



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
数学建模与数据处理方法及其应用丛书

数学建模 与数学实验 (第三版)

汪晓银 李 治 周保平 主编



科学出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
数学建模与数据处理方法及其应用丛书

数学建模与数学实验

(第三版)

汪晓银 李 治 周保平 主 编



科学出版社

北 京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229, 010-64034315, 13501151303

内 容 简 介

本书通过实例介绍了在科学研究和数学建模竞赛中常用的数学建模方法，包括主成分回归、岭回归、偏最小二乘回归、向量自回归、logistic 回归、Probit 回归、响应面回归、线性与非线性规划、多目标规划与目标规划、动态规划、智能优化算法、网络优化、计算机仿真、排队论、微分与差分、数据预处理、支持向量机等方法。全书将数学建模技术与数学实验融为一体，引用了最新的案例，注重数学建模思想介绍，重视数学软件（MATLAB、Lingo）在实际中的应用。全书案例丰富，通俗易懂，便于自学。

本书既可以作为高校数学建模、数学实验课程的教材，也可作为本科生、研究生数学建模竞赛的培训教材，也是科学研究人员一本有价值的参考书籍。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模与数学实验 / 汪晓银, 李治, 周保平主编. —3 版. —北京: 科学出版社, 2019.3

(数学建模与数据处理方法及其应用丛书)

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-03-059745-8

I. ①数… II. ①汪… ②李… ③周… III. ①数学模型—高等学校—教材 ②高等数学—实验—高等学校—教材 IV. ①O141.4 ②O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 271484 号

责任编辑: 吉正霞 曾 莉/责任校对: 肖 婷

责任印制: 彭 超/封面设计: 苏 波

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 1 月第 一 版

2012 年 8 月第 二 版 开本: 787×1092 1/16

2019 年 3 月第 三 版 印张: 18 1/4

2019 年 3 月第一次印刷 字数: 427 000

定价: 55.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《数学建模与数学实验》(第三版)

编 委 会

主 编 汪晓银 李 治 周保平

副主编 任兴龙 齐立美 陈雅颂

编委会 (按照拼音排序)

陈雅颂 关志伟 李 彪 李 治 齐立美

任洪宇 任兴龙 谭劲英 王姗姗 汪晓银

汪秀清 吴雄华 张金凤 周保平

第三版前言

近些年来,数学建模与各学科的交叉融合水平正逐步提高.众多的科学研究机构和企业高度重视数学的应用,数学建模在大数据、人工智能等新工科领域里展现出强大的生命力,再加上一年一度的各级数学建模竞赛,推动了数学建模教学的快速发展.

为适应日益变化的数学建模需求,本书在总结多年人才培养、科技合作的实践经验的基础上,对书中内容进行了调整,将一些数学建模入门的方法调整到《数学建模方法入门及其应用》(科学出版社,汪晓银等主编)一书中,以适应初学者的需要.而本书吸收了科研或竞赛中常用且有一定难度的方法,以适应有一定基础的数学建模爱好者的学习.

本书的内容经过多年的实践,在天津工业大学、华中农业大学、塔里木大学均取得了良好的效果.自2016年开始使用本书以后,天津工业大学的数学建模成绩突飞猛进,三年内共获得全国大学生数学建模竞赛国家奖22项,美国大学生数学建模竞赛一等奖28项,2018年还获得了美国大学生数学建模竞赛O奖,实现了历史性的突破.华中农业大学是本书第一版和第二版的第一主编单位,使用本书之后,数学建模成绩长期居于湖北省前三位,全国前列.作为西部边陲的塔里木大学,最近几年的数学建模成绩也是进步神速.所有这些显著的效果充分显示了本书的实用性.

