Fast Integral Equation Method for Multiscale and Wide-Band Problems in Electromagnetic Fields

电磁场多尺度和宽频带问题的积分方程快速算法

孔维宾　周后型／著

中国矿业大学出版社

电磁场多尺度和宽频带问题的积分方程快速算法

孔维宾　周后型　著

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

目标特征分析与识别的高速发展，离不开电磁场与电磁波理论的研究。目标的材料和结构日益复杂，给电磁特性的分析带来极大的困难。针对电磁场中多尺度和宽频带问题的数值分析方法，本书介绍了矩量法、多层快速多极子算法、基于快速傅立叶变换的积分方程算法、自适应交叉近似算法、基于积分方程的区域分解算法等算法。本书重视理论与实践的结合，对每种电磁场计算算法提供了在复杂电磁工程中的应用实例。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场多尺度和宽频带问题的积分方程快速算法 / 孔维宾，周后型著. —徐州 ：中国矿业大学出版社，2019.1

ISBN 978 - 7 - 5646 - 3524 - 4

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①孔…②周… Ⅲ. ①电磁场—尺度参数—积分方程—算法—研究②电磁场—宽频带—积分方程—算法—研究 Ⅳ. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 298828 号

书　　名　电磁场多尺度和宽频带问题的积分方程快速算法
编　　著　孔维宾　周后型
责任编辑　褚建萍
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×960　1/16　**印张** 7　**字数** 160 千字
版次印次　2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
定　　价　28.00 元
（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

前　言

在国际核心技术竞争日益激烈的今天，发展高性能计算技术已经成为突破国外技术垄断的途径。在电子产品的设计和生产过程中，计算机辅助设计和计算机辅助制造发挥着重要的作用。随着电磁系统越来越复杂，计算成为解决这些问题的主要手段。

在微波技术中，为解决复杂电磁理论和工程问题，诞生了计算电磁学。计算电磁学从20世纪60年代开始，距今已有近60年的发展历史。在电子工业设计的过程中实验测试往往是昂贵的和费时的，计算电磁学能够帮助进行电磁性能的仿真和设计，能够有效节约实验成本和缩短设计周期。电磁计算方法在处理问题的复杂度上表现出较强的适应性和通用性。电磁场数值分析方法可以分为两大类：第一类是微分方程类方法，如频域有限差分、时域有限差分、有限元法；第二类是积分方程类方法，典型代表是矩量法。数值方法也可分为低频方法和高频方法。高频方法包括几何光学法、物理光学法、几何绕射法、一致性几何绕射法等。高频方法忽略了目标各部分间的大部分耦合作用，优点是计算速度快、计算资源需求相对较少，但是往往精度比较低。相对于高频方法，低频方法的求解精确度较高，且能处理复杂结构，因而在实际电磁工程中被广泛应用，其中矩量法的使用尤其广泛。

本书首先讨论计算电磁学的研究目的和意义，计算电磁学主要采用的方法，以及当前电磁场多尺度问题和宽频带问题的研究现状；其次介绍了矩量法的基本原理以及快速算法：快速多极子算法、基于快速傅立叶变换的快速算法以及低秩矩阵压缩算法；在此基础上，提出了针对电磁场多尺度问题和宽频带问题的基于积分方程方法的快速算法。

希望以上的研究方法和观点能够对我国目标特征分析与识别的研究与实现提供一些技术上的支持，对关注电磁散射技术发展的学者提供一些借鉴。

本书得到了国家自然科学基金项目(61673108)、江苏省高校自然科学研究项目(18KJD510010)、江苏省青年基金(BK20181050)、东南大学水声信号处理

教育部重点实验室开放课题(UASP1801)、中央高校基本科研业务费专项资金(2242016K30013)、2018江苏省产学研合作项目(BY2018286,BY2018282)和盐城工学院人才引进项目(XJ201714)的资助。

由于作者水平有限,时间仓促,错误之处在所难免,恳请读者批评指正!

