

概率论与 数理统计

孙道德 主编

高等教育出版社

概率论与
数理统计

孙道德

概率论与 数理统计

孙道德 主编



高等教育出版社·北京

内容简介

本书共 11 章,主要内容有随机事件与概率、离散型随机变量、连续型随机变量、随机变量的数字特征、多维随机变量、极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等。全书纸质内容与数字化资源一体化设计,紧密配合。数字资源涵盖学习目标、小结、知识网络结构图等栏目,在提升课程教学效果的同时,为学生学习提供思维与探索的空间,便于学生自主学习。

本书可作为应用型本科院校非数学类专业的概率论与数理统计教材,也可作为科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 孙道德主编. -- 北京: 高等教育出版社, 2019.1

ISBN 978-7-04-050934-2

I. ①概… II. ①孙… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 252773 号

策划编辑 李晓鹏
插图绘制 于博

责任编辑 高丛
责任校对 刁丽丽

封面设计 王鹏
责任印制 陈伟光

版式设计 王艳红

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京凌奇印刷有限责任公司

开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 19
字 数 340 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>

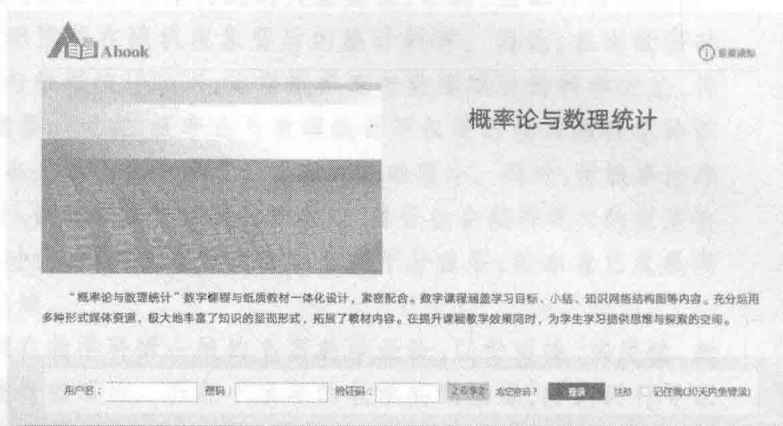
版 次 2019年1月第1版
印 次 2019年1月第1次印刷
定 价 35.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 50934-00

概率论与 数理统计

孙道德

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1255941>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录, 进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号 (20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用

<http://abook.hep.com.cn/1255941>

前 言

概率论与数理统计是以大量存在于自然界的随机现象作为研究对象,通过对同类随机现象的观察、试验、调查所得到的大量数据,采取“由部分推断总体”的统计推断方法,去认识隐藏在随机现象背后的统计规律。因此,在大数据时代,学习和了解概率论与数理统计知识,运用概率论与数理统计的科学方法,将从主观要求变成客观需要。现在,概率论与数理统计不仅是近代自然科学的基石和有力的分析工具,也是现代企业中质量管理的基础理论。同时,用概率论与数理统计方法进行设计、试验以及资源优化配置等,往往也会获得更大的经济效益。在大数据、信息化时代的今天,应用统计学显得十分重要,其本身已发展成为一个前景广阔的新领域。

本书是集作者长期在教学科研一线的丰富教学经验,以针对性、实用性、知识性和简洁性为原则进行编写的。历经十余年的教学实践锤炼,得到同行专家和教学一线老师的充分肯定,并吸取许多宝贵意见。全书体现了以下主要特色:

1. 设置了学习目标、小结、知识网络结构图等内容,指导读者更好地理解、掌握、拓展概率论与数理统计的知识,激发学习兴趣。

2. 精选的例题和习题,选取了能够将抽象的概念、理论、定理、公式解析得非常清楚的常规例题,并将其延伸分析,充分体现从具体到抽象的数学规律;筛选了部分近年来的考研题,使得例题和习题具有一定的深度和解题技巧;选取了保险、金融、经济、管理等方面的应用例题和习题,以体现概率论与数理统计在经济等社会领域内的广泛应用。

3. 在写作上注重体现概率论与数理统计的知识特点,将严谨的逻辑性与直观想象的实在性进行融合;使抽象的理论概念与具体问题建模融合,遵循从易到难、从简到繁、从抽象到具体、从特殊到一般的认知过程。通过实例分析引入抽象的概念、介绍相关的方法,循序渐进引导学生的思维从直觉想象上升到科学的抽象。

