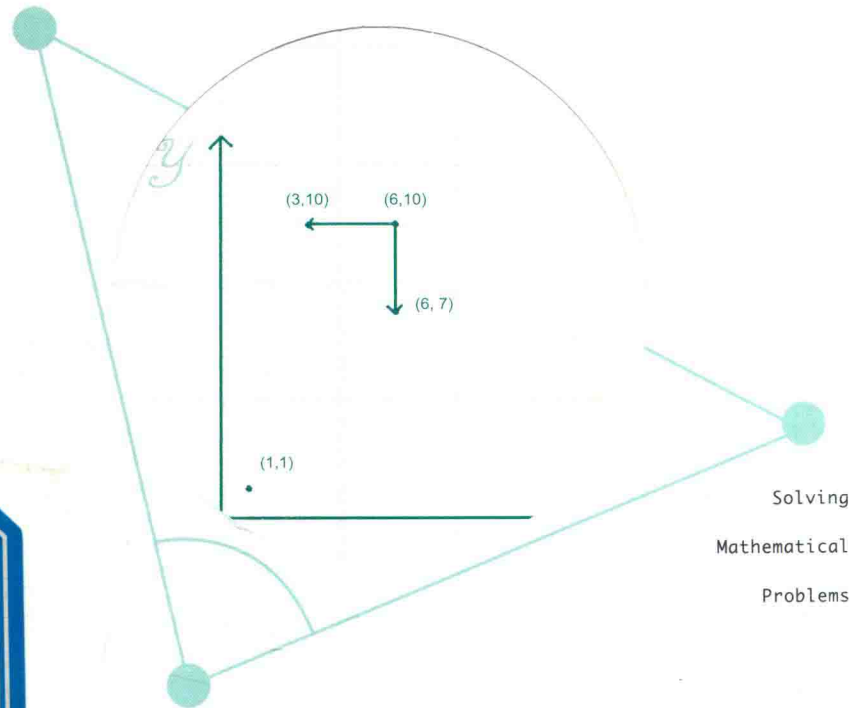


TURING 图灵新知

[澳] 陶哲轩 —— 著
李馨 —— 译

陶哲轩 教你学数学



Solving
Mathematical
Problems

A Personal Perspective



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

陶哲轩 教你学数学

[澳] 陶哲轩 —— 著
李馨 —— 译

Solving
Mathematical
Problems

A Personal Perspective

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目 (CIP) 数据

陶哲轩教你学数学 / (澳) 陶哲轩著; 李馨译. ——
北京: 人民邮电出版社, 2017.11 (2018.11 重印)
(图灵新知)

ISBN 978-7-115-46894-9

I. ①陶… II. ①陶… ②李… III. ①数学-普及读
物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 231986 号

内 容 提 要

本书是天才数学家陶哲轩的第一本书, 论述解决数学问题时会涉及的各种策略、方法, 旨在激发青少年对数学的兴趣。书中的内容包括: 数论、代数、分析、欧几里得几何、解析几何。

本书适合对数学感兴趣的青少年阅读。

-
- ◆ 著 [澳] 陶哲轩
译 李馨
责任编辑 杨琳
责任印制 彭志环
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷
 - ◆ 开本: 787×1092 1/32
印张: 5.75
字数: 106 千字 2017 年 11 月第 1 版
印数: 16 501-18 000 册 2018 年 11 月河北第 7 次印刷
著作权合同登记号 图字: 01-2016-9527 号

定价: 39.00 元

读者服务热线: (010)51095186 转 600 印装质量热线: (010) 81055316
反盗版热线: (010)81055315
广告经营许可证: 京东工商广登字 20170147 号

第 1 版前言

古希腊哲学家普罗克洛斯曾经说过：

“这就是数学：她使你感悟到灵魂是无形的；她把生命赋予数学发现；她唤醒心灵，启迪智慧；她照亮我们心中的想法；她消除我们与生俱来的愚昧和无知……”