著者

2018年8月

目　录

第1章 绪 论

1.1 研究背景

现代科学技术的许多方面与目标电磁散射、辐射特性有密切联系,如在环境监测、电磁波遥感技术、雷达目标识别、微波毫米波集成电路分析与设计以及天线仿真与设计等众多应用领域。随着计算机技术的快速发展,电磁仿真软件被广泛用于电磁工程中的分析和辅助设计,极大地提高了产品设计效率和质量并大大降低了产品开发成本。所有这些电磁仿真软件都是基于电磁场边值问题数值方法的,是计算电磁学与计算机技术结合的成果。所有电磁计算问题都可归结为 Maxwell 方程在各种边界条件和媒质条件下的求解问题。早期,借助 Maxwell 方程组求解电磁场边值问题的方法有解析方法和半解析方法[1-8]。这类方法可以对结构比较简单的物体进行有效的分析,但难以应对复杂电磁结构。随着计算机技术的发展,电磁场理论和工程问题的分析逐步走向数值化,从而产生了一个新兴的应用学科——计算电磁学。与经典方法相比,数值方法在处理问题的复杂度上表现出较强的适应性和通用性。电磁场数值分析方法可以分为两大类:第一类是微分方程类方法,如频域有限差分(FDFD)[9-10]、时域有限差分(FDTD)[11-13]、有限元法(FEM)[14-16];第二类是积分方程类方法,典型代表是矩量法(MoM)[17-52]。数值方法也可以划分为低频方法、高频方法和混合方法[53-56]。上面提到的微分方程类方法和积分方程类方法都是低频方法。典型的高频方法有几何光学法(GO)[57]、物理光学法(PO)[58]、几何绕射法(GTD)[59]、一致性几何绕射法(UTD)[60]等,它们都是近似方法。高频方法忽略了目标各部分间的大部分耦合作用,优点是计算速度快、计算资源需求相对较少,缺点是不能精确计算目标上的精细结构,适用于电大尺寸光滑表面目标。相对于高频方法,低频方法的求解精确度较高,且能处理复杂结构,因而在实际电磁工程中被广泛应用。MoM 是低频方法之一,它以电磁场积分方程为基础,将一个积分方程转换为一个矩阵方程来进行数值求解。由于积分方程内在的全域特性,MoM 矩阵必定是一个稠密阵,因而在早期,MoM 只能应用于电小尺寸的电磁问题。这个瓶颈促使理论界探索“快速矩量法”。20 世纪 80 年代后期,基于矩量法的各种快速算法开始兴起,并得到快速发展。MoM 稠密矩阵的求解

一般采用迭代解法，迭代过程中的矩阵-向量积可以借助快速方法有效地加速。快速方法的建立通常追求两个要点：一是存储需求的降低；二是计算效率的提高。从计算电磁学的研究成果可以看到，支配快速方法的思想有许多：有的利用特定基函数的设计，如设计宏基函数(Macro Basis Functions)[61]、特征基函数(Characteristic Basis Function，CBF)[62]、子全域基函数(sub-entire-domain Basis Function)[63]、综合函数(Synthetic-Functions，SF)[64]、高阶基函数[65-68]等，这样可以在处理某些问题时，在一定条件下降低存储需求；有的利用Green函数的数学物理特性来改变矩阵-向量积的表达形式，从而获得极高计算效率，如快速多极子算法(FMM)及它的多层版本MLFMA(多层快速多极子算法)、基于FFT的算法以及基于低秩矩阵压缩的算法等。

(1) 快速多极子算法(FMM)