4. 以“解析数学思想、简化繁难演绎、传授技巧方法、注重实际应用”为原则,遵循着“加强基础、由浅入深、循序渐进、概括引导、学生主体”的教学规律组织编写。教材特点是:以问题为导向,突出重点和难点,构建系统知识结构,融通统计科学框架,引导应用模型建立,服务相关专业学习。

本书共分 11 章,概率论部分包括:随机事件与概率、离散型随机变量、连续型随机变量、随机变量的数字特征、多维随机变量和极限定理;数理统计部分包括:统计量及其分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等内容。重点讲解基本概念、基本理论、基本方法和应用实例。在例题习题选编上,充分注意基本概念、基本理论和基本知识的复习与巩固,同时也考虑到后续知识引导。习题分为 A、B、C 三部分,A 题是以基本概念为主的客观题,B 题是以基本知识和基本应用为主的主观分析题,C 题是巩固提高应用题,既是对已学知识的综合复习,又为后续知识的学习打下基础。题目设计是整个教学体系的重要组成部分,集中体现了本书的教学意图。

本书编写大纲、特色论证、整体策划由孙道德完成,第二、三、四章由安徽财经大学杨桂元执笔,第一、五、六章由皖西学院陈建东执笔,第七、八、九章由阜阳师范学院孙道德执笔,第十、十一章由浙江财经大学邹洁执笔,全书由孙道德进行了统稿、整合、修正。

热忱欢迎相关专家、广大教育工作者和读者提出宝贵意见,使本书不断改进、提高和完善,更好地服务教学。

编者

2017 年 11 月

目 录

第一章 随机事件与概率	1
§ 1.1 随机事件	2
§ 1.2 随机事件的概率	8
§ 1.3 条件概率与事件的独立性	15
§ 1.4 全概率公式与贝叶斯公式	20
§ 1.5 独立试验序列概型	24
习题一	27
第二章 离散型随机变量	32
§ 2.1 随机变量	32
§ 2.2 离散型随机变量及其概率分布	34
§ 2.3 常见的离散型随机变量的概率分布	39
习题二	49
第三章 连续型随机变量	52
§ 3.1 连续型随机变量及其概率分布	52
§ 3.2 常见连续型随机变量的分布	59
§ 3.3 随机变量函数的分布	71
习题三	78
第四章 随机变量的数字特征	82
§ 4.1 数学期望	82
§ 4.2 方差	90
§ 4.3 常见分布的数学期望与方差	93
习题四	99
第五章 多维随机变量	103
§ 5.1 二维随机变量的联合分布	103
§ 5.2 二维随机变量的边缘分布	109
§ 5.3 二维随机变量的条件分布	113

§ 5.4 二维随机变量的独立性	116
§ 5.5 n 维随机变量简述	120
§ 5.6 二维随机变量的数字特征	122
§ 5.7 二维随机变量函数的分布	131
习题五	140
第六章 极限定理	145
§ 6.1 大数定律	145
§ 6.2 中心极限定理	150
习题六	154
第七章 统计量及其分布	158
§ 7.1 总体与样本	158
§ 7.2 数据的整理与表现	160
§ 7.3 统计量	165
§ 7.4 三大抽样分布	169
习题七	177
第八章 参数估计	181
§ 8.1 参数的点估计	181
§ 8.2 估计量的评选标准	191
§ 8.3 参数的区间估计	195
习题八	207
第九章 假设检验	212
§ 9.1 假设检验的基本概念	212
§ 9.2 单个正态总体参数的假设检验	217
§ 9.3 两个正态总体参数的假设检验	222
§ 9.4 分布拟合检验	227
习题九	234
第十章 方差分析	238
§ 10.1 单因素试验的方差分析	238
§ 10.2 双因素试验的方差分析	244
习题十	259
第十一章 回归分析	262
§ 11.1 一元线性回归分析	263

§ 11.2 多元线性回归分析	275
§ 11.3 非线性回归化为线性回归	281
习题十一	287
附表 1 二项分布概率值表	292
附表 2 泊松分布概率值表	292
附表 3 标准正态分布概率值表	292
附表 4 χ^2 分布上侧分位数表	292
附表 5 t 分布上侧分位数表	292
附表 6 F 分布上侧分位数表	292
部分习题参考答案	292

