芬森型迭代法 III	91
5.1.4	数值实验	93
5.2	有记忆三点史蒂芬森型迭代法	94
5.2.1	有记忆三点史蒂芬森型迭代法 I	94
5.2.2	有记忆三点史蒂芬森型迭代法 II	98
5.2.3	数值实验	105
5.3	三点史蒂芬森型迭代法的动态行为分析	106
5.4	三点史蒂芬森型迭代法的计算效率	111
第 6 章	四点和 $n+1$ 点史蒂芬森型迭代法	113
6.1	无记忆四点史蒂芬森型迭代法	113
6.1.1	无记忆四点史蒂芬森型迭代法 I	113
6.1.2	无记忆四点史蒂芬森型迭代法 II	115
6.1.3	无记忆四点史蒂芬森型迭代法 III	119
6.1.4	无记忆四点史蒂芬森型迭代法 IV	121
6.1.5	无记忆四点史蒂芬森型迭代法 V	125
6.1.6	数值实验	129
6.2	有记忆四点史蒂芬森型迭代法	134
6.2.1	单参数有记忆四点史蒂芬森型迭代法	134
6.2.2	数值实验	140
6.3	$n+1$ 点史蒂芬森型迭代法	141
6.3.1	无记忆 $n+1$ 点史蒂芬森型迭代法	142
6.3.2	有记忆 $n+1$ 点史蒂芬森型迭代法	148
6.3.3	数值实验	155

6.4	四点史蒂芬森型迭代法的动态行为分析	156
6.5	四点史蒂芬森型迭代法的计算效率	163
第 7 章	解非线性方程组的多点迭代法	164
7.1	解非线性方程组的牛顿型迭代法	165
7.1.1	迭代法的构造和收敛性分析	165
7.1.2	计算效率	169
7.1.3	数值实验	172
7.2	解非线性方程组的史蒂芬森型迭代法	175
7.2.1	迭代法的构造和收敛性分析	175
7.2.2	计算效率	180
7.2.3	数值实验	183
7.3	迭代法的动态行为分析	185
参考文献		189

第 1 章 多点迭代法的研究概况

1.1 多点迭代法的研究背景和意义

非线性科学是当今科学发展的一个重要研究方向, 非线性方程(组)求解问题在科学与工程计算中处于十分重要的地位, 已被广泛应用于气象预报、地震预测、油田勘测与开发技术、卫星轨道预测、工业产品设计、生态与环境的动态模拟等领域. 对于绝大多数非线性方程(组)来说, 利用基本的代数方法很难求出精确解. 在非线性方程(组)的精确解很难求得的情况下, 只能应用数值方法求出满足一定精度要求的近似解. 迭代法是用于非线性方程(组)求解的最常用的数值方法. 多点迭代法由于具有高计算精度和高收敛速度, 已经成为当前研究的热点. 另外, 当今科学研究的许多领域都要用到高精度计算, 这也促进了多点迭代法的发展. 在高精度计算中, 传统迭代法由于计算精度较低, 在计算过程中需要耗费大量的计算时间和计算成本. 相比之下, 多点迭代法可以显著地节省计算时间和计算成本, 提高计算效率. 可见, 研究多点迭代法具有十分重要的意义.

1.2 多点迭代法的历史与发展

考虑非线性方程

$$f(x) = 0 \quad (1.1)$$

式中, $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I 是开区间, f 为开区间 I 上充分光滑函数. 设 $a \in I$ 为方程 (1.1) 的单根, 且 $f'(a) \neq 0$.

构造迭代法的目标是: 在计算成本一定的前提下, 使迭代法具有尽可能高的收敛阶, 从而提高迭代法的计算效率. 最早的、最经典的迭代法是牛顿法 (Newton method)^[1], 又称为牛顿-拉弗森法 (Newton-Raphson method), 其迭代格式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.2)$$

牛顿法在实数域和复数域内都可用于求方程 (1.1) 的近似解. 当初始值 x_0 充分接近函数 $f(x)$ 的根 a 时, 牛顿法的收敛阶至少为 2. 因为牛顿法的收敛速度很快, 所以其在实际问题中得到了广泛的应用. 但牛顿法在使用时需要求导运算, 当函数求导困难时, 牛顿法将无法使用. 为了克服牛顿法的这个缺点, 史蒂芬森提出了著名的史蒂芬森法 (Steffensen method)^[2], 其迭代格式如下:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \quad (1.3)$$