1989年，V. Rokhlin提出了处理二维声波散射问题和赫姆霍兹方程的高效数值方法，后被称为快速多极子算法(FMM)[69]。该方法很快被应用于二维、三维目标的电磁散射分析中[70-73]。在那期间，FMM的各种扩展形式也得到了很大发展，如射线传播快速多极子算法(RPFMM)[73]、快速远场近似法(FAFFA)[75-77]、多层快速多极子算法(MLFMA)[78-82]等。特别是在1997年，分析电大尺寸目标的FISC(Fast Illinois Solver Code)软件的推出[83]，使快速多极子算法在处理复杂电大尺寸目标电磁散射方面的能力得到了举世公认。这些快速算法是根据球面波的加法定理，将积分方程的积分核(Green函数)展开为特殊函数的级数[84]，然后通过适当截断来改写矩阵-向量积的"远"部分的表达形式，从而实现了计算效率的极大提高。例如在MLFMA中，通过为数值模型的全体基函数建立基于八叉树数据结构的分组，实现"聚集-转移-扩散"过程，从而极大地提高矩阵-向量积的计算效率。对于表面积分方程模型，MLFMA可以将内存需求和计算复杂度分别降低到$O(N)$和$O(N\lg N)$。当频率降低时，凋落波将替代传输波占据优势，此时的MLFMA有"次波长中断"问题[85]。为克服这个困难，低频快速多级子算法得到了发展[85-93]。

(2) 基于FFT的算法

这类算法包括共轭梯度FFT算法(CG-FFT)[94-95]、自适应积分方法(AIM)[96]、预校正FFT算法(P-FFT)[97-99]、积分方程FFT算法(IE-FFT)[100-102]以及拟合Green函数FFT算法(FGG-FG-FFT)[103-104]等。这类方法通过基函数或者Green函数投影到规则笛卡儿网格节点，改变矩阵-向量积的"远"部分的表达形式，即表达为多重Toeplitz结构形式，从而可以借助FFT加速。本质上，这类方法是在空域上让每个局部几何不规则性转化为全域规则几何上的一个局部，这一转化就为快速方案的建立奠定了基础。对于面积分方程模型，基于FFT的快速算法的

内存需求和计算复杂度分别降低到 $O(N^{1.5})$ 和 $O(N^{1.5}\lg N)$[96]；对于介质目标（体积分方程模型），基于 FFT 的快速算法的内存需求和计算复杂度分别降低到 $O(N)$ 和 $O(N\lg N)$[96]。但是，对于三维表面积分方程问题，需要建立一个空间的体网格，这是 FFT 类方法复杂度略高于 MLFMA 的原因。然而，基于 FFT 的快速算法本质上是利用 Green 函数的平移不变性，这与频率无关，因而这类方法不会遭遇"次波长中断"问题。

(3) 基于低秩矩阵压缩的算法

MoM 矩阵的那些远离主对角的子矩阵是低秩矩阵（或是秩亏的），将通过数值模型的全体基函数建立基于八叉树数据结构的分组，使整个矩阵形成子矩阵的层次分组形式，每一层上那些非自作用矩阵可以通过某种分解方法表达成两个或三个低维矩阵乘积，从而既可以降低存储需求，又可以在迭代求解器中提高矩阵-向量积的计算效率。这些矩阵分解式是近似的，但精度是可控的。这类方法研究成果已有许多，如多层矩阵压缩方法（Multilevel Matrix Decomposition Algorithm，MLMDA）[105-108]、基于 SVD 分解的 IES3[109] 快速方法、多层 QR 分解算法[110]、H 矩阵方法（Hierarchical Matrices，H-Matrices）[111]、自适应交叉近似（Adaptive Cross Approximation，ACA）[112-115]、多层 UV 方法（Multilevel UV，MLUV）[116]、插值矩阵方法（Interpolation Decomposition，ID）[117-118] 等。该方法的优点是实现简单，容易集成到现有的 MoM 程序中，但它们的存储效率和计算效率都比 MLFMA 和基于 FFT 的方法低。基于低秩矩阵压缩的算法的起步较晚，目前的研究一直在进行。文献[119][120]中，用再压缩技术来提高低秩分解的效率；在文献[121]中，对于每个组只构造一个低秩压缩分解矩阵来改进现有的低秩压缩方法；在文献[122][123]中，提出一种嵌套的低秩压缩分解方法，复杂度对中低频问题可以达到 $O(N)$，而对全波分析可以达到 $O(N\lg N)$。

