“十三五”江苏省高等学校重点教材

数学解题研究

——数学方法论的视角

段志贵 编著

清华大学出版社

"十三五"江苏省高等学校重点教材

编号：2018-2-011

段志贵 编著

数学解题研究

——数学方法论的视角

清华大学出版社
北京

内容简介

本书以数学方法论为基础，注重数学方法对解题的理论指导；以具体问题的解决为抓手，突出数学方法的引领作用；以解决问题的策略取向为线索，层层深入，旨在打开一扇通往成功解题的大门.

全书共九章，第一、二章提出数学解题首先要多途径观察，然后考虑化归；第三章介绍类比法，以探寻熟悉的解题模式或方法；第四章基于解题直觉探索解题思路的获取；第五、六章阐明构造是实现数学问题解决的一个捷径，建模是构造法解题的升级；第七章另辟蹊径，研究审美法对解题的意义；第八章探讨解决较复杂问题需要运用的变通策略与途径；第九章指明反思是数学解题不可或缺的一个环节，解题任务完成后要剖析错误、总结方法、比较鉴别及拓展延伸.

本书可供高等师范院校教育硕士学科教学(数学)方向专业学位研究生、全日制数学与应用数学专业本科生和小学教育(理科)专业本科生作为数学解题研究课程教材使用，也适用于中小学数学教师、教研员及初等数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学解题研究：数学方法论的视角/段志贵编著.—北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-51153-3

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①段…　Ⅲ.①数学方法－研究　Ⅳ.①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 203257 号

责任编辑：吴梦佳
封面设计：常雪影
责任校对：袁　芳
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
　　社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62770175-4278
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：14.25　　**字　数**：334 千字
版　　次：2018 年 12 月第 1 版　　**印　次**：2018 年 12 月第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

产品编号：072846-01

前　言

美籍匈牙利数学教育家乔治·波利亚曾经说过:“掌握数学意味着善于解题.”而能够做到善于解题,非一朝一夕所能达到,它需要长期的解题训练,这一训练需要厚实的数学知识作保证,更需要融合科学的方法去引领.许多人的解题能力不强,缺的不是知识,缺的是方法与策略,是能够灵活运用的数学方法和驾轻就熟的解题策略.相比方法而言,策略更宏观,本质上来说,策略就是若干方法集合在一起的行动方案.因此,从方法论的角度去探索数学解题的奥妙具有十分重要的现实意义和指导价值.

所谓解题,本质上来说就是把数学的一般原理运用于习题的条件或条件的推论而进行的一系列推理,直到求出习题解答为止的过程.这一过程蕴藏着比较复杂的思维活动,虽然有时比较艰辛,甚至有时苦思冥想也难得其法,然而不可否认,解题还是有一定规律可循的.

多年来,国内外许多专家、学者在解题研究上颇有建树.乔治·波利亚的名著《怎样解题》《数学与猜想》《数学的发现》,以及他的程序化的解题系统、启发式的过程分析、开放型的念头、诱发探索性的问题转换等观点,在国内外数学教育界广为传播.美国心理学家奥苏伯尔等人提出了四阶段解题模式,即呈现问题情境、明确问题的目标和已知条件、填补空隙(解题的核心)、检验,这一模式不仅描述了解题的一般过程,而且指出了原有认知结构中各种成分在问题解决过程中的不同作用,为培养解题能力指明了方向.苏联数学教育家 A.M.弗里德曼、A.B.瓦西列夫斯基,美国数学教育家 W.A.威克尔格伦、L.C.拉松等也在解题研究上发表了一系列论文,出版了相关专著,提出了他们在解题研究上的理论,都很有创意.

国内致力于解题研究的学者比较多,这与我国基础教育,特别是中小学数学教育的大环境有着密切的关联.多年来,我国基础教育阶段数学教学成就不凡,为国际数学教育界同人广泛关注.在解题研究领域比较出色的有南京师范大学单墫教授、陕西师范大学罗增儒教授、浙江教育学院戴再平教授等,他们的著作各有侧重.相比国外学者,国内学者运用数学方法论讨论数学解题的研究比较多,这应当与大连理工大学徐利治教授的贡献有关.在数学方法论上的理论建构奠定了徐教授在国内数学与数学教育界享有特定的地位.走在解题研究前沿的还有南京师范大学喻平教授及其研究团队,他们结合心理学研究成果建构了解题认知模式与解题教学理论.所有这些研究反映出数学解题研究持续成为国内外数学教育界的研究热点,并一直向前不断延伸.