该方法是利用 $[f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)] / f(x_n)$ 代替式 (1.2) 中 $f'(x_n)$ 得到的. 与牛顿法相比, 史蒂芬森法不要求导运算且其收敛阶为 2. 为了进一步提高迭代法的收敛阶, Traub^[3] 提出了一种收敛阶为 3 的迭代法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[1 + \frac{L_f(x_n)}{2} \right] \quad (1.4)$$

式中, $L_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$. Halley^[4] 也提出了一个收敛阶为 3 的迭代法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \quad (1.5)$$

式 (1.4) 和式 (1.5) 需要计算函数的 2 阶导数, 这在一定程度上限制了它们在实际中的应用. 这里, 式 (1.2)、式 (1.4) 和式 (1.5) 都属于单点迭代法, 单点迭代法的信息效率不超过 1.

1964 年, Traub^[3] 在其著作中提出了多点迭代法的概念, 并构造了一些具有较高收敛阶的多点迭代法, 分析了这些方法的局部收敛性, 这是最早的研究多点迭代法的学术著作. 多点迭代法是迭代格式中需要计算多个单变量的函数值和导数值的方法. 与单点迭代法相比, 多点迭代法 (也可称为多步迭代法) 的信息效率可以大于 1, 而且多点迭代法具有较高的收敛阶和计算精度. 因此, 构造具有较高收敛阶的多点迭代法具有重要意义. 从此, 多点迭代法引起了学者的浓厚兴趣和广泛关注. 例如, Potra 等^[5] 提出一种两点迭代法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(x_n - f(x_n)/f'(x_n))}{f'(x_n)} \quad (1.6)$$

Weerakoon 等^[6] 也提出了一种两点迭代法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_n - f(x_n)/f'(x_n))} \quad (1.7)$$

King^[7] 提出了一种 4 阶收敛的迭代法

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2)f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad (1.8)$$

式中, $\beta \in \mathbb{R}$. 当式 (1.8) 中参数 $\beta = 0$ 时, 式 (1.8) 就是著名的 Ostrowski 方法^[8].

Jarratt^[9] 也提出了一种收敛阶为 4 的迭代法

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2}{3} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \left[1 - \frac{3}{2} \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)} \right] \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad (1.9)$$

两点迭代法式(1.6)和式(1.7)的收敛阶都为3,与单点迭代法式(1.4)和式(1.5)具有相同的收敛阶和函数求值数,但两点迭代法式(1.6)和式(1.7)不需要计算2阶导数.两点迭代法式(1.8)和式(1.9)的收敛阶都为4,迭代格式中使用两个函数值和一个导数值.显然,迭代法式(1.8)和式(1.9)比迭代法式(1.4)~式(1.7)更有效率.1974年,Kung等^[10]给出了最优阶的定义,根据最优阶的定义可知,式(1.8)和式(1.9)是具有最优收敛阶的迭代法.由于具有最优阶的多点迭代法的计算效率很高,因此,构造具有最优阶的多点迭代法成为国内外学者研究的一个目标.虽然多点迭代法具有较高的收敛阶和计算精度,但是由于收敛阶的证明计算量很大,加之实践中对高精度算法的需求不高,因此,这一时期对多点迭代法的研究并没有引起学者的足够重视.