综上所述，基于 MoM 的快速算法已经得到了比较深入的研究，形成了几类有特色算法。随着科学技术的发展，不断地有新的挑战被提出，这就要求计算电磁学能够不断地提供新的解决方案。今天，快速算法也在与多核 CPU 平台、计算机集群、GPU/CPU 混合平台等结合[124-128]，与区域分解方法结合[129-133]，与高频方法结合等，新的思想在不断地涌现。

1.2 国内外研究现状

基于积分方程如电场积分方程（Electric Field Integral Equation，EFIE）、磁场积分方程（Magnetic Field Integral Equation，MFIE）或组合场积分方程（Combined Field Integral Equation，CFIE）的矩量法是目前用于电磁场分析的

主要方法之一。该方法的优势在于有发展比较成熟的几个算法，如 MLFMA、P-FFT、FGG-FG-FFT 等。但是，这些快速算法的优点都是以比较理想的数值模型为对象所得到的，后来人们发现在多尺度问题中，这些快速算法的优势明显下降：若保持较高的数值精度，则必须降低存储效率和计算效率；反之，若保持较高存储效率和计算效率，则必须降低数值精度。

1.2.1 电磁场多尺度问题矩量法的研究现状

多尺度问题是指目标在局部电小区域上存在几何细小属性，需要过度网格剖分以捕获目标几何特征，从而导致全域网格呈现多尺度。该问题通常发生在被电磁建模的电磁目标同时具有局部精细结构和宏观电大尺寸时，如图 1.1 所示。这种问题广泛存在于实际工程中，例如飞机、舰船上天线等目标电磁问题的分析与求解。飞机、舰船等电大平台上存在若干像天线这样的精细结构，为了能够比较准确地描述其电磁特性，需要在精细结构区域采用细密的网格剖分，从而导致网格剖分非常不均匀，并且大大增加了未知量和计算量。

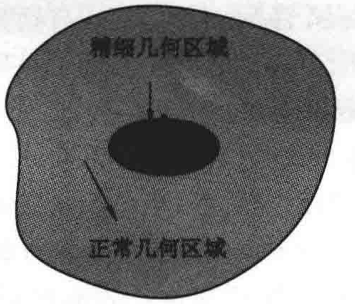

图 1.1 带有精细几何结构的物体

多层快速多极子算法在解决一般电大尺寸问题有很高的效率，但在处理多尺度问题时遇到了困难。由于最底层的立方体不能无限小（“次波长中断”），从而导致立方体包含的未知量可能“太多”，致使近场矩阵过大，因而求解效率显著下降。为了克服多层快速多极子的“次波长中断”问题，低频快速多极子方法迅速发展起来，例如：将 Green 函数的球面波展开为凋落项和传输项的方法[85-90]，这种方法需要计算角谱空间的无限积分，同时还要分六个方向进行积分。J. Aronsson 等[93]应用 Green 函数的多极子分解用于解决多尺度问题。M. Vikram 等将快速笛卡儿展开算法（ACE）与多层快速多极子算法实现了无缝的结合[134]，使得多层快速多极子的最底层得以再细分，所形成的混合算法能够发挥两种算法的各自优势。R. Mittra 等提出了特征基函数（Characteristic Basis Function，CBF）方法[135]，该方法的主要思想是将求解域分成若干个子域，

将子域中的低阶基函数进行线性组合，在按照一定的方法求得组合系数后，完成特征基函数的构建，再用于离散积分方程，从而进行快速求解。该方法特别适合于具有周期结构的问题，因为可以利用结构的周期性降低特征基函数构造的复杂度。但是若目标不具备严格的周期性，特征基函数的构造将耗费很大的计算资源。W. C. Chew 等提出了等效原理算法（Equivalent Principle Algorithm，EPA）[136]，该算法将求解域分成若干个子区域，使得不同剖分尺度的区域得以分开，再通过严格的联结方法得到整个区域的解。但是该方法在分界面上引入了额外的未知量，并且分界面的选择是决定问题求解精度的关键因素之一。北京理工大学潘小敏博士等将低秩矩阵的插值分解方法与 MLFMA 结合来处理多尺度问题[118]。南京理工大学陈如山教授等利用一些低秩矩阵压缩技术结合 MLFMA 处理多尺度问题[137-138]。电子科技大学聂在平教授等也针对多尺度电磁问题进行了研究[139-142]。