本书是站在巨人肩上的学习体会之作,系编著者多年执教高师数学与应用数学(师范类)专业“数学解题研究”和“数学方法论”课程的教学实践总结之作.从开始的理论借鉴、典型例题收集整理、归类提取到后期的结构化、系统化凝练,多年来编著者从未间断过在数学

解题研究上的理论与实践探索.本书虽未达尽善尽美,但却是真正的心血之作.本书的理论与实践观点主要体现在以下三个方面.

(1) 学会思考:从数学方法论的视角认识解题.

解题就是"解决问题",即求出数学题的答案,这个答案在数学上也叫作"解",所以,数学解题就是找出数学问题解的活动过程.小至一个学生算出作业的答案、一个教师讲清定理的证明,大至一个数学课题得出肯定或否定的结论、一项数学理论应用于实际构建出适当的模型等,都叫解题.数学家的解题是一个创造和发现的过程,教学中的解题更多的是一个再创造或再发现的过程.本书所说的解题专指教学中的解题,本书所指向的解题研究就是通过典型数学问题的分析讲解,引领解题者学会数学家的"数学的思维",学会从数学方法论的视角认识、理解和掌握解题规律,发展解题思维,提高解题能力.

(2) 揭示规律:确立数学解题研究的目标指向.

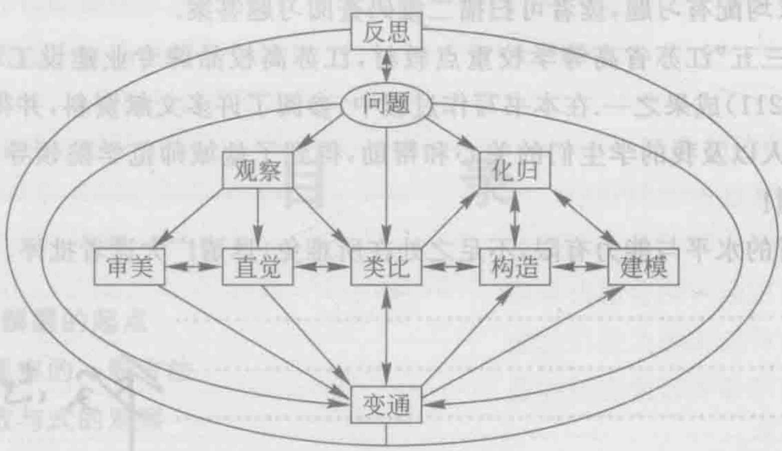
正如书名所说,本书是从数学方法论的视角研究数学解题.本书没有选用繁难的或是蕴藏特别技巧的竞赛题,而是选用基本的常见的数学问题,主要是高考题,也有部分中考题作为分析例题.本书的重点不在于系统的理论建构,而在于从数学方法论的视角把握数学解题规律,多维度引领解题方向,促进解题者的思维发展及分析、解决问题能力的提高.每一章节介绍的数学方法都能直奔"靶心",揭示数学解题的内在规律,努力把着力点放在问题的剖析与方法的探究上,放在有效地运用数学方法有目的、有计划地攻克问题、突破难点上.

(3) 择法引领:科学地设计数学解题研究思路.

本书以数学方法论作为基础,注重数学方法对数学解题的理论指导;以具体问题的解决为抓手,突出数学方法的引领作用.在具体框架结构上,以解决问题的策略取向为线索展开论述.

具体地说,面对一个问题,首先要多途径观察,然后考虑化归,把待求解问题转化为已解决的或较容易解决的问题;感觉不甚明了的问题可以考虑运用类比法,探寻熟悉的解题模式或方法以降低问题难度;解题中的直觉因素是必须关注的,它可能会在难题求解过程中发挥重要作用;构造是实现数学问题解决的一个捷径,但不是每一个问题的解决都需要构造;建模是对构造法解题的升级,建模法解题涵盖的内容更为丰富,解决问题的面更为宽广;审美法对于解题来说,是另辟蹊径,是寻找解题方法的一个重要补充;对于费时费力的疑难问题,要想办法进行多途径变通;最后是解题反思,提出反思是数学解题中不可或缺的环节,解题任务完成后要分析解题过程、剖析错误、总结方法、比较鉴别及拓展延伸等,促进思维发展,提高解题能力.因此,基于数学方法论的视角,拟定数学解题的策略路线图如下页图所示.