本书共分为8章,按照数学方法的属性分别设置了高级应用回归分析、实验数据分析、数学规划经典问题、现代智能优化算法简介、网络优化、计算机仿真与排队论、微分方程与差分方程模型、大数据统计初步.全书内容翔实,通俗易懂,便于自学.其重要特点是:

第一,本书所有程序都在计算机上进行过调试和优化,运行可靠;

第二,本书案例丰富、条理清晰,是我们多年来的教学总结,具有代表性;

第三,全书将建模技术与数学实验融为一体,注重数学建模思想介绍,重视数学软件(MATLAB、Lingo)在实际中的应用.

本书由汪晓银(天津工业大学)、李治(华中农业大学)、周保平(塔里木大学)共同编写.天津工业大学教练组成员汪晓银、王姗姗、张金凤、陈雅颂、吴雄华编写了第1章、第2章、第3章、第8章;华中农业大学教练组成员李治、任兴龙、谭劲英改编了第4章、第5章和第6章;塔里木大学教练组成员周保平、齐立美改编了第7章;天津工业大学电子与信息工程学院汪秀清老师以及数学建模国赛队员关志伟(机械设计制造及其自动化1601)、任洪宇(电子科学与技术1501)、李彪(计算机科学与技术1602)等同学提供了部分计算程序并对书稿进行了排版、校对.

为了方便读者更好地学习本书,我们将所有建模技术的软件实现代码放到微信公众号“数模哥”里以及主编的个人微博“数模哥汪晓银”(<https://weibo.com/wxywxq>)里,供读者学习、交流.

本书得到了天津市高等学校创新团队（非线性分析与优化及其应用）、天津市“十三五”重点学科（数学）、天津市特色学科群等负责人姚永红教授、陈汝栋教授的大力支持，在此表示感谢！

本书是我们多年来教学的总结，但书中难免有疏漏之处，恳请读者批评指正，来信请发送至邮箱 wxywxq@126.com 或者在微信公众号和微博里进行交流，不胜感谢！

编 者

2018年11月12日于天津



数模哥微信公众号二维码

第二版前言

国家之间的竞争实质上就是创新人才的竞争. 因此, 高等院校都要把培养创新人才作为提高教育质量的重要着力点. 作为全国最大的课外科技活动, 数学建模竞赛是培养创新人才有效的方式和途径之一, 它可以有效激发学生创新思维, 培养学生创新意识. 20 年来, 开设“数学建模”课程和参与数学建模竞赛的高校越来越多, 这使得数学建模的影响力越来越大, 优秀创新人才不断涌现.

然而, 仅仅是竞赛, 难以形成一种有效机制保障学生创新能力的持久与广度. 因此, 近两年来, 我们通过构建“融合+模块+层次”数学建模课程体系, 进行课程的推广与普及, 实现数学与各学科的交叉融合, 拓展数学建模应用的广度, 为学生在数学建模竞赛、科技创新、社会服务上产生原创性成果提供坚实基础.

本书正是在这种理念下进行的改版. 本书得到了省教育厅省级教研项目“农林高校数理化基础课实践教学体系的创新与实践”(编号: 2009134)和“数学建模创新人才培养模式的研究与实践”(编号: 2011150)的大力支持.

这次改版除了继续保留原教材内容翔实、通俗易懂、便于自学的特点外, 重点结合了两年来教学尝试, 对书中案例和文字的表述做了修改, 所有程序全部再次进行了调试. 本书将建模技术与数学实验融为一体, 注重数学建模思想的介绍, 重视数学软件(SAS、MATLAB、Lingo)在实际中的应用, 并努力实现数学和其他学科之间的交叉融合.

本书由汪晓银(华中农业大学)、周保平(塔里木大学)担任主编. 全书共设 9 章, 第 1 章、第 2 章的改版工作由汪晓银、齐立美(塔里木大学)负责; 第 3 章、第 4 章由李阳、朱夺宝(塔里木大学)负责; 第 5 章、第 6 章由付鹏、王伟(塔里木大学)负责; 第 7 章由杜佩、晁增福(塔里木大学)负责; 第 8 章由杨冬梅、蒋青松(塔里木大学)负责; 第 9 章由徐梅芳、周保平负责. 汪晓银、周保平审阅全稿, 并对全稿进行了排版、校对.

