SSMPF

现代数学丛书 4
Series in Contemporary Mathematics

高维定常可压缩Navier-Stokes方程的适定性理论

江松 江飞 周春晖 / 著

Well-Posedness of the Multi-Dimensional Steady Compressible Navier-Stokes Equations

上海科学技术出版社
Shanghai Scientific & Technical Publishers

现代数学丛书

高维定常可压缩Navier-Stokes方程的适定性理论

江松　江飞　周春晖　著

上海科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高维定常可压缩Navier-Stokes方程的适定性理论 /江松, 江飞, 周春晖著. –上海: 上海科学技术出版社, 2019.1

（现代数学丛书. 第3辑）

ISBN 978-7-5478-4234-8

I. ①高··· II. ①江··· ②江··· ③周··· III. ①高维-定常-可压缩流-纳维埃-斯托克斯方程-理论研究 IV. ①O175.26

中国版本图书馆CIP数据核字(2018) 第239318号

本书出版受“上海科技专著出版资金”资助

总 策 划　苏德敏　张　晨
从书策划　包惠芳　田廷彦
责任编辑　田廷彦
封面设计　赵　军

高维定常可压缩Navier-Stokes方程的适定性理论
江松　江飞　周春晖　著

上海世纪出版 (集团) 有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版、发行
(上海钦州南路71号　邮政编码 200235　www.sstp.cn)
上海中华商务联合印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 17.75　插页4
字数 300千字
2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5478-4234-8/O・65
定价：138.00元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，请向工厂联系调换

《现代数学丛书》编委会

主 编

李大潜(LI Tatsien, LI Daqian)
复旦大学数学科学学院,上海 200433,中国

编 委

Philippe G. CIARLET
Department of Mathematics, City University of Hong Kong, Hong Kong, China

Jean-Michel CORON
Laboratoire Jaques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris Cedex 05, France

鄂维南(E Weinan)
Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ08544, USA
北京大学数学科学学院,北京 100871,中国

励建书(LI Jianshu)
Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China

李骏(LI Jun)
Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA

林芳华(LIN Fanghua)
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, NY 10012, USA

马志明(MA Zhiming)
中国科学院数学与系统科学研究院,北京 100190,中国

Andrew J. MAJDA
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, NY 10012, USA

Cédric VILLANI
Institut Herni Poincaré, 75231 Paris Cedex 05, France

袁亚湘(YUAN Yaxiang)
中国科学院数学与系统科学研究院,北京 100190,中国

张伟平(ZHANG Weiping)
南开大学陈省身数学研究所,天津 300071,中国

助　理

姚一隽(YAO Yijun)
复旦大学数学科学学院,上海 200433,中国

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

前言

可压缩Navier–Stokes（NS）方程组广泛应用于科学研究与工程技术中，其数学理论的研究具有重要的理论意义和坚实的应用背景，并已取得了很大的研究进展。在1998 年之前，数学理论研究主要集中在小初值与小外力情形。在1998年，Lions首次给出了具有大外力作用下的大初值的非定常可压缩等熵NS方程弱解的全局存在性[45]，其中要求绝热指数$\gamma \geqslant 3N/(N+2)$，$N=2,3$为空间维数。随后在2001年，Feireisl等通过引入新的数学技巧，进一步将Lions的存在性结果改进到$\gamma > N/2$，见[24, 21]，也参见专著[60] 中的相关的理论进展。最近，对于二维等温情形（即$\gamma = 1$），弱解的存在性已被Plotnikov和Weigant 证明[71]。但在三维且$\gamma \in [1,3/2]$时，全局弱解的存在性至今仍是富有挑战的重要公开问题。需要指出的是在三维情形，许多气体的绝热指数取值在$[1,3/2]$内，特别地，空气取值为7/5。

高维非定常可压缩等熵NS方程组的弱解理论可推广到定常情形，具体地说，对于$\gamma > 5/3$，Lions首先证明了三维定常等熵可压缩NS方程组弱解的存在性[45]。Novotný和Straškraba 进一步将Lions的结果推广到$\gamma > 3/2$情形[60]。近十余年来，通过许多数学家的不懈努力，定常可压缩等熵NS方程弱解的存在性理论对$\gamma \in [1,3/2]$情形已取得了重要进展。这里简述一下相关的进展。当外力$\boldsymbol{f}$是势函数并且$\gamma > (3+\sqrt{41})/8$时，或者当$\boldsymbol{f}$是有界函数并且$\gamma > (1+\sqrt{13}/3) \approx 1.53$时，Březina与Novotný于2008年证明了三维定常等熵可压缩NS方程组周期边值问题弱解的存在性[7]（注意，之所以考虑周期边值问题是为了避开密度在边界估计的困难）。在[7]的证明框架内，Frehse, Steinhauer和Weigant于2012年通过引入新的数学技巧克服密度在边界估计的困难，从而证明了对$\gamma > 4/3$，三维Dirichlet边值问题存在弱解[27]。随后，对于任意$\gamma > 1$，通过引入耦合动能与压强的一个新估计，江松和