第一章 随机事件与概率

自然现象和经济社会现象是多种多样的.但是,在一定条件下我们可以预先知道某种现象的结果.例如,一枚硬币向上抛后必然下落;在市场经济条件下,某商品供过于求,其价格必然不会上涨,等等,这类现象称为**确定性现象或必然现象**.此外,还存在着另一类现象,在一定的条件下,其结果具有偶然性,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果.例如,抛掷一枚硬币,落地后可能正面朝上,也可能反面朝上,但在每次抛掷前无法确定其结果;一射击运动员进行射击,可能击中目标,也可能击不中目标,但在射击前无法确定其是否击中;下周的股市可能会上涨,也可能会下跌,但事前无法确定,等等.像这类现象进行一次或较少几次观察,其结果是不确定的、不可预测的,但实践已经证明,进行大量重复的试验或观察,它们的结果却呈现出某种规律性.例如,多次重复抛掷一枚均匀硬币,正面朝上的次数大致占一半.像这种在大量重复试验中呈现出来的稳定性或固有规律性称为**统计规律性**.

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,称为**随机现象**(random phenomenon).概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科,它产生于17世纪.这门学科本来是伴随着保险事业的发展产生的,但是来自于赌博者的请求,却是数学家们思考概率论中问题的源泉.1654年,赌徒梅累向当时的数学家帕斯卡(Pascal)提出了合理分配赌本问题,这引发了帕斯卡与费马(Fermat)之间探讨概率论问题的多封通信,他们用不同的组合方法给出了这类问题的正确答案.荷兰数学家惠更斯(Huygens)访问巴黎时了解到帕斯卡与费马的通信研究,对这类问题产生兴趣并著《论赌博中的计算》(1657),探讨概率问题的原理,这标志着概率论作为一门科学的诞生.

本章介绍概率论的一些基本概念:事件、概率、条件概率及事件独立性等,给出计算概率的有关定理与公式:加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式等,并讨论两类最基本的概率模型——古典概型和伯努利(Bernoulli)概型.这些概念和公式是我们进一步学习的基础.

学习目标:



§1.1 随机事件

一、随机试验

为了研究随机现象的统计规律性,我们把对随机现象进行的观察和所做的科学试验,统称为试验(experiment),用字母 E 表示.下面是试验的一些例子.

E_1 : 下周股市下跌或上涨的情况;

E_2 : 掷一枚骰子,观察出现的点数;

E_3 : 向一目标射击,直至击中为止,记录射击的次数;

E_4 : 记录某大超市一天内进入的顾客人数;

E_5 : 检测一批零件的使用寿命.

显然,以上五个试验,都有一些共同的特点:

(1) 在相同的条件下,试验可以重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,而且所有可能的结果都是可以确定和罗列出来的;

(3) 在试验之前,不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中,我们将具有上述特点的试验称为随机试验,简称试验.本书以后提到的试验都是随机试验,我们通过随机试验来研究随机现象的规律性.

二、随机事件

在随机试验中每一种可能发生的现象,或者说每一件可能发生的事情都称为随机事件(random event),简称事件,并用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 来表示.例如,在试验 E_1 中, $A = \{\text{上涨}\}$, $B = \{\text{下跌}\}$; 在试验 E_5 中, $C = \{\text{寿命为 } 1000 \text{ h}\}$, $D = \{\text{寿命大于 } 1000 \text{ h}\}$ 等都是随机事件.一般地,我们用集合来表示随机事件.

在随机试验中每一可能发生的结果都是一个随机事件,它们是这个试验中最简单、不可再分的事件,称为基本事件(elemental event).例如,在试验 E_2 中 $\{\text{出现 } 1 \text{ 点}\}$, $\{\text{出现 } 2 \text{ 点}\}$, $\dots$, $\{\text{出现 } 6 \text{ 点}\}$ 都是基本事件,可以用单点集 $\{1\}$, $\{2\}$, $\dots$, $\{6\}$ 来表示.事实上,每个随机事件都可以由一个或一些基本事件组合

而成.例如,在试验 E_2 中{出现偶数点}是由{2},{4}和{6}这三个基本事件组合而成的,我们也可以用{2,4,6}来表示{出现偶数点}.如果{2},{4}和{6}这三个基本事件中任何一个发生,则{出现偶数点}这一事件发生.我们说事件 A 发生,就是指在随机试验中组成事件 A 的基本事件至少有一个发生.