需要强调的是,这些解题策略与方法彼此间不是孤立的.观察伴随在解题过程中,化归也一直主导着解题全过程.类比可促成化归,常常源于观察而发生,因直觉而显现.构造是一种高级思维模式,需要综合运用类比或化归.建模类似于构造,同样依赖于对问题的观察与审美,依赖于化归思想,依赖于类比、直觉等方法.审美的产生,看似直觉,实质上与细致入微的观察有着紧密的关联,审美意识经常促成类比、构造、建模等解题方法的形成,也为解题化归的实现奠定基础.变通的前提是对问题有比较深刻的观察与理解,它是融直觉、审美、类比



数学解题的策略路线图

等思想方法于一体的结果，反过来又指向合适的类比、创造性的构造与建模以及巧妙的化归.而解决问题不是最终的目的，对解题策略以及解题过程的深入反思，能够指导我们进一步学会观察，更深刻地理解和掌握化归、类比、构造、变通等解题策略与方法，更有效地发展数学思维，提高解题能力.

本书共分九章，内容分别如下.

第一章　观察:解题的起点，主要从观察的一般方法、数与式的观察、图形的观察、条件与结论的观察及问题结构的观察入手，阐述数学解题观察的重要意义及观察法解题的基本路径.

第二章　化归:解题的方向，通过对化归法解题模式的具体论述，结合实例，着重讨论特殊化、一般化、分解与组合、映射与反演等化归策略在数学解题中的具体应用.

第三章　类比:解题的抓手，从类比的意义和分类入手，详细介绍问题解决过程中的题型结构类比、方法技巧类比、空间与平面类比、抽象与具体类比及跨学科类比等.

第四章　直觉:解题的精灵，从直觉解题的心理机制，解题直觉的呈现、捕获及运用等方面，具体讨论直觉在解题中的作用.

第五章　构造:解题的突破，从揭示构造法的本质特征入手，深入研剖挖掘问题背景、借用数形结合、透析结构相似及运用等效转换等途径进行构造的具体策略.

第六章　建模:解题的支架，基于数学建模的基本内涵，具体阐述从实际问题中抽象出数学模型的基本方法，并就初等数学解题常见、常用数学模型的类型及其多维建构作了较详细的解析.

第七章　审美:解题的意愿，从数学解题中的审美意蕴出发，介绍对称美、简洁美、和谐美、奇异美及数学文化等在数学解题中的具体应用.

第八章　变通:解题的调适，结合具体问题，概述数学解题中的变通思维方法及追本溯源、变换主元、有效增设、正难则反四个变通策略.

第九章　反思:解题的延伸，着重阐明解题后有待反思的基本路径，主要包括寻求问题的多种解法、解题错误的类型与归因、“形”与“质”的比较与分析及问题的拓展与延伸等.

本书各章末均配有习题，读者可扫描二维码查阅习题答案.

本书系“十三五”江苏省高等学校重点教材，江苏高校品牌专业建设工程资助项目(编号:PPZY2015C211)成果之一.在本书写作过程中，参阅了许多文献资料，并得到了众多数学教育界前辈、同人以及我的学生们的关心和帮助，得到了盐城师范学院领导的大力支持，在此一并表示感谢!

由于编著者的水平与能力有限，不足之处在所难免，恳请广大读者批评、指正.

2018 年 9 月于江苏盐城

目　录

观察可能导致发现.观察将揭示某种规律、模式或定律.

——[美]乔治·波利亚(1887—1985)

对微小事物的仔细观察,就是事业、艺术、科学及生命各方面的成功秘诀.

——[英]史迈尔(1812—1904)

第一章　观察:解题的起点

从信息加工的角度来看,数学活动中的观察是有目的、有选择地对各种数学材料进行概括的知觉过程,其成果就是发现数学材料的外部特征和整体特征.通过观察,把外部事物的各种信息反映到人的大脑里.但这绝不是一种机械的条件反射,伴随着观察同时会发生一系列的心理活动,如注意、感知、记忆、想象等,而且其中一定还存在着积极的思维活动.

观察本身不是一种独立解题的思维方法,但它是产生数学思想方法的基础.高质量的观察能迅速、合理地引发好的解题思路.因此,观察作为解题的第一步显得特别重要,绝不能将它与数学解题的思维分割开.