周春晖证明了三维周期边值问题弱解的存在性[38]。进一步，Plotnikov和Weigant于2015 年证明了Dirichlet边值问题弱解的存在性[72]。到目前为止，除了三维等温($\gamma=1$)情形外，二、三维定常可压缩等熵NS方程组弱解的存在性问题都已得到解决。

本书将系统介绍在大外力作用下三维定常可压缩NS方程组弱解的存在性结果，以及所发展起来的新型数学工具和数学技术，特别是其中的带奇异权估计的数学想法（见第三章3.4和3.5节内容）。此想法最早由Frehse等人在研究二维等温情形时引入。随后，其他数学家不断发展和拓广该想法，并进一步通过引入新的数学技巧，最终解决了三维定常可压缩等熵NS方程弱解对任何$\gamma>1$的存在性问题。本书的第三至四章将介绍等熵情形下弱解的存在性结果。在第五章中，我们将介绍等熵情形下的弱解理论如何进一步推广到具有热传导（也称非等熵）的情形。需要指出的是对于$\gamma>N/2$，Lions的专著[45]以及Novotný等人的专著[60]已分别对$N=2$及$N=3$两种情形进行了介绍，本书可认为是对已有关于高维定常可压缩NS方程适定性理论的专著的进一步更新。

此外，Novotný和Straškraba等人在其专著[60]中只介绍了小外力情形的定常可压缩NS方程强解的存在性结果。本书还将进一步介绍大外力作用下定常可压缩NS方程组强解的存在性结果。具体地说，第六章将介绍Choe和Jin关于当Mach数小时，具有大外力的定常可压缩等熵NS方程组强解的存在性结果[10]，并在第七章中介绍在热传导（非等熵）情形下相对应的强解存在性结果[15]。最后，第八章将介绍在大势力和小非势力共同作用下的定常可压缩热传导NS方程组强解的存在性结果[57]。关于非定常流的小Mach数极限理论，以及其他奇异极限理论，有兴趣的读者可参见例如Feireisl和Novotný 的专著[23]。

尽管高维定常可压缩NS方程的适定性理论取得了许多重要进展，然而仍有不少重要的数学问题未得到解决，例如，对于绝热指数为1的三维定常可压缩NS方程弱解的存在性仍未得到解决；什么条件下弱解是唯一的以及弱解的正则性还不清楚；目前所获得的关于弱解的理论结果能否进一步推广到无界区域仍然是公开的问题，以及不附加任何小性条件下强解的存在性同样未得到解决。本书所总结的相关研究进展，对于有志于解决相关公开问题的初学者既提供了入门知识，也给出了研究现状的概况，使得初学者能尽快地进入相关的研究前沿。此外，本书中所介绍

的新型数学工具和新发展的技术，不仅会对相关研究人员研究其他偏微分方程的适定性问题提供参考，而且也有助于进一步研究关于高维非定常可压缩NS方程组全局弱解存在性的遗留难题。

本书适合从事流体力学数学理论、应用数学、偏微分方程、流体力学计算方法等领域的科技工作者阅读使用，也可作为高等院校偏微分方程和应用数学专业研究生和高年级本科生的教材与参考书。本书第一章简要介绍了阅读所需的实变函数、泛函分析以及函数空间等基础知识。熟悉这方面基础知识的读者可跳过第一章直接进入第二章。

由于学识所限，加之初次尝试和时间紧迫，作者一些良好的主观设想未必能如愿忠实地反映于本书之中，全书的错误与遗漏也在所难免，殷切地期望各位读者批评指正。

本书受到国家自然科学基金（基金号：11631008，11671086，11871147）和福建省自然科学基金（基金号：2016J06001）的资助。

江松　江飞　周春晖

2018 年 9 月

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章
基本数学知识回顾

本章主要回顾后续章节会涉及的数学知识，其中包括基本的数学符号、概念及一些相关结论。阅读本章要求读者具有线性代数、数学分析、实变函数论与泛函分析等基本知识。

§1.1 抽象空间

本节主要介绍线性赋范空间、Banach空间、对偶空间、Hilbert空间和算子等概念，以及相关的数学结果。

§1.1.1 线性赋范空间

为引入线性赋范空间，需要重温线性空间和相关的度量空间的定义。

§1.1.1.1 线性空间

集合X 称为（实）线性向量空间（简称线性空间），如果定义X中元素的加法和数乘运算如下：

$$u,\ v \in X \to u+v \in X,$$
$$u \in X,\ \lambda \in \mathbb{R} \to \lambda u \in X,$$