本书所有数学建模技术的软件实现代码放到中国数学建模网 <http://www.shumo.cn/> 大学数学实验栏目里, 供读者下载.

编 者

2012 年 7 月

第一版前言

数学的应用正向几乎所有的科学领域渗透.除了自然科学、工程技术、农业科学等领域外,还出乎意料地渗透到语言学、社会学、历史学等许多人文科学和其他领域,运用数学解决实际问题已经显得越来越重要.

“学数学,用数学”一直是我们的教学理念.1997~2008年,我们开展了以教学内容和课程体系改革为主体,以注重增强大学生“用数学”的意识,培养大学生“用数学”的能力为目标的教学改革.改革解决了教学内容与课程体系的设置,建立了完善的数学应用推广机制,每年学习数学建模的人数从1999年的15人上升到2008年的1400人.而且,最近几年我们国家建模成绩显著提升,初步显现了我们的教学改革成效.

但是我们发现,数学应用能力的培养仍然是大学数学课堂教学中最薄弱的环节之一,广大师生对数学建模技术的迫切需求,与缺乏实用有效、便于自学的教材的矛盾日益显现.因此,我们编写了这本教材.

本书得到了湖北省教改项目“农林高校数理化基础课实践教学体系的创新与实践”的大力支持,建立提高大学生的实践动手能力与创新能力的教学体系是本项目改革的重点.数学学习的目标不仅仅是锻炼学生的计算能力,更重要的是提高学生运用数学解决实际问题的能力.要提高这种能力必须大力推广和普及数学建模方法与数学软件.本书就是进行这种普及和推广所依赖的重要工具之一.

在本书中,我们依照科学研究、大学生科技创新以及国家建模竞赛所需要的数学建模方法,通过实例与算法程序设计介绍了多元统计、时间序列分析、线性与非线性规划、多目标规划与目标规划、图论、动态规划、排队论、智能优化算法、微分与差分、模糊数学、神经网络、计算机仿真、灰色系统和层次分析法等多种技术.本书内容翔实,通俗易懂,便于自学,其主要特点有:

第一,本书所有程序都在计算机上进行过调试和优化,运行可靠;

第二,本书案例是我们多年来的教学总结,具有代表性;

第三,本书案例丰富、图文并茂、条理清晰;

第四,全书将建模技术与数学实验融为一体,注重数学建模思想介绍,重视数学软件(SAS、MATLAB、Lingo)在实际中的应用.

本书由汪晓银(华中农业大学)、周保平(塔里木大学)担任主编.全书共9章,第1章、第2章介绍了统计建模与SAS编程,由汪晓银、成峰、何丽娟编写;第3章介绍了线性规划、非线性规划、多目标规划和目标规划及其Lingo编程,由任兴龙、宋双营编写;第4章介绍了图论与MATLAB编程,由周保平、任兴龙编写;第5章介绍了动态规划与排队论,由李治、齐立美(塔里木大学)编写;第6章介绍了智能优化算法,由谭劲英、王邦菊、杨前雨编写;第7章介绍了微分方程与差分方程及其MATLAB编程,由侯志敏、

徐思、周林编写；第 8 章介绍了模糊数学方法及其 MATLAB 编程，由方红、李雪菲编写；第 9 章介绍了神经网络、计算机仿真、灰色系统和层次分析法，分别由石峰、徐艳玲、汪晓银、胡汉涛（塔里木大学）编写。汪晓银、周保平审阅全稿，并对全稿进行了排版、校对。