1.2.2 宽频带电磁问题矩量法的研究现状

通常所说的“多尺度”问题是指在固定工作频率条件下，目标表面网格呈现多尺度。与此问题非常相似的一个问题是 MoM 在求解目标宽带特性时遭遇的“变尺度”问题，即整个频带上网格多尺度引起的问题。MoM 是一个频域方法，在计算目标的宽带电磁特性时，必须在每个采样频点上剖分目标表面一次，对应地填充一次高阶稠密 MoM 矩阵，这是一个计算复杂度极高的计算方案。一个自然的想法是利用最高频点上的剖分网格计算整个频带上电磁特性。众所周知，一副特定电尺寸的离散网格将随工作频率降低而逐渐变细，即这样的网格方案导致整个频带上的网格多尺度。当以最高频点上的剖分网格作为整个频带上的网格时，如何实现高精度、高效的 MoM 计算就成为一个有意义的问题。一个基本的解决方案是使用 MoM 矩阵在频带上的插值，但不同的实现有不同的精度和效率，目前已有多种频率插值方案的报道。渐进波形估计（AWE）是较早提出的方案，它是关于频率函数的一种有理函数逼近方法，即 Padé 逼近（Padé Approximant）。这个方法与 Taylor 级数法类似，必须计算 MoM 矩阵元素关于频率的高阶导数，这必须通过矩阵方程的递推求解来完成，因此计算量大且数值精度有限。1998 年，C. J. Reddy 等将渐进波形估计技术结合矩量法[143]，用于计算三维导体的宽带雷达散射截面。实际上，从数学角度看，最简单、最方便的插值方法是 Lagrange 插值法。二项式插值法较早被应用于 MoM 矩阵的频率插值，但效果不佳，原因在于 MoM 矩阵元素随频率变化呈现振荡性。1988 年，E. H. Newman 提出 MoM 矩阵的改进二项式插值方法[144]，通过解析分离振荡因子，提高了插值精度。在 E. H. Newman 的基础上，K. L. Virga[145-146] 等利用

改进的方法和多项式有理函数分析了移动通信天线。A. S. Barlevy 等在改进上述方法的基础上分析了频率选择表面的响应[147-148]。J. Yeo 和 R. Mittra 将 MoM 矩阵插值方法用于分析平板结构[149]。这个方法在近区、较近区、远区采用不同法插值方法。2002 年,周后型等提出了二点三次 Hermite 插值方案[150],该方案需要填充最低频点和最高频点的矩阵和它的一阶导数矩阵,精度高于改进的二项式插值方法。2009 年,李卫东博士等提出了三点三次 Hermite 插值方案[151],其精度比二点三次 Hermite 插值方案更高,随后又提出了几种插值精度较高的扫频方法[152-153],并被电子科技大学陈益凯博士等用于分析无线通信天线[154]。电子科技大学聂在平教授等利用高阶基函数来实现宽频带的扫频,取得了很好的效果[155]。

1.3 主要研究内容

本书针对电磁场多尺度问题的矩量法进行了研究,目的在于将现有的 MLFMA、基于 FFT 的算法以及低秩矩阵压缩算法结合起来,以便在处理一个多尺度或宽频带问题时更加充分地发挥各类方法的优势,从而获得更高效率的混合快速算法。本书的具体研究内容如下:

(1) 提出一种带有混合树结构的 MLFMA,用于处理电磁场多尺度问题。与带八叉树结构的 MLFMA 相比,带有混合树结构的 MLFMA 在处理电磁场多尺度问题时能有效地降低近场矩阵的存储需求。