使得对任意的u，v，$w \in X$及λ，$\mu \in \mathbb{R}$，下列公理满足：

（1） $u+v=v+u$;

（2） $u+(v+w)=(u+v)+w$;

（3） 在X中存在一个唯一确定的元素，记为0(并称为零元素)，使得$u+0=u$;

（4） 对每一个$u \in X$ 存在唯一一个确定的元素$(-u)$, 使得$u+(-u)=0$;

（5） $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$；

（6） $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$；

（7） $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u)$；

（8） $1u=u$；

（9） $0u=0$。

为了简单起见，把$\mathbb{R}$中的零与X中的零元素用同一符号表示。此外，在X中还定义减法为：$u-v=u+(-v)$。

§ 1.1.1.2 度量空间

令X表示一个线性向量空间。如果函数$d(\cdot,\cdot):X\times X\to[0,\infty)$满足下列三个条件，则称为距离或者度量：

（1） u，$v\in X$，$d(u,v)=0\Leftrightarrow u=v$；

（2） $d(u,v)=d(v,u)$，u，$v\in X$；

（3） $d(u,v)\leqslant d(u,z)+d(z,v)$，　u，v，$z\in X$　（三角不等式）。

称赋于距离d的线性空间为线性度量空间，并记为(X,d)。有时为了强调d是X的度量，记d为d_X。

设(X,d_X)和(Y,d_Y)是两个线性度量空间，如果存在映射$\varphi:X\mapsto Y$，满足

（1） φ是满射；

（2） 对于任意$(u,v)\in X$，$d_X(u,v)=d_Y(\varphi(u),\varphi(v))$，

则称(X,d_X)和(Y,d_Y)是等距同构空间，并称φ为等距同构映射，有时简称等距同构。

§1.1.1.3 线性赋范空间

令X为一线性向量空间。如果函数$\|\cdot\|:X\to[0,\infty)$满足下列三个条件，则称它为X中的范数：

（1） $u\in X$，$\|u\|=0\Leftrightarrow u=0$；

（2） $\|\lambda u\|=|\lambda|\|u\|$，$\lambda\in\mathbb{R}$，$u\in X$；

（3） $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$，$u,v\in X$　（三角不等式）。

称带有范数$\|\cdot\|$的线性空间X为线性赋范空间。每一个线性赋范空间X都是一个度量空间，其度量（即距离）定义为$\|u-v\|$，其中u，$v \in X$。

下面进一步介绍与线性赋范空间有关的概念，其中X都是表示线性赋范空间。

球：用集合$B_\varepsilon(a) := \{u \in X \mid \|u-a\| < \varepsilon\}$①表示以$a \in X$为圆心，$\varepsilon > 0$为半径的球。

有界集：称集合$M \subset X$（序列$\{u_n\}$② $\subset X$）在X中是有界的，如果存在一个常数$K \geqslant 0$，使得对于任意的$u \in M$，有$\|u\| \leqslant K$（对于所有的$n = 1, 2, \cdots$，$\|u_n\| \leqslant K$）。

开集：称集合$M \subset X$在X是开的，如果对于每一个$a \in M$，存在一个以a为中心的球包含在M 中。

序列与极限：$u, u_n \in X$，$n = 1, 2, \cdots$，如果$\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$，则记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \quad \text{在}X\text{中；} \quad \text{或} \quad u_n \to u, \quad \text{在}X\text{中。}$$

在此情形下，称u_n在X中强收敛于X。

闭包与闭集：令集合$M \subset X$，称集合

$$\overline{M} := \{u \in X \mid \text{存在一个序列}\{u_n\} \subset M\text{使得}u_n \to u\}$$

为M的闭包。集合M是闭集当且仅当$\overline{M} = M$。

边界：集合$\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$称为集合$M$的边界。

连续性：令f为X到Y上的映射，其定义域记为$\mathcal{D}(f)$。对$a \in \mathcal{D}(f)$，如果对于任意$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta > 0$，使得对$\mathcal{D}(f)$中满足条件“$\|x-a\|_X < \delta$的任意x，有$\|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon$”，则称$f$在点$a$是连续的。