我之所以爱上数学却是因为她非常有趣。

数学问题或者说智力谜题对于真正的数学（比如解决现实生活中的难题）而言是非常重要的，这就像寓言、童话以及趣闻轶事对于青少年了解现实生活非常重要一样。数学问题是“被净化过”的数学，已经有人给出了它的完美解答。另外，这种问题本身已经去掉了那些无关紧要的内容，它以一种有趣的、（有望）激发思考的方式呈现在人们眼前。倘若把学习数学比作勘探黄金，那么解答一个好的数学问题就像是在金矿勘查时完成了一个“捉迷藏”的过程：你需要寻找一个天然金块，而你已经了解它的形状并且确定它一定就在某个地

方，你还知道想要找到它并不是特别困难，以你的能力完全可以把它挖掘出来。此外，为了完成这项任务，你已经得到了合适的便利工具（即信息）来进行勘探工作。这个金块或许就隐藏在一个很难被人发现的地方，而你所需要的是正确的思路 and 技巧，并不只是一味地进行挖掘。

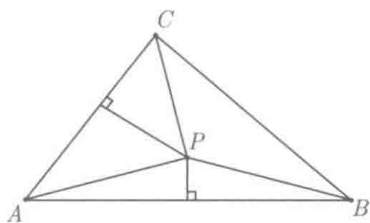
在本书中，我将选取数学不同难度、不同分支中的一些问题来进行求解。标记了星号(*)的问题难度将更高一些，原因在于，这些问题要么涉及更高深的数学知识，要么需要更富技巧性的思路才能解答。标记了双星号(**)的问题与标记星号(*)的问题类似，但难度更高。有些问题的最后会附加一些习题，这些习题可以采用类似的方法来求解，或是涉及一些类似的数学知识。在解答这些问题的过程中，我会尽可能地把用到的一些技巧展现出来。经验和知识是其中两个最重要的工具，但把它们写进书里却并非易事：只有经过长时间的积累才能获得它们。然而有些简单的技巧只需要花费较少的时间就可以学会。此外，一些分析问题的方法能够使我们更加容易地找到解决问题的突破口。某些系统性的方法能够把一个问题相继转化成几个较为简单的子问题。但另一方面，给出问题的答案并不代表一切。我们再回到金矿勘查这个比喻上，同预先进行一次仔细的调查、了解地方的地质情况，进而在较小范围内开展挖掘工作相比，用推土机在邻近区域内进行大范围的露天开采就显得非常笨拙。解答应该是简洁、可理解的，并且最

好足够优美。它还应当使人们在探索过程中感受到其中的趣味性。当我们使用教科书中的解析几何方法把一个优美的、简短的几何小问题等价地转化成一头张牙舞爪的怪物时，就无法体会到用两行向量求解所带来的那种胜利的喜悦。

下面给出欧几里得几何中的一个基本结论，我们把它作为一个典型例题：

证明一个三角形的三条垂直平分线是共点的。

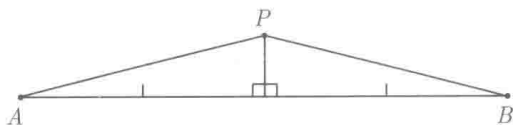
可以利用解析几何的知识找到证明这句话的突破口。自己尝试花几分钟（几个小时？）的时间来求证，之后再看看下面这个解答。



证明 把这个三角形记作 $\triangle ABC$ 。现在设线段 AB 和 AC 的垂直平分线相交于点 P 。因为点 P 在 AB 的垂直平分线上，所以 $|AP| = |PB|$ 。又因为点 P 在 AC 的垂直平分线上，所以 $|AP| = |PC|$ 。把上述两个等式结合起来，可得 $|BP| = |PC|$ 。这意味着点 P 一定在线段 BC 的垂直平分线上。因此，这三条垂直平分线是共点的。（顺便指出，点 P 还是 $\triangle ABC$ 外接

