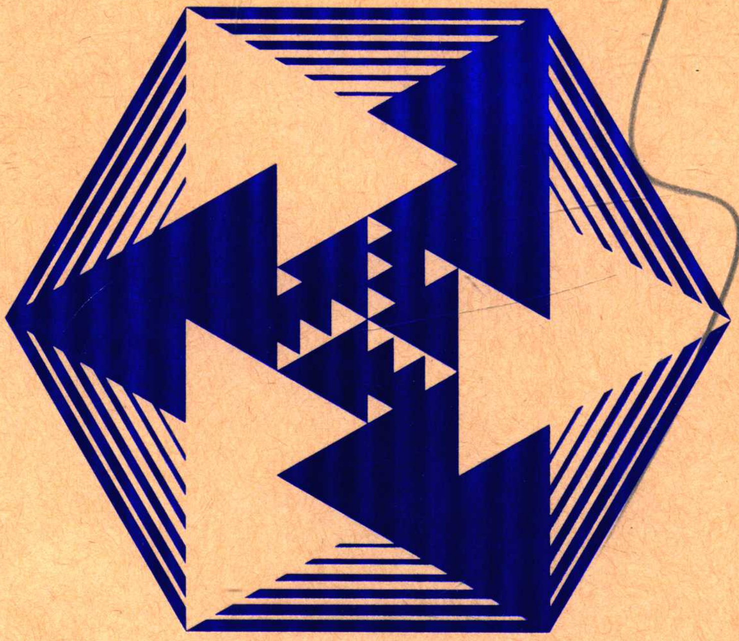
"十二五"普通高等教育
本科国家级规划教材

# 实变函数与泛函分析概要 第5版 第1册

## Elements for Functions of a Real Variable and Functional Analysis

郑维行 王声望 编



高等教育出版社

"十二五"普通高等教育
本科国家级规划教材

# 实变函数与泛函分析概要 第5版 第1册

Elements for Functions of a Real Variable and Functional Analysis

郑维行 王声望 编



高等教育出版社·北京

内容提要

本书第 5 版除了尽量保持内容精选、适用性较广外，尽力做到可读性强，便于备课、讲授及学习。修订时吸收了教学中的建议，增添了少量重要内容、例题与习题，一些习题还给出提示。

全书分两册。第 1 册包含集与点集、勒贝格测度、可测函数、勒贝格积分与函数空间 $L^p$ 五章，第 2 册介绍距离空间、巴拿赫空间与希尔伯特空间、巴拿赫空间上的有界线性算子，以及希尔伯特空间上的有界线性算子四章。

本书每章附有小结，指出要点所在，并给出参考文献，以利进一步研习需要。习题较为丰富，供教学时选用。

本书可作为综合大学、理工大学、师范院校数学类专业的教学用书，也可作为有关研究生与自学者的参考书。学习本书的预备知识为数学分析、线性代数、复变函数的主要内容。

**图书在版编目（CIP）数据**

实变函数与泛函分析概要 . 第 1 册 / 郑维行 , 王声望编 . -- 5 版 . -- 北京 : 高等教育出版社 , 2019. 4
ISBN 978-7-04-051236-6

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①郑… ②王… Ⅲ. ①实变函数 - 高等学校 - 教材②泛函分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 011980 号

策划编辑 田 玲　责任编辑 田 玲　特约编辑 刘 荣　封面设计 张申申
版式设计 徐艳妮　插图绘制 于 博　责任校对 马鑫蕊　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京明月印务有限责任公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 15.5
字　　数 260 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　　次 1989 年 6 月第 1 版
2019 年 4 月第 5 版
印　　次 2019 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 30.00 元


物 料 号 51236-00

# 第 5 版前言

本书自 2010 年第 4 版出版以来至今已逾八年。很多老师建议能修订一次为好,多听取一线教师的建议,修正错误,改进论述,以利莘莘学子学习并适应教改的新形势。高等教育出版社与上述意见不谋而合,经与编者协商,决定 2017 年 5 月 26 日在南京召开一次教材修订会议。同时会外的一些热心教授与读者也提供了许多宝贵建议,于是编者有了修改依据。修订工作持续了数月,凡有错误或不当之处,一经指出,即行改正。我们还对一些内容的编排作了变动,对一些重要定理、概念,补充了若干例子以增进其理解与应用,各章习题均重新编序。此外,对很多重要内容给予引申,指出相关文献以供进一步学习参考。总之,一切为了读者着想。