(2) 提出一种有基于 FFT 方法辅助的 MLFMA,用于处理电磁场多尺度问题。在该算法中,MLFMA 在宏观层面上负责整个算法的计算,而模型局部精细结构导致的过细网格部分则由某个基于 FFT 的算法来负责计算从而避免了 MLFMA 固有的“次波长中断”问题,且使整个模型的求解具有较高的数值精度和效率(存储效率和计算效率)。

(3) 提出一种带有近矩阵压缩的基于 FFT 的快速算法。在基于 FFT 的算法框架中引入基函数的层次分组方法,使近矩阵具有了块稀疏结构,从而可以将 ACA 压缩技术有效地应用于近矩阵。与传统的基于 FFT 的算法相比,带有近矩阵压缩的基于 FFT 的算法在处理电磁场多尺度问题时能有效地降低近矩阵的存储需求,且不增加矩阵-向量积的计算时间。

(4) 将 FG-FFT(或 FGG-FG-FFT)算法与近场矩阵插值技术结合,形成一个混合算法 FG-FFT-NMI (FG-FFT with Near-field Matrix Interpolation),用于快速、精确分析电磁目标的宽频带电磁散射。该方法没有“次波长中断”问题,对均匀笛卡儿网格间距和基函数展开盒子的阶都不敏感,从而能在整个频带上

实现快速、精确的扫频计算。

(5) 提出了基于高阶基函数的 IE-ODDM 算法。相比于基于低阶基函数的 IE-ODDM,基于高阶基函数的 IE-ODDM 算法使用的基函数少,能有效地降低计算机的存储需求,加快 CPU 的计算时间。

1.4 主要研究框架结构

本书分为 7 章,具体撰写安排如下:

第 1 章,主要介绍计算电磁学的研究目的和意义,计算电磁学主要采用的方法。矩量法中的主要快速算法的分类及其优缺点。综述了电磁场多尺度问题和宽频带问题的研究现状,并在此基础上给出了研究的背景。

第 2 章,介绍矩量法的基本原理和本书涉及的三类算法:快速多极子算法(FMM)、基于 FFT 的算法以及基于低秩矩阵压缩的算法。

第 3 章,介绍带有混合树结构的 MLFMA,主要包括混合树结构的建立以及在混合树结构框架下 MLFMA 中立方体之间的相互关系和相互作用。

第 4 章,介绍有基于 FFT 的算法辅助的 MLFMA,主要包括对原有八叉树结构位置的调整以及将两类快速算法结合的策略。

第 5 章,介绍带有近场矩阵压缩的基于 FFT 的算法,包括传统的基于 FFT 算法的近场矩阵结构特征与 MLFMA 近场矩阵结构特征的比较,近场矩阵能够被低秩矩阵压缩算法压缩的前提等。

第 6 章,介绍 FG-FFT 算法结合近场矩阵插值快速分析电大目标宽频带电磁特性的实现方法,包括变频 MoM 矩阵元素的公式的推导、插值方法的选择以及 FG-FFT 算法的近场矩阵的插值方法与实现。

第 7 章,介绍基于高阶基函数的 IE-ODDM 算法,包括高阶基函数、重叠型区域分解算法的理论基础和实现过程。

参考文献

[1] STRATTON J A. Electromagnetic theory[M]. New York: McGraw-Hill Companies, 1941.

[2] MORSE P M, FESHBACH H. Methods of theoretical physics[M]. New York: McGraw-Hill Companies, 1953.

[3] COLLIN R E. Field theory of guided waves[M]. New York: McGraw-Hill Companies, 1960.