近年来,计算机技术的飞速发展多点迭代法的研究提供了技术上的支持,在数值实验中通过符号计算可以很容易验证多点迭代法的收敛阶和计算精度,许多高阶收敛的多点迭代法被相继提出.用来构造多点迭代法的常用的方法有:组合法^[11]、权函数法^[12]、插值法^[13]、反差值法^[14]、待定系数法^[15].其中,Han等^[11]利用组合法提出了一类收敛阶为 $m+2$ 的多点迭代法.权函数法是由Bi等^[12]在2009年提出的,该方法提供了一种构造多点迭代法的有效途径.此后,学者利用权函数法提出了大量的多点迭代法.例如,Petković等^[16]提出了一类具有最优阶为4的无导数迭代法.由于人工计算多点迭代法的收敛阶很烦琐,为了简化计算,2010年,Petković等在文献[17]中提出利用符号计算方法构造多点迭代法,并成功的证明了所得多点迭代法的收敛阶.从此,符号计算技术被广泛用于多点迭代法的构造中^[18-71].近年来,许多适用于求解非线性方程组的多点迭代法被相继提出.例如,Cordero等^[72,73]提出了几种具有高计算效率的多点迭代法;Hueso等^[74]提出的多点迭代法不需要计算2阶导数;Grau-Sánchez等^[75,76]提出了几种高效的多点迭代法,并设计了一种新的效率指数,该效率指数被广泛用于比较多点迭代法的计算效率^[77-80].为了进一步提高解非线性方程组的多点迭代法的计算效率,学者通过研究减少数值计算中矩阵的杜利特尔(Doolittle)分解次数^[81-89]或是增加迭代法的迭代步骤^[89-95],提出了有许多具有高计算效率的多点迭代法.

为了进一步提高解非线性方程(组)的多点迭代法的收敛阶和计算效率,国内外的学者逐渐将研究重点转移到有记忆多点迭代法的研究中,并做了许多有意义的工作,例如,Petković等^[96]利用加速参数法提出一些无导数的有记忆的多点

迭代法,在不增加计算成本的前提下,实现了迭代法的加速;Wang 等^[97]提出了一种 n 点有记忆多点迭代法,该方法进一步提高了 n 点有记忆多点迭代法的收敛阶和计算效率,许多知名的多点迭代法都可作为该迭代法的特例;文献[98]~文献[107]提出了一些具有高计算效率的有记忆迭代法.

在多点迭代法的收敛性和稳定性的研究方面也产生了许多研究成果.关于收敛性方面的研究主要集中在判断迭代法的局部收敛性以及半局部收敛性上,其中 Argyros 等^[108-110]在研究多点迭代法的收敛性方面做了一些具有代表性的研究工作,文献[111]~文献[115]在多点迭代法的收敛性方面也做了大量的研究.为了更直观的判断多点迭代法稳定性,学者尝试使用动力系统理论来研究无记忆多点迭代法,取得了一些初步的结果,例如,Chicharro 等^[116]在复空间上利用参数平面研究了临界点对一类无导数多点迭代法的稳定性的影响;Cordero 等^[117,118]通过研究迭代函数的不动点及临界点对无记忆多点迭代法稳定性的影响,找到了使这种迭代法具有较好稳定性的参数;Neta 等^[119,120]提出了几种有记忆多点迭代法,在复空间上利用分形图展示了迭代映射轨道行为的复杂性,对有记忆多点迭代法的稳定性进行了初步的研究.关于多点迭代法稳定性研究的一些最新成果可参见文献[121]~文献[125].当前,应用离散动力系统理论来研究有记忆多点迭代法的稳定性的工作还不多见,这将是未来几年的研究发展趋势.

第2章 基本概念

2.1 多点迭代法的分类

对于单变量非线性方程 (1.1), 可以将它改写成等价形式

$$x = \varphi(x) \quad (2.1)$$

若 a 满足 $a = \varphi(a)$, 则称 a 为方程 (1.1) 的一个根. 根据式 (2.1) 可构造迭代法

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

式中, φ 为迭代函数. 若给定初始近似值 x_0 , 由式 (2.2) 逐次迭代得到序列 $\{x_n\}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则由式 (2.2) 两端取极限, 得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \varphi(a)$$

即 a 为方程的根.

根据迭代法的不同表示形式, 可以对迭代法进行分类^[95].

(1) 无记忆单点迭代法.

若迭代法可由式 (2.2) 表示, 即由迭代函数 φ 在近似值 x_n 处的函数值得到近似值 x_{n+1} , 则称式 (2.2) 为无记忆单点迭代法. 无记忆单点迭代法是最简单的迭代法. 式 (1.2)、式 (1.4) 和式 (1.5) 都是单点迭代法.

(2) 有记忆单点迭代法.