在此我们对南京大学朱晓胜、宋国柱、梅加强、徐兴旺、栗付才、师维学、李军各位教授与魏顺吉、刘泽华、王童瑞、陈谋、王少东同学,南京师范大学徐焱、张吉慧教授,华中师范大学彭双阶教授以及高等教育出版社田玲和刘荣同志一并表示衷心感谢。正是由于他们的宝贵意见与热心协助,修订工作得以顺利完成。虽经一定努力,仍恐有新的错误与不当之处,希望广大读者与专家不吝指正。

编　者

2018 年 7 月于南京

## 第 4 版前言

本书是在第 3 版的基础上修订编写而成。自 2005 年第 3 版以来，收到很多读者提出的宝贵意见，本校师维学、代雄平、栗付才、钟承奎几位教授及南京大学 2006 届数学系的同学在教学和使用过程中，都对本书提出了不少有益的意见和建议。本次修订在充分吸收这些意见和建议的基础上，考虑到现行学时的安排，在篇幅上进行了较大的调整，增加了关于依测度基本列概念与积分列的勒贝格-维它利定理，删去广义函数、解析算子演算、酉算子、正常算子的谱分解定理等内容，习题量进行了扩充以供选用，一些要点给予特别提示以利教学，对理论的论述、安排与例证均进行了推敲使其可读性更强，便于备课、讲授与学习。同时，还注意吸取国内外一些新教材的长处。

本书第 1 版时的初稿曾得到程其襄、严绍宗、王斯雷、张奠宙、徐荣权、俞致寿教授等的细心审查与认真讨论，曾远荣、江泽坚、夏道行教授专门审阅了手稿，函数论教研室的马吉溥、苏维宜、任福贤、何泽霖、宋国柱、王巧玲、王崇祜、华茂芬等同志也协助阅读了手稿，并参加了部分修改工作。在此谨向所有对本书提出意见和建议的专家、广大教师与读者表示衷心感谢，书中一丝一毫的改进均是与他们分不开的。虽然我们作了一定的努力，但书中的谬误想必难免，盼望专家与读者们不吝指正。

编　者

2010 年 10 月

# 第3版前言

我们十分感谢很多高校教师使用本书并提出宝贵意见。感谢高等教育出版社王瑜、李蕊同志建议再一次修订本书，以适应当前教学发展需要，还要感谢尹会成、秦厚荣、丁南庆教授的很有价值的建议与支持。本次修订中我们在保留原书内容精选、适用性较广的前提下，增加了一些例题和研究生试题，补充介绍若干常用概念如勒贝格点、全密点及反演公式等，每章后附上小结并订正一些错误。不知修改是否得当，还望广大读者赐教。我们经常获悉海内外学子说：读了实变函数与泛函分析后始感分析学的一些奥妙，对学习现代数学的兴趣增强了。如本书果真对他们有所帮助，则编者的修订当不算徒劳了。最后，我们谨对高等教育出版社文小西先生的细心审校与宝贵建议表示衷心感谢，还要对ATA编辑部的朱燕同志不辞辛劳为本书作出全部打印稿表示深深谢意。

编　者<br>2004年2月于南京

# 目　　录

## — 第 1 册 —

# 第 1 册

# 第一章 集与点集

数学分析中最重要的概念之一是黎曼(B. Riemann)积分,从黎曼积分的记号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$可以看出,它含有两个要素与一个运算,即被积函数$f(x)$、积分区间$[a,b]$与积分运算.本册的中心内容是勒贝格(H. L. Lebesgue)积分,它的记号是$\int_E f(x)\mathrm{d}m$,这里$f(x)$是可测函数,$E$是欧几里得(Euclid)空间中可测集,不必是区间,而积分运算依赖于所考虑的测度$m$.这是近代积分论中最重要的一种积分,讨论这种积分不仅是为了推广黎曼积分,而且是由于它本身在运算上的灵活性,这对进一步学习近代数学是十分必要的.同时,我们可以看到,数学分析中的一些重要结果也由此得到较为精确的说明.勒贝格积分理论的产生自有它的实际背景.我们将按照集、可测集与可测函数、积分的顺序来讨论,把有关积分的各个环节逐一弄清,进而掌握积分的完整概念、积分的性质及应用.本章先由基本概念——集与点集讲起.