在一次试验中必然会发生的事件称为**必然事件**,记为 Ω ;在一次试验中必然不会发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\emptyset$.例如,在试验 E_2 中,{点数大于或等于 1 且小于或等于 6}是必然事件,{点数为 7 点}是不可能事件;在试验 E_3 中,{至少射击 1 次}是必然事件,{射击次数小于 1}是不可能事件.

必然事件和不可能事件都是确定性事件,为了以后讨论方便,我们把它们当作特殊的随机事件.

三、样本空间

随机试验的全部可能的结果组成的集合称为**样本空间**(sample space),用 Ω 来表示,样本空间中的每一个元素都称为样本空间的一个**样本点**(sample point),用 ω 来表示.基本事件就是由一个样本点组成的单点集.

以下是前面五个随机试验的样本空间:

$$\Omega_1: \{\text{上涨,下跌}\};$$

$$\Omega_2: \{1,2,3,4,5,6\};$$

$$\Omega_3: \{1,2,3,\dots\};$$

$$\Omega_4: \{0,1,2,\dots\};$$

$$\Omega_5: \{T \mid T \geq 0\}.$$

对于任何一次随机试验,其结果必定是全部基本事件中的一个,因此,样本空间作为一个事件一定是必然事件;不可能事件不包含任何基本事件,不包含任何基本事件(样本点)的集合是空集,所以,空集作为一个事件一定是不可能事件;随机事件是含有一个或一些样本点的集合,是样本空间的子集.

四、事件间的关系与运算

研究随机试验,往往涉及两个或两个以上的随机事件,我们希望通过对简单事件的认识去研究较为复杂的事件,所以必须讨论事件间的关系和事件的运算.

由于我们用集合来表示事件,因而集合论中的关系和集合运算自然就是事件间的关系与事件运算的理论基础.下面根据概率论中“事件发生”的概念,给出这些关系和运算的概率涵义.

1. 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B **包含**(include)事件 A ,

记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

例如,在上述掷骰子试验 E_2 中,如果事件 A 表示 {出现 2 点}, 事件 B 表示 {出现偶数点}, 则事件 B 包含事件 A , 且有 $A = \{2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. 由此可以看出, 如果 $A \subset B$, 则属于事件 A 的样本点也一定属于事件 B .

包含关系有如下性质:

- (1) 对任意事件 A , 有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$;
- (2) 若 $A \subset B$, 且 $B \subset C$, 则 $A \subset C$.

2. 相等关系

如果 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立, 则称事件 A 与 B 相等或等价, 记作 $A = B$.

事件 $A = B$ 说明事件 A 与 B 中包含的基本事件相同, 并且包含的基本事件的个数也相同.

3. 和(并)运算

事件 A 与事件 B 至少有一个发生, 这一事件称为 A 与 B 的并(union)事件或和事件, 记作 $A \cup B$. A 与 B 的并事件是由属于事件 A 或者属于 B 的所有样本点组成的集合.

例如, 在上述掷骰子的试验 E_2 中, 如果事件 A 表示 {掷出的点数不多于 3 点}, 即 $A = \{1, 2, 3\}$; 事件 B 表示 {掷出的点数为偶数}, 即 $B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

并事件的概念可以推广到有限多个事件和无限可列个事件的情形. 我们称 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并事件, 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个事件发生; 称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的并事件, 表示 $A_1, A_2, \dots$ 中至少有一个事件发生.

4. 积(交)运算

事件 A 与事件 B 同时发生, 这一事件称为 A 与 B 的交(intersection)事件或积事件, 记作 $A \cap B$ 或 AB . A 与 B 的交事件是由既属于事件 A 又属于 B 的所有样本点组成的事件.

例如, 在掷骰子试验 E_2 中, 如果 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则 $AB = \{2\}$.

积事件的概念也可以推广到有限多个事件和无限可列个事件的情形. 我们称 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件, 它表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中所有事件同时发生, 也可以记为 $\prod_{i=1}^n A_i$; 称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的积事件, 它表示

$A_1, A_2, \dots$ 中所有事件同时发生,也可以记为 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. 互不相容的事件

若事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB = \emptyset$,则称事件 A 与 B 是互不相容 (exclusive) 的事件或互斥事件.如果 A 与 B 是互不相容的事件,它们必然没有共同的样本点.