若迭代法可表示为

$$x_{n+1} = \varphi(x_n; x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad (2.3)$$

式中, $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ 为方程 (1.1) 根 a 的近似值, 则称式 (2.3) 为有记忆单点迭代法. 式 (2.3) 利用近似值 x_n 和前 k 步迭代获得的近似值 $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ 得到近似值 x_{n+1} . 著名的割线法就是有记忆单点迭代法. 割线法可表示为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

(3) 无记忆多点迭代法.

若迭代法可表示为

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, w_1(x_n), \dots, w_k(x_n)) \quad (2.5)$$

式中, $w_i(x_n)$ ($i=1, 2, \dots, k$) 为函数 $w_i(x)$ 在近似值 x_n 处的函数值, 则称式 (2.5) 为无记忆多点迭代法. 无记忆多点迭代法使用了近似值 x_n 和 k 个中间值 w_i ($i=1, 2, \dots, k$) 得到近似值 x_{n+1} . 式 (1.6) ~ 式 (1.9) 属于无记忆两点迭代法.

(4) 有记忆多点迭代法.

若迭代法可表示为

$$x_{n+1} = \varphi(z_n; z_{n-1}, \dots, z_{n-k}) \quad (2.6)$$

式中, z_j 由 $k+1$ 个量 $x_j, w_1(x_j), \dots, w_k(x_j)$ ($k \geq 1$) 计算得到, 则称式 (2.6) 为有记忆多点迭代法. 本书的研究重点是形如式 (2.5) 和式 (2.6) 的多点迭代法.

2.2 迭代法的收敛阶

定义 2.1^[1] 设迭代法式 (2.2) 产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于方程 $x = \varphi(x)$ 的根 a , 记误差 $e_n = x_n - a$, 若存在实数 $r \geq 1$ 和非零常数 $b > 0$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = b \quad (2.7)$$

则称迭代法式 (2.2) 是 r 阶收敛的, b 称为收敛因子或渐近误差常量. 在实际计算中, 定义 2.1 常被用来判断迭代法的收敛阶.

定理 2.1^[3] 设 a 是函数 $f(x)$ 的单根并且迭代函数 φ 是 r 阶收敛的, 则由迭代函数

$$\chi(x) = \varphi(x) - \frac{f(\varphi(x))}{f'(x)} \quad (2.8)$$

定义的迭代法 $x_{n+1} = \chi(x_n)$ 的收敛阶为 $r+1$.

定理 2.2^[3] 设迭代函数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ 的收敛阶数分别为 $r_1, r_2, \dots, r_s$, 则由迭代函数

$$\chi(x) = \varphi_1(\varphi_2(\dots(\varphi_s(x))\dots)) \quad (2.9)$$

定义的迭代法的收敛阶为 $r_1 r_2 \dots r_s$.

定义 2.2^[6] 迭代法的计算收敛阶 (computational order of convergence, COC) 定义为

$$r_c = \frac{\ln(|x_{n+1} - a| / |x_n - a|)}{\ln(|x_n - a| / |x_{n-1} - a|)} \quad (2.10)$$

式中, a 为方程 (1.1) 的根; x_{n+1}, x_n, x_{n-1} 为式 (2.2) 所产生的根 a 的近似值. 由于函数的根 a 是未知的, 在实际计算中常用近似计算收敛阶来计算迭代法的收敛阶.

定义 2.3^[20] 迭代法的近似计算收敛阶 (approximated computational order of convergence, ACOC) 用 ρ 来表示, 即

$$\rho = \frac{\ln(|x_{k+1} - x_k| / |x_k - x_{k-1}|)}{\ln(|x_k - x_{k-1}| / |x_{k-1} - x_{k-2}|)} \quad (2.11)$$

定理 2.3^[99] 设有记忆迭代法产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于方程 (1.1) 的根 a , 若存在非零常数 η 和非负数 t_i , $0 \leq i \leq m$, 使不等式

$$|e_{n+1}| \leq \eta \prod_{i=0}^m |e_{n-i}|^{t_i}$$

成立, 则有记忆迭代法的收敛阶 O_R 满足不等式

$$O_R \geq s^*$$

式中, s^* 为方程

$$s^{m+1} - \sum_{i=0}^m t_i s^{m-i} = 0 \quad (2.12)$$

的唯一正根.