圆的圆心。) □

下面这个简图说明了当点 P 在线段 AB 的垂直平分线上时，为什么 $|AP| = |PB|$ 成立：可以利用全等三角形来说清楚这件事。



把一些显而易见的事实结合在一起，从而得到一个不太明显的事实，这种求解思路正是数学魅力的一部分。我希望你们也能体会到这种魅力。

致谢

感谢 Peter O'Halloran、Vern Treilibs 和 Lenny Ng 所提供的题目和建议。

特别感谢 Basil Rennie 对本书的修正以及给出具有独创性的、简便的求解方法。最后感谢家人对我的支持、鼓励，对本书拼写错误的纠正，以及在进度落后于预期计划时对我的督促。

本书中几乎所有的题目都来自已经出版的数学竞赛习题集。对于这些题目，我在书中标明了它们的出处，其完整的信息将在参考文献中给出。同时，我还采用了部分来自朋友以及各种数学刊物的题目，这部分题目的出处没有列出。

第 2 版前言

这本书是我 15 年前写的。毫不夸张地说，这 15 年对今天的我来说就是半辈子。在这期间，我远离家乡，来到一个陌生的城市攻读研究生学位、教书、撰写学术论文、辅导研究生，并且娶妻生子。现在我对生活和数学的看法显然与我 15 岁时是不一样的。我已经很长一段时间没有参与过解题竞赛了。如果让我现在写一本关于解题竞赛的书，那么书的内容与你此刻正在读的这本将有很大不同。

数学是一门涉及面较广的学科。随着时间的推移和经验的不断积累，我们对数学的理解和感悟会逐渐发生改变。当我还是一名小学生时，通过反复使用一些简单的法则就可以得到一个非凡的结果。数学的这种令人震惊的能力以及形式运算的抽象美，让我对其产生了浓厚的兴趣。在我读高中的时候，通过参与数学竞赛，我把数学当作一种消遣，解答那些设计巧妙的数学谜题（比如本书中的题目）以及寻找解决问题

的“窍门”是一个令人享受的过程。进入大学以后，我首次接触到现代数学的核心内容——丰富、深刻而又令人神往的数学理论和体系，敬畏感油然而生。作为一名研究生，我为拥有自己的研究课题而感到骄傲。对前人未曾解决的开放性问题提供独创性的论证使我得到了无与伦比的满足感。当我成为一名专业的研究型数学家之后，我开始考察隐藏在现代数学理论和问题背后的直观力和推动力。我惊喜地发现，即便那些非常复杂的、深奥的结果，也常常可以利用一些相当简单，甚至是常识性的原理推导出来。当你领悟到其中的一个原理，并突然看到该原理是如何阐明一个庞大的数学体系时，你会忍不住惊喜地喊出“啊哈”。这的确是一种不寻常的体验。在数学中仍然有很多领域等待我们去探索。直到最近，我了解了足够多的数学领域之后，才开始明白整个现代数学学科的努力方向，以及数学是如何与科学和其他学科联系在一起的。

这本书是在我成为一名专业数学学者之前写的，我当时并没有现在这样的见解和经验，因此书中的很多阐述有些无知，甚至幼稚。我并不想对这些地方做过多的修改，因为当时年轻的我比现在的我更能融入高中生的解题世界。但是，我在结构方面做出了一些调整：用 LaTeX 对本书重新排版；按照我个人觉得更具逻辑性的顺序对素材进行重新组织；修订了书中那些用词不准确、语句不恰当、容易引起混淆的部分和结构松散的部分。另外，我还在书中添加了部分习题。书中有一

部分内容有些陈旧（例如，费马大定理现在已经有了严谨的证明）；而我现在也意识到，采用更“先进”的数学工具可以更快速、更简洁地解决其中一些问题。然而，本书的关键不在于展示最简洁的解题方法，也不在于提供最新的结论综述。本书是为了说明，当人们第一次接触数学问题时应该怎样处理，如何努力地去尝试一些正确的思路并排除掉其他杂念，以及如何稳妥地处理问题从而最终得到满意的答案。