第一节　观察的一般方法

所谓解题中的观察,本质上就是审题,它不同于单纯地用眼去看,而是有目的、有步骤、有方法地对数学题目进行剖析.它要求观察者通过观察了解题目的条件是什么(特别不能遗漏隐蔽条件和特殊情况)、问题的结论是什么(或者要求是什么)以及题目中有无图形.如果有图形,还要对照观察图形中各元素(如边、角、面积等),最好能将各相应量标在图形上.在此基础上,发现并获取必要的信息.当观察的信息比较熟悉,与自己掌握的解题模式很接近,与自己的认知结构相合拍,那么就能立即进入试探过程,大部分这类问题便可很快获解.

在数学学习与研究中,观察起着十分重要的作用.欧拉指出:“数学这门科学需要观察,还需要实验.”在观察探索时,可行且有效的步骤是:

$$整体\rightleftharpoons局部\rightleftharpoons特殊$$

从一般到特殊,从全局到细节的反复观察,有利于发现新的信息.有些问题,如能根据题中所提供的信息不断地改变观察角度,往往能越过“思维障碍”,突破解题难关,获得“柳暗花明又一村”的效果.

一、整体观察

解题障碍形成的一个主要原因是忽视对问题整体的观察,从而无法下手.任何一个事物,都存在整体与局部的关系.在进行数学观察时,观察整体的同时,还必须观察其局部的特点.从整体中看局部,从局部中把握整体,只有这两个层面都考虑周到,才能真正抓住问题的关键,看出被观察题目的特点.

例 1.1 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_1>0$,$S_{12}>0$,$S_{13}<0$,问:数列中前几项的和最大?

分析 在等差数列中求前几项的和最大,一定是首项大于零,公差小于零的数列,所以解题的关键是寻找等差数列的正负分界点,即$a_k\geqslant 0$且$a_{k+1}\leqslant 0$的k的值.因此,一般的思路是用首项a_1和公差d表示a_k和a_{k+1},而在此题中要做到这一点还比较困难.我们仔细观察题目所给的条件,对$S_{12}>0$和$S_{13}<0$作整体处理.利用等差数列的求和公式和性质可得:$\frac{12(a_1+a_{12})}{2}>0$,$\frac{13(a_1+a_{13})}{2}<0$,所以$a_6+a_7>0$,$2a_7<0$,因此有$a_6>0$,$a_7<0$.所以数列的前6项的和最大.

例 1.2 如图1.1所示,在$\triangle ABC$中,$AB=AC=2$,BC边上有100个不同的点$P_1,P_2,\cdots,P_{100}$,记$m_i=AP_i^2+BP_i\cdot CP_i$ $(i=1,2,\cdots,100)$.求$m_1+m_2+\cdots+m_{100}$的值.

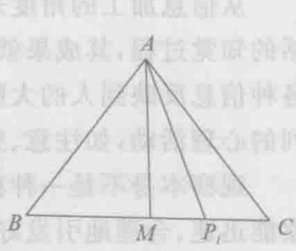


图 1.1

分析 从整体来看,求式$m_1+m_2+\cdots+m_{100}$的项数多,可猜想各项间必有规律.为发现这一规律,我们从观察特殊点入手.

抓住关键词"100个不同点",考虑P_i恰取B或C时,易知有

$$AB^2=AC^2=4.$$

再看一特例:取BC中点M,有

$$AM^2+BM\cdot CM=AB^2-BM^2+BM\cdot CM=AB^2=4.$$

由此可猜想,m_i均为$4(i=1,2,\cdots,100)$,且从上面的特例可找到解题方法:对BC边上任一点P_i(不妨取在线段MC上),由图1.1可知

$$\begin{aligned}AP_i^2+BP_i\cdot CP_i&=AM^2+MP_i^2+(BM+MP_i)(CM-MP_i)\\&=AM^2+MP_i^2+BM^2-MP_i^2\\&=AM^2+BM^2=AB^2=4.\end{aligned}$$

故$m_1+m_2+\cdots+m_{100}=400$.

二、实验观察

在学习物理和化学时,人们常常通过物理演示实验或化学反应实验帮助认识物理现象的本质和化学性质的特点.同样的道理,对于数学中的某些问题,一时看不出它具有哪些特征,或者很难寻找解决问题的办法,常常可以通过实验观察,从而获得猜测.然后对其正确性进行推断,达到解决问题的目的.