## §1 集及其运算

**集**或**集合**是数学中的一个基本概念.本书所研究的集合,均指具有确定内容或适合一定条件的事物的全体.对集合的这样的粗略理解不影响我们对本书主题的讨论,因而我们将不去谈集的严格定义.构成一个集的那些事物称为集的**元**或**元素**.元与集的关系是个别与整体的关系.例如,一个圆周上的点的全体成一集,它的元是点.以实数为系数的多项式全体成一集,它的元是实系数多项式.书中恒约定,对给定的集,任一元要么属于它,要么不属于它,二者必居其一.

又如,直线上的一切开区间$(a,b)$成一集(或称类),这集的元是开区间.闭区间$[0,1]$上一切连续实函数构成一集.实轴上满足$|\cos x|\geqslant 1/2$的点构成一集且具体可写为

$$\{x\in\mathbf{R}:k\pi-\pi/3\leqslant x\leqslant k\pi+\pi/3,k\in\mathbf{Z}\},$$

这里 $\mathbf{R}$ 表示实数集,$\mathbf{Z}$ 表示整数集.

本书常用拉丁文大写字母 $A,B$ 等表示集,用小写字母 $a,b$ 等表示集的元.

现在我们引进有关集的一些简单概念或术语.设 $A$ 是一个集,$a$ 是它的元,就写为 $a\in A$,读作“$a$ 属于 $A$”,它的意义与 $A$ 含有 $a$ 相同.若元 $b$ 不属于 $A$,写为 $b \overline{\in} A$ 或 $b\notin A$.对于任何集 $A$,我们恒约定 $A \overline{\in} A$,即集 $A$ 自身不能看成 $A$ 的元.

若集 $A$ 的元只有有限个,称 $A$ 为**有限集**.不含任何元的集称为**空集**,用记号 $\varnothing$ 表示.一个非空集,如果不是有限集,就称为**无限集**.

某些集之间可以有种种关系或性质.最基本的关系要算“包含”与“相等”.设 $A,B$ 是两个集,若 $A$ 的每个元都属于 $B$,称 $A$ 是 $B$ 的**子集**,记成 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,分别读作“$A$ 含于 $B$”或“$B$ 包含 $A$”.若 $A\subset B$ 且存在一个元 $x\in B$ 而 $x \overline{\in} A$,则称 $A$ 是 $B$ 的**真子集**.为了方便,规定空集 $\varnothing$ 是任何集的子集.设 $A,B$ 是两个集,若 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立,则称集合 $A$ 与 $B$ **相等**,记成 $A=B$.

设给定一集 $A$ 与一性质 $\pi$.用记号

$$\{a:a\in A,\pi(a)\}$$

表示 $A$ 中具有性质 $\pi$ 的元 $a$ 所成的集,有时简记成 $A\{\pi(a)\}$.例如,上面的一个例子可以写成

$$\left\{x:x\in\mathbf{R}\text{ 且 }|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}\right\}\text{或}\mathbf{R}\left\{x:|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

关系式 $\{a:a\in A,\pi_1(a)\}\subset\{a:a\in A,\pi_2(a)\}$ 的意义是:由性质 $\pi_1(a)$ 可以推出性质 $\pi_2(a)\,(a\in A)$.

下面引进集的运算.

**定义 1.1** 设 $A,B$ 是两个集.由 $A$ 中的元以及 $B$ 中的元全体所成的集称为 $A,B$ 的**并**,记成 $A\cup B$(图 1);就是说

$$A\cup B=\{x:x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由同时属于 $A$ 与 $B$ 两者的那些元所成的集称为 $A$ 与 $B$ 的**交**,记成 $A\cap B$(图 2),有时简写成 $AB$.即

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

由属于 $A$ 而不属于 $B$ 的那些元所成的集称为 $A$ 与 $B$ 的**差**,记成 $A\backslash B$(图 3).特别地,当 $B\subset A$ 时,差集又称为 $B$ 关于 $A$ 的**补集**,记成 $\mathscr{C}_A B$.