我非常感谢 Tony Gardiner 对本书再版所给予的鼓励和支持，同时感谢这些年来父母对我的全力支持。我所有的朋友和多年来我遇到的本书第 1 版的读者都深深地感动着我。最后，同样也是非常重要的，我要特别感谢我的父母以及 Flinders 医疗中心的计算机技术支持部门，感谢你们从我陈旧的苹果电脑中找回 15 年前的本书电子版原稿！

陶哲轩

美国加州大学洛杉矶分校数学系

2005 年 12 月

目录

第 1 章	解题的策略	1
第 2 章	数论中的例子	15
2.1	位数	18
2.2	丢番图方程	34
2.3	幂和	40
第 3 章	代数和解析中的例子	59
3.1	函数的分析	61
3.2	多项式	71
第 4 章	欧几里得几何	83
第 5 章	解析几何	115
第 6 章	其他例题	139
参考文献		167
索引		169

第 1 章

解题的策略

千里之行，始于足下。

——老子

不管你认不认同这句格言，求解一个题目总是从富有逻辑性的简单步骤开始（然后继续这样进行下去，直到最后得出答案）。但是，只要有敏锐的目光，并沿着清晰的方向坚定不移地大踏步前进，那么我们完成千里之行根本就不需要走上百万步。抽象的数学并不存在实体的限制；人们总是可以重新回到问题的开始，尝试寻找新的突破口，抑或随时返回上一步。但在解决其他类型的问题时，我们或许就不能这样随意地操作了（例如，当你迷路时试图找到回家的路）。

当然，这并不代表我们一定能够容易地求解出问题的答案。如果问题都变得容易解决，那么本书的内容将会减少很多。但让解题变得容易起来也是有可能的。

存在一些正确解题的一般性策略和角度。波利亚的经典文献（波利亚，1957）介绍了很多这方面的内容。接下来，我们将讨论其中的一些策略，并简短地阐述在下面这个问题中，每一种策略是如何应用的。

问题 1.1 一个三角形的三条边长构成公差为 d 的等差数列。该三角形的面积为 t 。求该三角形的边长和角度。

理解问题 这是什么类型的题目？一般存在三种主要的

题目类型。

- “证明……”或者“推算……”的题目。这类题目要求证明某个特定的命题为真，或者推算出某个特定表达式的值。
- “求一个……的值”或者“求所有……的值”的题目。这类题目要求我们求出满足特定条件的一个（或者所有）值。
- “是否存在……”的题目。这类题目要求你要么证明一个命题为真，要么给出一个反例（于是这类题目就变成了前两种类型题目中的一个）。

题目的类型是非常重要的，因为它决定了解题的根本方法。“证明……”或者“推算……”的题目要从给定的信息入手，目标是推导出某个命题为真或者求出某个表达式的值。一般来说，这类题目要比另外两类题目更容易些，原因在于这类题目有一个明确可见的目标，从而让我们能够有意识地根据这个目标来求解。“求一个……的值”的题目则更具有偶然性，我们通常必须先猜出一个可能正确的答案，然后对它进行适当的调整，从而使其更接近正确答案；我们也可以改变目标对象必须满足的条件，从而使改变后的条件更容易满足。“是否存在……”的题目一般难度最大，因为必须先确定这样的对象是否存在。如果存在这样的对象，那么要给出证明；否则，就给出一个反例。

当然，并不是所有的题目都可以简单地划分到这三种类型中。但是，当求解一个题目时，一般的题目分类有助于我们选择合适的基本解题策略。例如，如果试图解决“在这个城市中找一家旅馆过夜”这样一个问题，那么应当把要求改为“在5公里范围之内，找到一家有空闲房间的旅馆，并且住一晚的房费不能超过100美元”，接下来使用排除法去找满足条件的旅馆就行了。这种策略要比证明这样的旅馆存在或不存在好得多；同时，这种策略可能也比随便找一家旅馆，然后试图证明可以在该旅馆中过夜要好。