例 1.3 平面上有 n 条直线,且任意两条都不平行,任意 3 条都不共点,则这 n 条直线互相之间能分割为多少条不同的线段(或射线)?

分析 要想直接解决本题好像不是很容易,我们可以进行实验,在厘清 1 条、2 条、3 条时的具体情况,探索规律,从而对 n 条直线加以分析和研究.

当 $n=1$ 时,有 1 条;当 $n=2$ 时,有 4 条;当 $n=3$ 时,有 9 条.由此我们可以猜测:n 条直线可分为 n^2 条.猜测的结论是否正确,需要证明.

若 $n=k$ 时,有 k^2 条,则当 $n=k+1$ 时,增加的一条直线被原来的 k 条直线分为 $k+1$ 部分,而原来的 k 条直线也都有一部分被分为了两部分,增加了 k 条,因此 $n=k+1$ 时,有 $k^2+k+1+k=(k+1)^2$(条),所以结论正确.

例 1.4 试证:只有一个质数 p,使 $p+10$,$p+14$ 仍是质数.

分析 当问题较为抽象,思路、方法难寻时,不妨将问题具体化,进行实验观察,使思路清晰,便于解题.

取 $p=2$ 时,$p+10=12$,$p+14=16$,不是质数;

取 $p=3$ 时,$p+10=13$,$p+14=17$,是质数;

取 $p=5$ 时,$p+10=15$,$p+14=19$,不全是质数;

取 $p=7$ 时,$p+10=17$,$p+14=21$,不全是质数;

取 $p=11$ 时,$p+10=21$,$p+14=25$,不是质数.

由此观察出,$p=3$ 是所要求的一个质数.接下来证明这一结论.

当 $p=3k+1$ 时,$p+14=3k+15=3(k+5)$ 是合数;当 $p=3k+2$ 时,$p+10=3k+12=3(k+4)$ 是合数;故只有当 $p=3k(k\in \mathbf{N}_+)$ 时,才有可能使 $p+10$,$p+14$ 都为质数,而 $p=3k$ 中的质数只有 3 这一个.

三、比较观察

比较是人脑中确定各种事物之间差异和关系的思维过程.俗话说:"有比较才有鉴别."数学学习中的比较是将有可比意义的概念、题目、方法等组合在一起进行求同存异地观察分析,通过类比联想找到解决问题的思路和方法,这是一种知识间的同化策略.

例 1.5 判断:以过椭圆的焦点的弦为直径的圆,和椭圆相应的准线的位置关系.

分析 此题的结构和要求,让我们联想到抛物线的一个结论:以过抛物线焦点弦为直径的圆,必和抛物线的准线相切.几乎相同的条件,在不同的曲线下结论会发生何种变化?观察一下抛物线时对该题的证明,也许对我们会有所启发.

设焦点为 F,过焦点的弦为 AB,曲线的离心率为 e,A、B 两点到准线的距离分别为 m、n.则 AB 中点 M 到准线的距离 $d=\dfrac{m+n}{2}$.而由抛物线的定义可得 $|AF|=m$,$|BF|=n$.所以有

$$d=\frac{m+n}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2}=\frac{1}{2}|AB|.$$

因此,以过抛物线焦点的弦为直径的圆,必和抛物线的准线相切,如图 1.2 所示.

把椭圆与抛物线相比较,可以仿照抛物线探索解题思路.利用椭圆的第二定义可得

$$d=\frac{m+n}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2e}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}|AB|.$$

因为椭圆的离心率有 $0<e<1$，所以 $d>\frac{|AB|}{2}$，则圆和椭圆相应的准线相离，如图 1.3 所示.我们还可以联想到双曲线的情形，$e>1$，所以 $d<\frac{|AB|}{2}$，则圆和双曲线相应的准线相交，如图 1.4 所示.

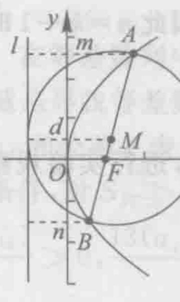


图 1.2

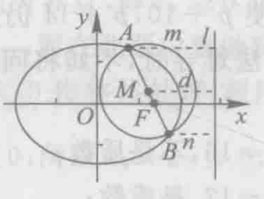


图 1.3

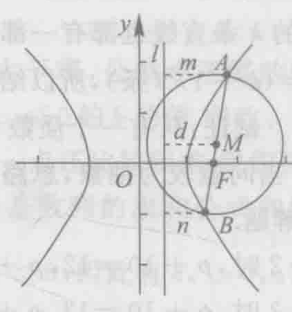


图 1.4

例 1.6 设 $a>0$，$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$，比较下列四个数的大小：$\sqrt{1+a}$，$\frac{1}{1-\frac{b}{2}}$，$1+\frac{a}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{1-b}}$.