类似地,如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个事件都是互不相容的,即 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$,则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容的事件组.如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容的事件组,可以将和事件 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 记为 $\sum_{i=1}^n A_i$; 如果 $A_1, A_2, \dots$ 两两互不相容,可以将和事件 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 记为 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

易知,基本事件是两两互不相容的,不可能事件与任意事件都是互不相容的两个事件.

6. 对立事件

如果事件 A 与 B 中有且仅有一个事件发生,即 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \emptyset$,则称事件 A 与 B 是互为对立 (contrary) 的事件.事件 A 的对立事件记作 $\bar{A}$,又称为 A 的逆事件,显然有, $\bar{\bar{A}} = A$.事件 A 的对立事件 $\bar{A}$ 是由样本空间 Ω 中所有不属于事件 A 的样本点构成的集合,因此,事件 A 发生等价于事件 $\bar{A}$ 不发生,事件 $\bar{A}$ 发生等价于事件 A 不发生,即在一个随机试验中事件 A 发生与事件 $\bar{A}$ 发生二者必居其一.

对立事件是互不相容的,但是,互不相容事件不一定是对立事件.例如,在掷骰子试验 E_2 中,如果事件 A 表示 {出现偶数点},事件 B 表示 {出现奇数点},事件 C 表示 {出现 2 点},则有 $\bar{A} = B$,即事件 A 与 B 是对立事件,也是互不相容事件;而事件 B 与 C 不能同时出现,是互不相容事件,但不是对立事件.

7. 差运算

事件 A 发生而事件 B 不发生,这一事件称为 A 与 B 的差 (difference) 事件,记作 $A-B$,它是由属于事件 A 但不属于 B 的所有样本点构成的集合.由对立事件的概念可知,事件 A 发生而事件 B 不发生等价于事件 A 与 $\bar{B}$ 同时发生,或者说事件 A 发生而事件 AB 不发生,即 $A-B = A\bar{B} = A-AB$.

关系式 $A-B = B-A$ 一般不成立,例如,在掷骰子试验 E_2 中,事件 $A = \{2, 4, 6\}$ 和 $B = \{2, 5\}$,则 $A-B = \{4, 6\}$ 和 $B-A = \{5\}$.

与集合一样,事件关系和事件运算可用威恩(Venn)图表示,可以帮助我们更清楚地认识事件间的关系涵义以及事件的运算结果.事件间的关系和运算可以用图 1.1.1—图 1.1.6 直观地表示.例如,在图 1.1.1 中矩形表示样本空间,圆 A 和圆 B 分别表示事件 A 和事件 B ,且事件 B 包含事件 A .其他各图中的阴影部分表示事件 A 与事件 B 的各种关系或运算.

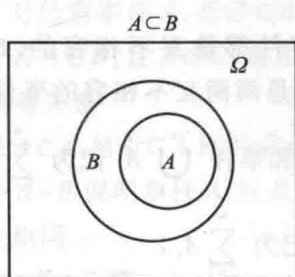


图 1.1.1

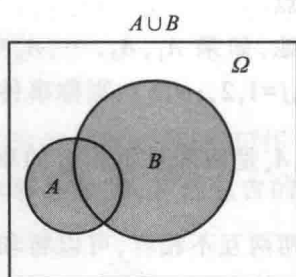


图 1.1.2

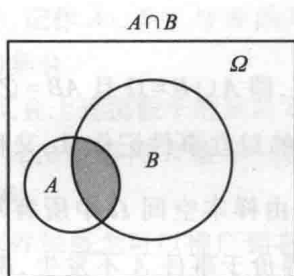


图 1.1.3

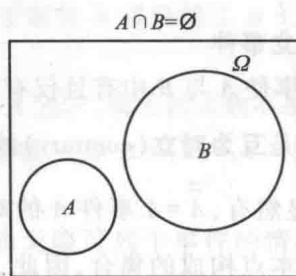


图 1.1.4

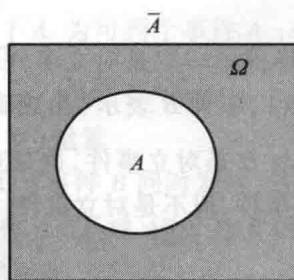


图 1.1.5

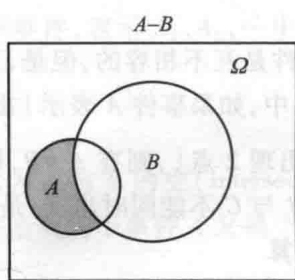


图 1.1.6

随机事件的运算满足下述运算律:

交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

德摩根律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

德摩根律表明了并事件的对立事件为各个事件的对立事件之交,交事件的对立事件为各个事件的对立事件之并.