2.3 迭代法的计算效率

在实践中, 对迭代法的特点进行研究是很重要的, 这些特点包括计算效率、收敛速度、运行时间和算法占用的存储空间等. 根据迭代法的这些特点可以判断迭代法的优劣. 计算效率常被用来衡量迭代法的优劣. 计算效率通常根据迭代法的收敛阶和迭代法的计算成本来定义. 迭代法的计算效率与迭代法的收敛阶成正比, 与迭代法的计算成本成反比. 判断迭代法的计算效率的方法有很多, Traub^[3] 提出了信息效率这个概念, 其定义如下.

定义 2.4^[3] 迭代法的信息效率 (informational efficiency, IE) 定义为

$$IE = \frac{r}{c} \quad (2.13)$$

式中, r 为迭代法的收敛阶; c 为每次迭代中需要计算的函数值和导数值的总个数. 本书称 c 为计算成本.

定理 2.4^[3] 假设单点迭代法式 (2.2) 收敛阶为 r , 每步迭代要计算的函数值个数为 c , 则对任意一个 r 总存在一个单点迭代函数 φ 具有的信息效率为 $IE = r/c_\varphi = 1$, 并且对于所有的单点迭代函数 φ , 关系式 $IE = r/c_\varphi \leq 1$ 成立. 这里的迭代函数 φ 由函数 f 及其前 $r-1$ 阶导数来构造.

定理 2.4 说明单点迭代法的信息效率不可能超过 1. 若要使迭代法的信息效率超过 1, 可通过构造多点迭代法来实现.

使用与信息效率相同的数据信息, Ostrowski^[8] 将效能指数 (efficiency index) E 用于判断迭代法的计算效率, 效能指数定义如下.

定义 2.5^[8] 迭代法的效能指数 E 的定义为

$$E = r^{1/c} \quad (2.14)$$

式中, r 为迭代法的收敛阶; c 为迭代法的计算成本(为每次迭代过程中需要计算的函数值和导数值的总个数). 本书中将使用效能指数来衡量迭代法的计算效率. 对于迭代法的收敛阶和计算成本之间的关系, Kung^[10]提出了下述基本定义.

定义 2.6^[10] 若无记忆多点迭代法在每次迭代过程中需要计算的函数值和导数值的总个数为 c , 则该迭代法的最高收敛阶为 2^{c-1} , 该收敛阶为无记忆迭代法的最优收敛阶, 简称最优阶.

本书称具有最优阶的迭代法为最优迭代法, 其具有的计算效率为最优效率. 对于无记忆迭代法, 具有最优阶的多点迭代法的信息效率要高于非最优多点迭代法.

2.4 分形

对多点迭代法的动态行为的研究可以进一步了解多点迭代法的稳定性、可靠性等数值特征. 本书通过绘制迭代法的分形图来分析多点迭代法的收敛性和稳定性. 下面给出分形理论的一些基本概念.

分形在英文中为 fractal, 起源于拉丁文的 fractus, 是由数学家 Mandelbrot^[126]提出的. 分形的意思即不规则的、支离破碎的、分数的. Mandelbrot 是想用此词来描述自然界中传统欧氏几何学所不能描述的一大类复杂无规则的几何对象, 这些几何对象的特点就是极不规则或极不光滑. 1990 年, 英国数学家 Falconer^[127]在 *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* 书中给分形作了如下定义.

定义 2.7^[127] 称集合 F 是分形, 如果它具有如下的一些特征:

- (1) F 具有精细的结构, 即在任意小的尺度下, 它总是具有复杂的细节.
- (2) F 是如此的不规则, 它的整体与局部都不能用传统的集合语言来描述.
- (3) F 通常有某种自相似性, 可能是近似的或是统计的.
- (4) 一般地说, F 的分形维数(以某种方式定义)大于它的拓扑维数.
- (5) 在大多数令人感兴趣的情况下, F 以非常简单的方法定义, 可以由迭代产生.