并集与交集概念可以推广到任意个集的情形.设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一集族,这里 $I$ 是指标集,$\alpha$ 在 $I$ 中取值,那么它们的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{a:\text{有某个 }\alpha\in I\text{ 使 }a\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{a: 对一切\ \alpha\in I\ 有\ a\in A_\alpha\}.$$

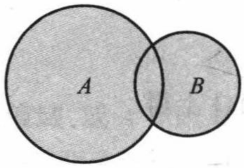



图 1　A∪B

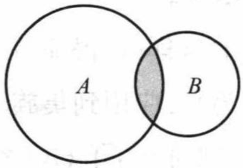



图 2　A∩B

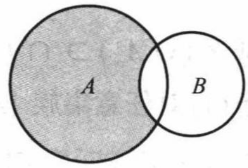



图 3　A\B

**例 1**　设 $A=\{2n-1:n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{n\in\mathbf{Z}:|n|\leqslant 3\}$.那么可求出

$$A\cup B=\{-2,0,2,2n-1:n\in\mathbf{Z}\},$$
$$A\cap B=\{-3,-1,1,3\},$$
$$A\backslash B=\{2n-1:n>2\ 或\ n\leqslant -2,n\in\mathbf{Z}\},$$
$$B\backslash A=\{-2,0,2\}.$$

我们建立下列定理.

**定理 1.1**　对于集 $E$ 与任意一集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$,恒有**分配律**成立:

$$E\cap\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha).$$

**证**　$x\in E\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$ 当且仅当 $x\in E$ 且 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$,或 $x\in E$ 且存在 $\alpha_0\in I$ 使 $x\in A_{\alpha_0}$.上述论断等价于 $x\in E\cap A_\alpha$(对某个 $\alpha=\alpha_0$),从而等价于 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$.这证明了所欲证的等式成立. ∎

当我们在研究一个问题时,如果所考虑的一切集都是 $X$ 的子集,这时便称 $X$ 为**基本集**.例如限制在数直线上研究各种不同的点集,那么数直线是基本集.对于任一基本集 $X$,差集 $X\backslash A$ 称为 $A$ **关于** $X$ **的补集**或简称为 $A$ 的**补集**,记成 $\mathscr{C}_XA$ 或 $\mathscr{C}A$.

容易看出,$X$ 关于自身的补集为空集,而空集关于 $X$ 的补集为 $X$,即 $\mathscr{C}X=\varnothing$,$\mathscr{C}\varnothing=X$.此外,任一集 $A$ 取二次补集运算又回到自己:$\mathscr{C}\mathscr{C}A=A$,且

$$X=A\cup\mathscr{C}A,$$

右边两集互不相交,即它们没有公共元.基本集这种简单分解称为 $X$ 的互斥分解.例如,设 $\mathbf{R}$ 中的一切有理数集为 $\mathbf{Q}$,无理数集为 $\mathbf{I}$,那么 $\mathbf{R}$ 便有下述互斥分解:

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{I}.$$

**定理 1.2**　对于基本集 $X$ 中的并集、交集的补集运算,有

(i) $\mathscr{C}\Big(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha\Big)=\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$;　(ii) $\mathscr{C}\Big(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha\Big)=\bigcup\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$.

**证**　设 $x\in\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)$,则 $x$ 不属于任何 $A_\alpha$.故 $x$ 属于每个 $A_\alpha$的补集 $\mathscr{C}A_\alpha$,因

此 $x\in\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$. 由此可见

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{\alpha}A_\alpha\right)\subset\bigcap_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha).$$

同理可证 $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)\supset\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$. 这样(i)得证.