在问题1.1中，我们遇到的是一个“推算……”类型的题目。这需要在给定若干变量的前提下求出几个未知量。这就提示我们应当使用代数方法而非几何方法来求解。通过建立关联 d 、 t 以及三角形边和角的多个方程，最终求解出未知量。

读懂信息 题目中给出了哪些信息？一般来说，在一个题目中会给出若干个满足某些特定条件的对象。想要读懂这些信息，需要弄清楚这些对象和条件之间是如何相互作用的。集中精力选择合适的技巧和符号，对解题来说是非常重要的。例如在问题1.1中，能够获取的信息有：这是一个三角形，三角形的面积以及该三角形的三条边长构成了一个公差为 d 的等差数列。因为已知的是一个三角形，而要考察的是该三角形的边长和面积，所以需要使用与边长、角度和面积相关的定理来处理这个题目：比如正弦法则、余弦法则以及面

积公式。另外，由于题目涉及等差数列，于是我们将使用一些符号来说明该数列。譬如，三角形的三条边长可以分别表示成 a 、 $a + d$ 和 $a + 2d$ 。

明确目标 我们想要达到的目标是什么？这个目标可能是求出某个对象的值，证明某个命题为真，确定某个具有特殊性质的对象是否存在，等等。就像在“读懂信息”这个策略中提到的那样，明确目标有助于我们集中精力选取出最好的解题工具。此外，明确目标对于确立战术目的同样有很大的帮助，这能使我们更加接近问题的答案。这个例题的目标是“求出该三角形所有的边长和角度”。正如前文中所说的，这意味着我们需要的是关于边长和角度的定理及结论。这同时也明确了“找出涉及三角形的边长和角度的等式”这个战术目的。

选取恰当的符号 有了信息和目标，还必须采用一种高效的方法，把它们尽可能简单地展现出来。这通常会涉及前文中谈到的两种策略。在这个样题中，我们已经考虑到了建立关于 d 、 t 以及三角形边长和角度的等式。三角形的边长和角度还需要使用变量来表示：可以把边长分别取作 a 、 b 和 c ，同时把角度表示为 α 、 β 和 γ 。然而，利用题目中的信息可以进一步地简化这些符号：由于三角形的边长构成一个等差数列，于是我们可以使用 a 、 $a + d$ 和 $a + 2d$ 来代替 a 、 b 和 c 。但是使用形式上更加对称的符号 $b - d$ 、 b 和 $b + d$ 来表示边长要比上述符号更好。这种表示的唯一小缺陷是 b 必须大于 d 。但经

过进一步的思考，我们发现这算不上限制。实际上， $b > d$ 只不过是一个额外的信息。还可以把三个角度分别取作 α 、 β 和 $180^\circ - \alpha - \beta$ ，进而对符号做出更大的调整，但这种表示并不美观，并且在形式上也不对称，所以保持之前的符号可能是更好的选择，不过要记住 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ 。

用选取好的符号写下你所知道的信息；绘制一张图表 把所有信息都写在纸上，有如下三方面的帮助。

- (a) 你之后可以方便地参阅纸上的内容。
- (b) 当遇到困难时，你可以盯着这张纸进行思考。
- (c) 把知道的信息写下来能够激发你新的灵感和联想。

要注意的是，你没必要写过多的信息，不需要把细枝末节都写在纸上。一个折中的办法是：重点强调那些你认为最有用的内容，并把存在更多疑点的、冗余的或是疯狂的想法记录在另一张草稿纸上。我们能从样题中提取出下面这些等式和不等式。

- (自然约束) $\alpha, \beta, \gamma, t > 0$ 和 $b \geq d$ ；还可以不失一般性地假设 $d \geq 0$ 。
- (三角形的角度之和) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ 。
- (正弦法则) $(b - d)/\sin \alpha = b/\sin \beta = (b + d)/\sin \gamma$ 。
- (余弦法则) $b^2 = (b - d)^2 + (b + d)^2 - 2(b - d)(b + d) \cos \beta$ ，等等。
- (面积公式) $t = (1/2)(b - d)b \sin \gamma = (1/2)(b - d)(b +$