紧性：称集合$M \subset X$为紧集（列紧集或相对紧集），如果对于任一有界序列$\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset M$，总存在一个子序列$\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 和一个元素$u \in M$ ($u \in X$)，使得在X中，$u_{n_k} \to u$。

联通集：集合$M \subset X$称为联通集，如果M满足下列性质：

$$M = A \cup B,\ A \cap \overline{B} = \varnothing = \overline{A} \cap B \Rightarrow A\text{与}B\text{有一个是空集。}$$

稠密性及可分性：集合M 是闭的当且仅当$\overline{M} = M$。如果X的子集M满足$\overline{M} = X$，则称M在X中稠密。如果存在一个可数集$M \subset X$ 在X中稠密（M 是可数的，是指它的所有元素可以按顺序排成一个序列），则空间X是可分的。

子空间：令$M \subset X$是一个线性向量空间，则赋予范数$\|\cdot\|_X$的M称为X的子空间。如果M在X中是闭的，则称M是X中的闭子空间。可分的线性赋范空间的闭子空间也是可分的。

①本书数学符号“$:=$”包含定义或记为的意思。

②严格地说，数列精确写法为$\{u_n\}_{n=1}^\infty$，本书为简单起见，省略上下标。

§1.1.2 Banach空间和对偶空间

令X表示一个线性赋范空间。如果序列$\{u_n\} \subset X$对任意$\varepsilon > 0$，存在$n_0 = n_0(\varepsilon)$使得对所有m，$n > n_0$，$\|u_m - u_n\| < \varepsilon$成立，则称该序列为Cauchy（或基本）序列。如果X中的每一个Cauchy序列$\{u_n\}$在X是收敛的，即存在一个$u \in X$，使得当$n \to \infty$ 时，$u_n \to u$，则称X 是一个完备空间。完备的线性赋范空间称为Banach空间。Banach空间的闭子空间也是Banach空间。

令$f : X \to \mathbb{R}$是线性映射，即对任意$u, v \in X$，$a, b \in \mathbb{R}$，恒有

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v)。$$

如果f还是连续的，则称连续线性映射f为定义在线性赋范空间X的连续线性泛函。把f在点$u \in X$的值记为$f(u)$或者$\langle f, u\rangle$（对偶积）。注意，连续线性泛函的连续性等价于其在0点的连续性。由此还可进一步推出，连续线性泛函的连续性等价于其为有界线性泛函，即存在常数C，使得对于任意的$u \in X$，有$|f(u)| \leqslant C\|u\|_X$。

定义在X上的所有连续线性泛函构成一个线性向量空间，记为X^*（或X'），并称之为X的对偶。对X^*赋予范数

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \frac{|\langle f, u\rangle|}{\|u\|_X}, \quad f \in X^*$$

后所得的空间X^*是一个线性赋范空间（注意，由于f是有界线性泛函，上述定义显然有意义）。映射$\langle \cdot, \cdot\rangle : X^* \times X \to \mathbb{R}$称为$X$与$X^*$之间的对偶（映射）。注意，赋予范数$\|\cdot\|_{X^*}$后的$X^*$是一个Banach空间。

若X是一个Banach空间，且X^*是它的对偶空间，则可进一步考虑X^*的对偶

$$X^{**} = (X^*)^*。$$

令$u \in X$，显然映射$\varphi \in X^* \to \langle \varphi, u\rangle \in \mathbb{R}$定义了$X^{**}$ 中的一个元素。这意味着对于每个$u \in X$，存在$Ju \in X^{**}$，使得

$$(Ju)(\varphi) := \langle \varphi, u\rangle, \qquad \varphi \in X^*。$$

称$J : X \to X^{**}$为空间X到X^{**}中的正则映射。

令X表示Banach空间，如果$J(X) = X^{**}$，即对于每一个$g \in X^{**}$，存在唯一确定的元素$u_g \in X$，使得对所有的$\varphi \in X^*$，$g(\varphi) = \langle \varphi, u_g\rangle$；并且$\|g\|_{X^{**}} = \|u_g\|_X$，则称$X$是自反的。$X$的自反Banach空间简记为$X = X^{**}$。如果$X$是自反Banach空间，则其任何闭子空间也是自反的Banach空间。

如果Banach空间满足：对于任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得对任何满足$\|x\|_X \leqslant 1$，$\|y\|_X \leqslant 1$，$\|x - y\|_X > \varepsilon$的$x$，$y \in X$，有

$$\|x + y\|_X/2 < 1 - \delta,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com