为了方便读者更好地学习本书，我们将所有建模技术的软件实现代码放到中国数学建模网 <http://www.shumo.cn/> 大学数学实验栏目，供读者下载。

本书是集体智慧的结晶，是多年来教学的总结，但书中难免有错误之处，恳请读者批评指正。

编 者

2009 年 12 月 22 日

目 录

第 1 章 高级应用回归分析	1
1.1 普通线性回归分析	1
1.1.1 多元线性回归模型	1
1.1.2 回归方程显著性检验	2
1.1.3 回归系数显著性检验	3
1.1.4 案例分析	3
1.1.5 总结与体会	6
1.2 主成分回归分析	6
1.2.1 主成分的定义	6
1.2.2 主成分的计算	7
1.2.3 主成分回归的步骤	8
1.2.4 案例分析	8
1.2.5 总结与体会	14
1.3 岭回归分析	14
1.3.1 岭回归的概念	15
1.3.2 岭回归估计的性质	15
1.3.3 岭参数的选择	16
1.3.4 案例分析	17
1.3.5 总结与体会	20
1.4 偏最小二乘回归分析	20
1.4.1 偏最小二乘回归的基本思想	21
1.4.2 偏最小二乘回归的计算方法	21
1.4.3 偏最小二乘回归成分数的选取	24
1.4.4 案例分析	25
1.4.5 总结与体会	29
1.5 向量自回归	30
1.5.1 向量自回归模型	31
1.5.2 向量自回归的计算步骤	31
1.5.3 案例分析	34
1.5.4 总结与体会	38

第2章 实验数据分析	39
2.1 logistic 回归分析	39
2.1.1 logistic 回归模型	40
2.1.2 logistic 回归的参数估计	41
2.1.3 logistic 回归模型的检验	42
2.1.4 logistic 回归的预测	43
2.1.5 其他类型的 logistic 回归	44
2.1.6 案例分析	45
2.1.7 总结与体会	50
2.2 Probit 回归分析	50
2.2.1 Probit 回归模型	50
2.2.2 Probit 回归模型的参数估计	51
2.2.3 Probit 回归模型的检验	52
2.2.4 logistic 模型与 Probit 模型的对比	53
2.2.5 案例分析	53
2.2.6 总结与体会	54
2.3 方差分析	54
2.3.1 单因素方差分析	54
2.3.2 双因素方差分析	57
2.3.3 案例分析	60
2.3.4 总结与体会	65
2.4 响应面回归分析	65
2.4.1 二次响应面回归模型	66
2.4.2 二次响应面回归模型的检验	67
2.4.3 案例分析	69
2.4.4 总结与体会	72
第3章 数学规划经典问题	73
3.1 数学规划概述	73
3.1.1 线性规划的发展	73
3.1.2 线性规划的一般形式	73
3.1.3 规范的数学规划模型的特征	74
3.2 整数规划与 0-1 规划	74
3.2.1 整数规划与 0-1 规划的定义	74
3.2.2 案例分析	75
3.2.3 总结与体会	78
3.3 非线性规划	78
3.3.1 非线性规划模型	78

3.3.2	二次规划模型	79
3.3.3	案例分析	79
3.4	多目标规划	85
3.4.1	多目标规划的基本理论	85
3.4.2	多目标规划的常用解法	87
3.4.3	案例分析	90
3.4.4	总结与体会	91
3.5	目标规划	91
3.5.1	目标规划模型	91
3.5.2	目标规划模型的求解	95
3.5.3	总结与体会	96
3.6	动态规划	96
3.6.1	动态规划的最优原理及其算法	96
3.6.2	案例分析	98
3.6.3	总结与体会	108
第4章	现代智能优化算法简介	109
4.1	遗传算法	109
4.1.1	问题描述	109
4.1.2	问题分析	109
4.1.3	模型构建	110
4.1.4	模型求解	114
4.1.5	结果分析	117
4.1.6	总结与体会	118
4.2	蚁群算法	118
4.2.1	问题描述	119
4.2.2	问题分析	119
4.2.3	模型构建	119
4.2.4	模型求解	122
4.2.5	结果分析	125
4.2.6	总结与体会	126
4.3	贪婪算法	127
4.3.1	问题描述	128
4.3.2	问题分析	128
4.3.3	模型构建	129
4.3.4	模型求解	129
4.3.5	结果分析	131
4.3.6	总结与体会	131