分析 对于这四个数如果用求差的方法比较大小，要进行 $C_4^2=6$ 次比较，才能得到答案.是否可先估计一下这四个数的大小关系呢？不妨先用具体数值代入比较，然后猜想证明.

因为 $a>0$，不妨设 $a=1$，由 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$，得 $b=\frac{1}{2}$.于是有

$$\sqrt{1+a}=\sqrt{2},\ \frac{1}{1-\frac{b}{2}}=\frac{4}{3},\ 1+\frac{a}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{2}.$$

由此可以猜想，对于满足 $a>0$，$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$ 的一切 a、b 值都有

$$\frac{1}{1-\frac{b}{2}}<\frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}.$$

对于这一猜想的结论再进行证明，只需作三次比较即可(证明略).

四、极端观察

数学问题的表现形式是多种多样的.极端观察是指通过对研究对象极端情形的观察，帮助我们判断问题的类型，探索解决问题的方法.

例 1.7 已知异面直线 a 与 b 所成的角为 60°，P 为空间一定点，则过点 P 且与 a、b 所成的角都是 60° 的直线有且只有(　　)条.

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

分析　这个题目在一般的情况下连图形都不容易画出来,无从找到思路.

由异面直线所成角的意义,我们可以考虑把两条异面直线平行移动,移到过定点 P 的极端位置,在此位置下问题变得直观和清楚,即从同一点出发的 3 条直线,其中两条直线间夹角为 $60°$,问第三条直线和它们都成 $60°$ 有多少种可能? 不难得到这样的直线共有 3 条.

例 1.8　已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$图象经 $M(1-\sqrt{2},0)$、$N(1+\sqrt{2},0)$、$P(0,k)$三点,若 $\angle MPN$ 是钝角,求 a 的取值范围.

分析　若利用余弦定理,并由 $-1<\cos\angle MPN<0$,将得到一个较复杂的不等式.观察 $\angle MPN$ 的变化状态,显然直角是钝角的极限情形.

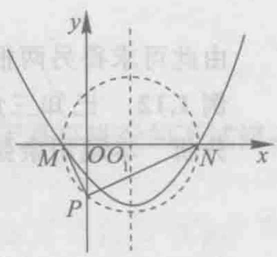


图　1.5

事实上,当 $\angle MPN$ 为直角时,则点 P 在以 MN 为直径的圆周上,于是 P 为该圆与 y 轴的交点.如图 1.5 所示,由勾股定理不难得 $k=\pm 1$.

由此推断,当 $\angle MPN$ 为钝角时,点 P 在圆内.由 $a>0$ 知:点 P 应在 y 轴的负半轴上.把 $P(0,k)$的坐标代入 $y=a(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$得 $a=-k$,因此,$0<a<1$.

第二节　数与式的观察

数学离不开数与式.可利用数的表征,如整数、无理数、质数、勾股数、数的组成、数的整除性等;可利用式的特征,如共轭因式、互为倒数因式、对偶式等.问题所给的数与式,常常给问题的求解指明探索的思路.只要仔细观察,发现数字、式子间的内在联系,往往能找到解决问题的突破口.

例 1.9　设 $A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$,求 A 的末位数字.

分析　此题若企图把等式右边各个因数相乘是极不现实的.观察所给式子的特征,容易想到用$(2-1)$同乘等式两边进行试探:

$$(2-1)A=(2-1)(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{64}+1)=2^{128}-1=(2^4)^{32}-1=16^{32}-1.$$

因为 16^{32} 的末位数字是 6,所以 A 的末位数字是 5.

本题还有一个观察的视角,就是敏锐地捕捉到 A 中一个因式(2^2+1)是 5,其他所有的各项都是奇数,因此,A 的末尾数字是 5.

例 1.10　解方程$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$.