[4] HARRINGTON R F. Time-harmonic electromagnetic fields [M]. New York:McGraw-Hill Companies,1960.
[5] KELLER J B. Geometrical theory of diffraction[J]. Journal of the optical society of America,1962,52:116-130.
[6] MENTZER J W. Scattering and diffraction of radio waves[M]. New York: Pergamon,1955.
[7] TAI C T. Dyadic Green's functions in electromagnetic theory [M]. Scranton: Intext Educational Publishers,1971.
[8] SKOLNIK M I. Radar handbook [M]. New York: McGraw-Hill Companies,1970.
[9] WEILAND T. Three dimensional resonator mode computation by finite difference method [J]. IEEE transactions on magnetics, 1984, 21 (6): 2340-2343.
[10] CHRIST A,HARTNAGEL H. Three-dimensional finite-difference method for the analysis of microwave-device embedding [J]. IEEE transactions on microwave theory and techniques,1987,35(8):688-696.
[11] TAFLOVE A. Computational electrodynamics:the finite-difference time-domain method[M]. Norwood:Artech House,1996.
[12] BERENGER J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of computational physics, 1944, 114 (10):185-200.
[13] 高本庆.时域有限差分法[M].北京:国防工业出版社,1995.
[14] RAO S S. The finite element method in engineering [M]. Oxford: Pergamon Press,1982.
[15] SILVESTER P P,FERRARI R L. Finite elements for electrical engineers [M]. Cambridge:Cambridge University Press,1990.
[16] JIN J M. The finite element method in electromagnetics[M]. 2nd ed. New York:John Wiley Sons,Incorporated,2002.
[17] HARRINGTON R F. Field computation by moment methods[M]. New York:McMillan,1968.
[18] WANG J H. Generalized moment methods in electromagnetics[M]. New York:Wiley,1991.
[19] ERTURK V B, ROJAS R G. Efficient computation of surface fields excited on a dielectric coated circular cylinder[J]. IEEE transactions on

magnetics,2000,48(10):1507-1516.

[20] RIUS J M,UBEDA E,PARRON J. On the testing of the magnetic field integral equation with RWG basis function in method of moments[J]. IEEE transactions on magnetics,2001,49(11):1150-1153.

[21] LEE J F,LEE R,BURKHOLDER R J. Loop star basis functions and a robust preconditioner for EFIE scattering problems[J]. IEEE transactions on magnetics,2003,51(8):1855-1863.

[22] ZHOU H X,HONG W,HUA G. An accurate approach for the calculation of MoM elements[J]. IEEE transactions on magnetics,2006,54(4):1184-1191.

[23] MICHALSKI K A,MOSIG J. Multilayered media Green's functions in integral equation formulations[J]. IEEE transactions on magnetics,1997,45(3):508-519.

[24] 周后型,童创明,洪伟. 预条件共轭梯度法在线天线阵列 RCS 分析中的应用[J]. 应用科学学报,2001,19(2):145-148.

[25] 周后型,洪伟,童创明. 预条件共轭梯度法在大型振子阵列天线 RCS 分析中的应用[J]. 电子学报,2001,12(29):1601-1604.

[26] TSANG L,KONG J A. Electromagnetic fields due to a horizontal electric dipole antenna laid on the surface of a two-layer medium[J]. IEEE transactions on antennas & propagation,1974,22:709-711.

[27] MICHALSKI K A,MOSIG J R. Multilayered media Green's functions in integral functions[J]. IEEE transactions on antennas & propagation,1997,45:508-519.

[28] LINDELL I,ALANEN E. Exact image theory for the Sommerfeld half-space problem,part Ⅰ:vertical magnetic dipole[J]. IEEE transactions on antennas & propagation,1984,32:126-133.

[29] LINDELL I,ALANEN E. Exact image theory for the Sommerfeld half-space problem,part Ⅱ:vertical magnetic dipole[J]. IEEE transactions on antennas & propagation,1984,32:841-847.

[30] LINDELL I,ALANEN E. Exact image theory for the Sommerfeld half-space problem,part Ⅲ:vertical magnetic dipole[J]. IEEE transactions on antennas & propagation,1984,32:1027-1032.

[31] 周后型. 大型电磁问题快速算法的研究[D]. 南京:东南大学,2002.

[32] LINDELL I,ALANEN E,HUJANEN A T. Exact image method for