4.4	模拟退火算法	132
4.4.1	问题描述	134
4.4.2	问题分析	135
4.4.3	模型构建	135
4.4.4	模型求解	136
4.4.5	结果分析	139
4.4.6	总结与体会	140
4.5	回溯法	141
4.5.1	数学理论介绍	141
4.5.2	问题描述	142
4.5.3	问题分析	142
4.5.4	模型构建	142
4.5.5	模型求解	143
4.5.6	结果分析	145
4.5.7	总结与体会	145
4.6	粒子群算法	145
4.6.1	问题描述	146
4.6.2	问题分析	147
4.6.3	模型构建	147
4.6.4	模型求解	148
4.6.5	结果分析	151
4.6.6	总结与体会	152
第5章	网络优化	153
5.1	图的基本概念	153
5.2	最短路问题	156
5.2.1	Dijkstra 算法	156
5.2.2	Floyd 算法	158
5.2.3	最短路的优化模型	161
5.2.4	总结与体会	163
5.3	最小生成树	163
5.3.1	Kruskal 避圈法	164
5.3.2	Prim 算法	166
5.3.3	最小生成树的优化模型	168
5.3.4	总结与体会	171
5.4	旅行商问题	171
5.4.1	贪婪算法(近似算法)	171
5.4.2	改良圈算法(近似算法)	173

5.4.3	旅行商问题的优化模型	176
5.4.4	总结与体会	177
5.5	着色问题	177
5.5.1	最大度数优先的 Welsh-Powell 算法 (近似算法)	178
5.5.2	着色问题的优化模型	179
5.5.3	总结与体会	181
5.6	网络流问题	181
5.6.1	最大流与 Ford-Fulkerson 标号算法	181
5.6.2	最小费用流与迭加算法	185
5.6.3	网络流问题的优化模型	188
5.6.4	总结与体会	189
5.7	大型网络模型实例	189
5.7.1	灾情巡视路线问题	189
5.7.2	送货员送货问题	193
第 6 章	计算机仿真与排队论	201
6.1	计算机仿真	201
6.1.1	准备知识: 随机数的产生	201
6.1.2	随机变量的模拟	203
6.1.3	时间步长法	205
6.1.4	事件步长法	207
6.1.5	蒙特卡罗模拟	209
6.1.6	案例分析	210
6.1.7	总结与体会	213
6.2	排队论	213
6.2.1	基本概念	214
6.2.2	排队系统的描述	215
6.2.3	排队系统的描述符号与分类	216
6.2.4	排队系统的主要数量指标	217
6.2.5	排队系统的优化目标与最优化问题	222
6.2.6	总结与体会	223
第 7 章	微分方程与差分方程模型	224
7.1	微分方程模型	224
7.1.1	微分方程模型的使用背景	224
7.1.2	微分方程模型的建立方法	224
7.1.3	案例分析	224
7.1.4	总结与体会	238

7.2	差分方程模型	239
7.2.1	差分方程模型的使用背景	239
7.2.2	差分方程的理论和解法	239
7.2.3	案例分析	240
第8章	大数据统计初步	248
8.1	大数据统计方法与原理	248
8.1.1	TXT 文件的导入与导出	248
8.1.2	Excel 文件的导入与导出	257
8.1.3	总结与体会	258
8.2	数据的预处理	258
8.2.1	插值与拟合	258
8.2.2	异常点检测	264
8.3	支持向量机	268
8.3.1	最优分类超平面	268
8.3.2	案例分析	272
8.3.3	总结与体会	273
	参考文献	274

第 1 章 高级应用回归分析

在工业、农业、医学、气象、环境以及经济、管理等诸多领域中,常常需要同时观测多个指标.当需要同时对多个随机变量的观测数据进行有效的分析和研究时,一种做法是将多个随机变量分开分析,每次分析一个变量;另一种做法是同时进行分析研究.显然,第一种做法有时是有效的,但一般来说,由于变量多,变量间的相关性无法避免,如果分开处理不仅会丢掉很多信息,而且往往也不容易取得很好的研究结果.自变量之间的多重相关性是多元分析中最为普遍且难以完全解决的问题,这个问题在许多数学建模竞赛中存在.因此,本章结合定性与定量分析,通过理论与实例介绍几种常用的旨在解决多重共线性的多元统计方法.