这些运算律很容易推广到任意多个事件上去.

利用事件的运算律,可把较复杂的事件用较简单的事件表示出来,将较复杂的事件间的关系简化,这些会对以后求解概率问题带来较大的好处.

例 1.1.1 某精密部件指定甲、乙、丙三个工人生产,他们生产出合格品的事件分别记作 A, B, C , 试用 A, B, C 表示以下事件(将自然语言翻译为数学语言).

(1) 甲生产出合格品,乙、丙未生产出合格品;

(2) 三个人中恰有一个人生产出合格品;

(3) 三个人中至少有一人生产出合格品;

(4) 三个人中恰有两个人生产出合格品;

(5) 三个人中至多一个人生产出合格品;

(6) 三个人都生产出了合格品;

(7) 三个人都未生产出合格品.

解 (1) ABC ;

(2) $\overline{ABC} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$;

(3) $\overline{ABC} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$ 或 $A \cup B \cup C$;

(4) $\overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup A\overline{B}C$;

(5) $\overline{A}BC \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}BC$

或 $\overline{BC} \cup \overline{AC} \cup \overline{AB}$ (至少有两人未生产出合格品);

(6) ABC ;

(7) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}.$

例 1.1.2 某彩民连续三次购买某种彩票,事件 A_i 表示第 i 次购买时中奖 ($i=1, 2, 3$), 试用自然语言叙述下列事件: $A_1 \cup A_2, \overline{A_2}, A_3 - A_2, \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$ (将数学语言翻译成自然语言).

解 $A_1 \cup A_2$: 前两次购买中至少有一次中奖;

$\overline{A_2}$: 第二次购买未中奖;

$A_3 - A_2$: 第三次购买中奖但第二次购买未中奖;

$$\overline{A_1 A_2 A_3} = A_1 \cup A_2 \cup A_3: \text{三次购买中至少有一次中奖.}$$

将自然语言翻译成数学语言是为了应用数学理论进行推理获得逻辑结果,将数学语言翻译成自然语言是将数学运算结果解释为经济、社会现象所遵循的规律,这是应用数学的特点.

§1.2 随机事件的概率

概率论主要研究随机现象的统计规律,因此仅仅知道试验中可能出现哪些事件是不够的,还必须对事件发生的可能性大小进行度量,度量随机事件发生可能性大小的数字特征就是概率.

一、古典概率

概率论发展史上最早的研究对象就是古典概型,它具有以下两个特点:

- (1) 有限性:试验的所有结果即基本事件的总数是有限的.
- (2) 等可能性:试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有这两个特点的随机试验称为古典概型(classical probability model),也称为等可能概型.现实中,古典概型大量存在,因此它的应用很广泛.之前所说的股市试验和掷骰子试验都是古典概型.

在古典概型中,如果试验的基本事件的总数为 n ,事件 A 包含的基本事件为 m 个,则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

例 1.2.1 同时抛掷两枚均匀硬币,求出现事件{一正一反}的概率.

解 试验的样本空间 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$, 因此有 4 个基本事件且每个基本事件发生的可能性相同,所以是古典概型问题.设 A 表示事件{一正一反},则事件 A 包含两个基本事件(正,反)、(反,正),所以

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

例 1.2.2 一批产品中有 7 件正品和 3 件次品,现从中任取两次,每次任取一件产品,考虑下面两种抽样方式:(a) 第一次取出一件产品,观察是否合格后放回,混合后再取第二件.这种抽样方式称为有放回抽样(sampling with replacement).(b) 第一次取出一件产品后不放回,第二次从剩下的产品中再取一件.这种抽样方式称为无放回抽样(sampling without replacement).分别就以上两种抽