定义 2.8^[127] 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集(通常就是 $\mathbb{R}^n$ 本身), 并且设 $M: D \rightarrow D$ 是一个连续映射, 则 M^k 表示 M 的 k 次迭代. 称 D 的子集 S 为 M 的吸引子, 如果 S 是一个闭集, 并且在 M 的作用下是不变的(即 $M(S) = S$), 使得对于包含 S 的一个开集 $V \subset D$ 中的所有点 z , $M^k(z)$ 到 S 的距离随 k 趋于无穷大而趋于零. 集合 V 称为 S 的吸引域.

类似的, 对于一个闭子集 F , 如果 F 附近(但不在 F 中)的所有点经过迭代后远离 F , 那么 F 称为斥子.

令 $M: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为复系数的阶 $n \geq 2$ 的多项式 $M(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. 记 M^k 为函数 M 的 k 重复合 $M \cdots M$, 所以 $M^k(w)$ 为 w 的第 k 次迭代 $M(M(\cdots(M(w))))$. 如果 $M(w) = w$, 则称 w 是 M 的不动点. 如果存在某个大于或等于 1 的整数 p , 使 $M^p(w) = w$, 则称 w 是 M 的周期点, 使 $M^p(w) = w$ 的最小 p 称为 w 的周期. 称 $w, M(w), \cdots, M^p(w)$ 为周期 p 的轨道. 设 w 是周期为 p 的周期点, 且复变微商 $(M^p)'(w) = \lambda$. 如果 $\lambda = 0$, 称点 w 为超吸引的; 如果 $0 < |\lambda| < 1$, 称点 w 为吸引的; 如果 $|\lambda| = 1$, 称点 w 为中性的; 如果 $|\lambda| > 1$, 称点 w 为斥性的.

定义 2.9^[127] M 的 Julia 集 $J(M)$ 可以定义为 M 的斥性周期点集的闭包 [当函数很明确时, 用 J 代替 $J(M)$], Julia 集的余集称为 Fatou 集或稳定集, 记为 $F(M)$.

定义 2.10^[128] 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是复系数多项式, 定义有理函数 $M: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

$$M(z) = z - f(z) / f'(z) \quad (2.15)$$

称 $M(z)$ 为相对于函数 $f(z)$ 的牛顿变换.

设映射 M 由式 (2.15) 定义, 与实数系数的情形类似, 如果 $f'(z^*) \neq 0$, 则 z^* 是方程 $f(z) = 0$ 的根的充分必要条件是 $M(z^*) = z^*$, 即 z^* 是相应的牛顿变换函数的不动点.

记 $A(z^*) = \{z: M^n(z) \rightarrow z^* (n \rightarrow \infty)\}$ 表示 $f(z)$ 的零点 z^* 的吸引域, 即在牛顿变换迭代之下收敛于 z^* 的点集. 因为 z^* 是 M 的超吸引不动点, 所以吸引域 $A(z^*)$ 是包含 z^* 的开区域.

定义 2.8 和定义 2.9 中的映射 M 在定义 2.10 中被称为牛顿变换. 由定义 2.10 可知, 牛顿变换实际上就是牛顿法的迭代函数. 与牛顿法类似, 复平面上史蒂芬森法的迭代函数与映射 M 之间的关系可表示为

$$M(z) = z - \frac{f(z)^2}{f[z + f(z)] - f(z)} \quad (2.16)$$

同理, 多点迭代法的迭代函数也可用来表示映射 M .

本书将绘制多点迭代法关于函数 $f(z) = z^k - 1$ ($k = 2, 3, 4$) 零点 z^* 在复平面内的分形图, 以此来研究迭代法的数值行为. 本书绘制的分形图采用的规则为: 迭代初始值 z_0 在区域 $D = [-3.0, 3.0] \times [-3.0, 3.0] \subset \mathbb{C}$ 内选取, 将区域 D 分割为 300×300 个网格点, 每个网格点作为一个初始值 z_0 . 计算的停机准则为 $|z_k - z^*| < 10^{-5}$, 并且最大迭代次数不超过 25 次. 在满足停机条件下, 若由 z_0 作为初始值所产生的迭代序列 $\{z_k\}$ 收敛于零点 z^* , 则认为 z_0 在零点 z^* 的吸引域内, 并将该点绘制为灰白色. 在同一吸引域内迭代次数越少分形图的颜色越亮. 在停机条件下, 若迭代序列 $\{z_k\}$ 不收敛于零点或是发散的, 则将初始点绘制为黑色.