1.1 普通线性回归分析

多元回归分析是研究多个变量之间关系的回归分析方法,按因变量和自变量的数量对应关系可划分为一个因变量对多个自变量的回归分析(简称为“一对多”回归分析)和多个因变量对多个自变量的回归分析(简称为“多对多”回归分析);按回归模型类型可划分为线性回归分析和非线性回归分析.数学建模中建立变量之间相互影响的模型需要用到这类方法.

1.1.1 多元线性回归模型

设自变量 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 对应的观测值 $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$ 以及因变量 y 对应的观测值 y_i 满足关系式:

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

其中, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为相互独立且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的随机变量.

根据最小二乘法,由 n 组观测值 $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}, y_i)$ 确定参数 β_0 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 的估计值 b_0 和 $b_1, b_2, \dots, b_p$ 后,所得到的估计式 $\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^p b_j x_j$,称为多元回归方程.建立多元回归方程的过程以及对回归方程与回归系数所进行的显著性检验,称为多元回归分析或多元线性回归.

若将 $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$ 代入多元线性回归方程,记 $\hat{y}_i = b_0 + \sum_{j=1}^p b_j x_{ij}$,则 $\hat{y}_i$ 与 y_i 之间的偏差平方和为

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - b_0 - \sum_{j=1}^p b_j x_{ij} \right)^2$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0, \frac{\partial Q}{\partial b_j} = 0 (j=1, 2, \dots, p)$ 可得方程组

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_i x_{i1} + b_2 \sum_i x_{i2} + \dots + b_p \sum_i x_{ip} = \sum_i y_i \\ b_0 \sum_i x_{i1} + b_1 \sum_i x_{i1}^2 + b_2 \sum_i x_{i1} x_{i2} + \dots + b_p \sum_i x_{i1} x_{ip} = \sum_i x_{i1} y_i \\ \dots\dots\dots \\ b_0 \sum_i x_{ip} + b_1 \sum_i x_{ip} x_{i1} + b_2 \sum_i x_{ip} x_{i2} + \dots + b_p \sum_i x_{ip}^2 = \sum_i x_{ip} y_i \end{cases}$$

解这个方程组, 即可算出 b_0 和 $b_j (j=1, 2, \dots, p)$. 根据最小二乘法, 它们的值使上述偏差平方和 Q 取最小值. 称这个方程组为多元线性回归的正规方程组, b_0 为回归常数或截距, $b_j (j=1, 2, \dots, p)$ 为回归系数.

若记 $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} (j=1, 2, \dots, p)$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, 则由正规方程组的第一个方程可以导出:

$$\sum_{i=1}^n \left(b_0 + \sum_{j=1}^p b_j x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n y_i, \quad b_0 + \sum_{j=1}^p b_j \bar{x}_j = \bar{y}$$

因此有结论:

$$(1) \sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n y_i, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \bar{y};$$

$$(2) \text{ 当 } x_j = \bar{x}_j (j=1, 2, \dots, p) \text{ 时, } \hat{y} = \bar{y}.$$

这说明, 将 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 的 n 组观测值 $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$ 代入回归方程所得到的 n 个估计值 $\hat{y}_i$ 的平均值等于 $\bar{y}$, 将 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ 代入回归方程所得到的估计值也等于 $\bar{y}$.

1.1.2 回归方程显著性检验

与一元线性回归方程相类似, 多元线性回归方程的总平方和 SST 也可以分解为剩余平方和 SSE 与回归平方和 SSR , 即

$$SST = SSE + SSR$$

其中,

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = l_{yy}$$

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^p b_j l_{jy}$$

而 $l_{jy} = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(y_i - \bar{y}) (j=1, 2, \dots, p)$, 因此

$$SSE = l_{yy} - SSR$$