分析　观察方程左边两个代数式中的底数的数字特征,不难发现$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 与$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 互为倒数.如令$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=y$,则问题可纳入解“$y+\dfrac{1}{y}=a$ 型”方程的模式,不难求出 y 的值,从而解出 $x=\pm 2$.

例 1.11 解方程 $x^3-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})x-\sqrt{6}=0$.

分析 解决本题的关键是拥有一双慧眼发现方程系数的关系,通过试根观察可以发现:

$$1-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)+(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})-\sqrt{6}=0,$$

方程有一根为 $x_1=1$.从而在方程的左边可以提取公因式$(x-1)$,得

$$(x-1)[x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}]=0.$$

由此可求得另两根为 $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{3}$.

例 1.12 已知三角形的三边分别为 108、144、180.求此三角形的最大角.

分析 本题用余弦定理计算比较麻烦.若认真观察数字间的特征,就会发现:

$$108:144:180=3:4:5.$$

由勾股定理的逆定理即可知此三角形为直角三角形,所以最大角是 90°.

类似地,通过对特殊常数的仔细观察获得解题方法的习题比较多.

例如,已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{60}{169}$, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,可以观察数字,$\dfrac{60}{169}=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{12}{13}$.联想到数组$(5,12,13)$,于是可以构造直角三角形.又 θ 为锐角,可知 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ 或 $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$, $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$ 或 $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$,故 $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{17}{13}$.

例 1.13 解方程$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}=x$.

分析 本题用常规的方法,即不断对两边取平方(有时需移项后再取),可化为一个八次方程.不过这样求解不但计算量大,而且也不容易求解出来.但是,不管计算过程多么复杂,解答结果只可能是:无解;有唯一正根;有若干个正根.

而它是否有解,往往可以从是否存在正数能使两边相等得出.

实际上,只要略加观察,就可发现:由于$\sqrt{2+2}=2$,可依次推得

$$2=\sqrt{2+2}=\sqrt{2+\sqrt{2+2}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}. \quad ①$$

因此,$x=2$ 是方程的根,方程是有解的.

但上述根是方程唯一的根,还是它的若干个正根中的一个根呢?如果回到上面发现 $x=2$ 这个根的起点,就不难看出能使$\sqrt{2+x}=x$ 的正数原来就只有一个 2,从而大致估量出其他的正数是不可能满足题设方程的.由此进一步猜想到:用不等于 2 的正数代 x,① 中的一串等号将可能变为一串大于(或小于)号.

为证实上面的猜想,必须做些计算.事实上,如果解不等式

$$\sqrt{2+x}<x$$

可知 $x>2$ 时,恒有 $x>\sqrt{2+x}$,于是依次推得

$$x > \sqrt{2+x} > \sqrt{2+\sqrt{2+x}} > \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}. \quad ②$$

因此，大于 2 的正数都不是方程的根.

而当 $0 < x < 2$ 时，可得到类似于 ② 的结果，这时只要把大于号改为小于号即可.因此，小于 2 的正数同样也都不是方程的根.

这样，就用分类淘汰法从方程可能的根（无穷多个正数）中去掉了所有不等于 2 的正数，至此，我们就可以肯定方程只有唯一的根：$x = 2$.

例 1.14 求证：$1 > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}(n \in \mathbf{N}_+)$.

分析 观察可发现 $n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$，而 n 又恰为不等式中间项的项数，于是可进行如下试探：

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{2n},$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+2} \geqslant \frac{1}{2n},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+n} \geqslant \frac{1}{2n},$$

则有

$$1 = n \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{个}} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

$$\geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\text{个}} = \frac{1}{2},$$

即

$$1 > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbf{N}_+).$$

例 1.15 若 $x \geqslant 0$，求 $y = \frac{4x^2 + 8x + 13}{6(x+1)}$ 的最小值.

分析 初步观察可断定用判别式法，但若再仔细观察可发现分子能写成 $4(x+1)^2 + 9$，分母是 $6(x+1)$，不妨做一试探：

$$y = \frac{4x^2 + 8x + 13}{6(x+1)} = \frac{4(x+1)^2 + 9}{6(x+1)} = \frac{2}{3}(x+1) + \frac{1}{\frac{2}{3}(x+1)},$$

因 $x \geqslant 0$，故 $\frac{2}{3}(x+1) > 0$，由均值不等式可知，$y \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{3}(x+1) \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}(x+1)}} = 2$，

从而可知：当 $x = \frac{1}{2}$ 时，$y_{\min} = 2$.