为了与后面章节中的多点迭代法的分形图进行比较, 本节绘制了牛顿法和史

蒂芬森法的分形图. 由图 2.1~图 2.3 可知, 在本章设置的实验条件下, 牛顿法的收敛性和稳定性都优于史蒂芬森法.

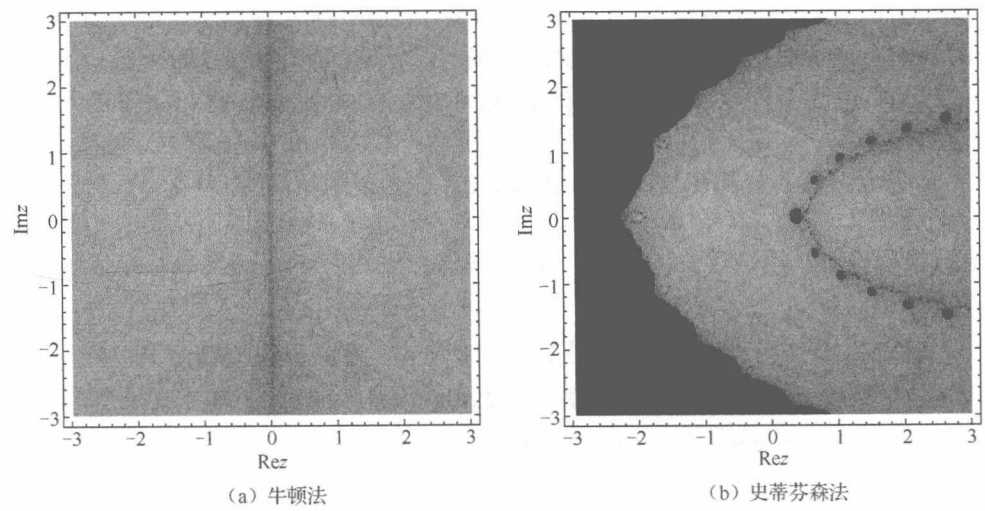


图 2.1 关于复多项式 $z^2 - 1$ 的分形结果

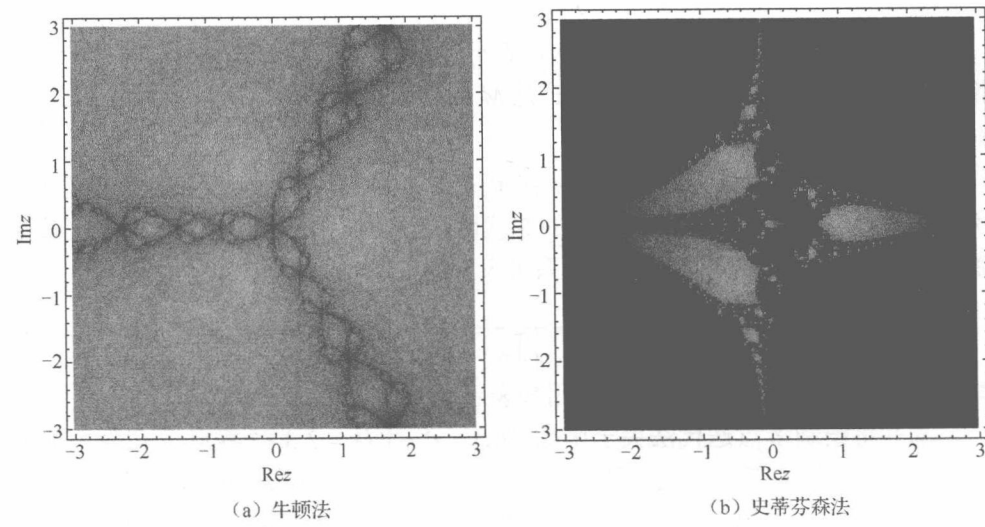


图 2.2 关于复多项式 $z^3 - 1$ 的分形结果