由于(i)对任意集族 $\{A_\alpha\}$ 为真,应用到集族 $\{\mathscr{C}A_\alpha\}$ 上得

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{\alpha}\mathscr{C}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha}(\mathscr{C}(\mathscr{C}A_\alpha)).$$

两边取补集,注意 $\mathscr{C}(\mathscr{C}A_\alpha)=A_\alpha$,即得

$$\bigcup_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)=\mathscr{C}\left(\bigcap_{\alpha}A_\alpha\right).$$

即(ii)成立(左右调了位). ∎

所证定理称为**德摩根**(De Morgan)**法则**. 它提供一种**对偶方法**,能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去(参看后面的定理 3.3 与 3.5).

**例 2** 读者应注意,集的运算 $\cup,\cap,\backslash$ 等看来好像与数的运算 $+,\times,-$ 类似,但其实不然. 例如,考察下列两式是否正确:

(i) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$;

(ii) $A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup C$.

(i) 是正确的,证明如下:

取 $X$ 为基本集, $X=A\cup B\cup C$. 那么

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=A(B\mathscr{C}C)=(AB)\mathscr{C}C\\
&=(AB\mathscr{C}A)\cup(AB\mathscr{C}C) && (AB\mathscr{C}A=\varnothing)\\
&=AB(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}C) && (\text{利用定理 1.1})\\
&=AB\mathscr{C}(AC) && (\text{利用定理 1.2(ii)})\\
&=AB\backslash AC=\text{右边}.
\end{aligned}$$

(ii) 是不正确的. 例如,若 $C$ 中有不含于 $A$ 的元 $c$,那么右边含有 $c$,而左边恒是 $A$ 的子集,不可能含有元 $c$.

类似地,式子 $A\cup(B\backslash C)=A\cup B\backslash C$ 也不正确,读者可自行考虑.

因此,在处理集的运算时要细心些,概念要理解准确,推导要有依据,切不可一味依照数的运算法则进行.

## §2 映射 · 集的对等 · 可列集

我们知道,数学分析中所讲的函数可以看成是数集与数集之间的一种对应关系,或数集到数集的映射. 把函数概念一般化,得到下面的定义.

**定义 2.1** 设 $A,B$ 是两个非空集. 若依一定的法则 $f$,对每个 $x\in A$,在 $B$ 中有一个确定的元 $y$ 与之对应,则称 $f$ 是定义在 $A$ 上而取值于 $B$ 的**映射**,记成

$$f: A \to B,$$

并将 $x$ 与 $y$ 的关系写成 $y=f(x)$.这时称 $A$ 为 $f$ 的**定义域**,而称

$$f(A) = \{f(x): x \in A\}$$

为 $f$ 的**值域**,或 $A$ 在映射 $f$ 下的**像**.

注意,两个法则 $f$ 与 $g$ 的给出方式可能不同,如果它们有同一效果,即对一切 $x \in A$ 有 $f(x)=g(x)$,则认为它们表示同一映射.这时称映射 $f$ 与 $g$ 相等,记成 $f=g$.

设给定映射 $f: A \to B$,如果有 $B=f(A)$,就是说,$f$ 的像充满整个 $B$,则说 $f$ 是**满射或映上的**;如果对每个 $y \in B$,仅有唯一的 $x \in A$ 使 $f(x)=y$,则说 $f$ 有**逆映射** $f^{-1}$,它是定义在 $f(A)$ 上而取值于 $A$ 上的满射.当映射 $f: A \to f(A)$ 有逆映射时,称 $f$ 是**一一映射**.设 $A_0 \subset A$,映射 $g$ 在 $A_0$ 上定义且它在 $A_0$ 上的值与 $f$ 相同,则称 $g$ 是 $f$ 在 $A_0$ 上的**限制**,记为 $g=f|_{A_0}$.这时也称 $f$ 是 $g$ 在 $A$ 上的**扩张**.

设给定两个映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$,用记号 $g \circ f$ 表示 $A$ 到 $C$ 的映射,由关系 $g \circ f(x)=g(f(x))\ (x \in A)$ 定义,称为 $f$ 与 $g$ 的**复合**.设 $B_0 \subset B$,用记号 $f^{-1}(B_0)$ 表示 $B_0$ 在映射 $f$ 下的**原像**,即

$$f^{-1}(B_0)=\{x: x \in A,\ f(x) \in B_0\}.$$

容易验明,若 $B_0 \subset B$, $A_0 \subset A$,则一般有

$$f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0,\ f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0.$$

如果 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $A$ 的子集族,$\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $B$ 的子集族,同样容易验证下列关系:

$$f\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha),\ f^{-1}\left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right) = \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

今后我们常要用到**集 $E$ 的特征函数**概念,记成 $\chi_E(x)$,它的定义是

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & 若\ x \in E, \\ 0, & 若\ x \overline{\in} E. \end{cases}$$

**定义 2.2** 设 $A$, $B$ 为两个集,如果有一一映射 $f$ 存在,使 $f(A)=B$,则称 $A$ 与 $B$ 成**一一对应**或互相**对等**,记成 $A \sim B$.

对等概念是一种等价关系,它对于无限集的研究是十分重要的.关于对等,易见有下列性质:

(i) **自反性** $A \sim A$;

(ii) **对称性** 若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;

(iii) **传递性** 若 $A\sim B, B\sim C$，则 $A\sim C$.

由对等的定义可知，当两个有限集互相对等时，它们的元的个数必相同. 至于无限集，采用元素个数一词就不适宜，但对等概念仍然可用. 粗略地说，可以用对等概念对无限集的元的"个数"进行比较.

在所有无限集中，自然数集① $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 是最简单的一个. 任何一个集，若与 $\mathbf{N}$ 对等，就称为**可列集**或**可数集**. 换句话说，可列集的一切元可用自然数编号，使之成为无穷序列的形式：$a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$. 可以举出许多可列集的例子. 例如全体**正偶数集**依 $2n\leftrightarrow n(n=1,2,\cdots)$ 对应的方法与 $\mathbf{N}$ 成一一对应；$\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{N}$ 的对应方法如下：

$$0\leftrightarrow 1, (-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2}\right]\leftrightarrow n, n=2,3,\cdots,$$

其中记号 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数. 这样，正偶数集与整数集均为可列集.

再举一个稍微复杂的例子：有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列的. 其实，可把非零有理数 $r$ 写成既约分数的形式 $r=p/q$，这里 $q>0, p\neq 0, p, q$ 均为整数. 称 $n=|p|+q$ 为 $r$ 的"模". 现规定 0 的模为 1，很明显，模为 $n$ 的有理数的个数是有限的. 于是把一切有理数按模的递增顺序编组，凡是模相同的编在同一组里，然后再依组的顺序把所有有理数逐个编号. 这样，每个有理数得到了一个确定的号码，因而建立了 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{N}$ 之间的一一对应，这证明了有理数集 $\mathbf{Q}$ 的可列性.

不难看出，可列集的子集至多是可列的. 由此推知，实直线 $\mathbf{R}$ 上任一类互不相交的开区间集必为可列集或有限集. 其实，在每个区间中取一有理数与这个区间对应，则不同区间对应于不同的有理数，故所述开区间类与有理数的一子集对等，因而至多是可列的.

可以断言，可列集是无限集中"元素的个数最少"的一类集. 这句话的精确含义由下列定理表出.

**定理 2.1** 任何无限集含有一个可列子集.

**证** 设 $A$ 是任给无限集. 用归纳法，可作出 $A$ 的子集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 使每个 $A_n$ 恰含 $n$ 个元. 其实，因 $A\neq\varnothing$，可取出 $a_1\in A$，并令 $A_1=\{a_1\}$. 假定对任意自然数 $n$，用任何方式作出了 $A$ 的子集 $A_n$，它有 $n$ 个元，那么由于 $A\setminus A_n$ 非空，可取 $a_{n+1}\in A\setminus A_n$，令 $A_{n+1}=A_n\cup\{a_{n+1}\}$，则显见 $A_{n+1}$ 是 $A$ 的子集且含有 $n+1$ 个元. 由此可见，所述序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 存在. 现在对每个 $n\in\mathbf{N}$，令

$$B_n=A_{2^n}\Big\backslash\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}A_{2^k}\right).$$

① 本书自然数集定义为 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$，不含 0.