HIT

数学·统计学系列

Indefinite Equation and Its Application (Volume II)

不定方程及其应用（中）

南秀全 杜雯 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

不定方程及其应用

Indefinite Equation and Its Application (Volume II)

（中）

南秀全　杜雯　编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书为《不定方程及其应用》的中册.详细介绍了非线性不定方程(组)及其解法,其中包括因式分解法、配方法、奇偶分析法、判别式法等,还包括利用完全平方数的性质、二项式定理、费马小定理求解非线性不定方程(组).内容详细,叙述全面.

本书适合高等院校理工科师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

不定方程及其应用.中/南秀全,杜雯编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.1

ISBN 978-7-5603-7537-3

Ⅰ.①不… Ⅱ.①南… ②杜… Ⅲ.①不定方程 Ⅳ.①O122.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 166611 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　陈雅君
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 23.75　字数 479 千字
版　　次　2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-7537-3
定　　价　78.00 元

◎前言

我们知道,当一个方程中未知数的个数多于一个时,称这个方程为不定方程.一般来说,它的解往往是不确定的.例如,方程 $x+2y=3$,它的解就是不确定的.这类方程或方程组称为不定方程或不定方程组,一个不定方程总有无数组解.如果只讨论求整数系数的不定方程的整数解,那么它可能仍有无数组解,也可能有有限多组解,也可能无解.

古今中外的数学家们长期进行研究和完善的不定方程(组)是数论中最古老的一个分支.我国古代数学家们对不定方程的研究已延续数千年,成绩卓著.古代流传至今的,如韩信点兵、物不知其数、百鸡问题、余米推数等问题和解法都是十分有趣的,并曾经誉满全球,被世界各国研究不定方程者列为先声,从中汲取难以估量的营养.由于不定方程(组)的内容极其丰富,在科学技术和现实生活中应用很广,直到1600多年后的今天,对不定方程的研究仍是人们非常感兴趣的重要课题.

正因为不定方程与代数数论、代数几何、组合数学等有密切的联系,近几十年来,这个领域又有了很多重要的进展.同时,简单的或特殊的不定方程可以培养学生的思维能力和创新能力,因此,它又是近几十年以来,中外各级各类数学竞赛命题的重要内容之一.解国内外数学竞赛试题中的不定方程问题,没有固定的方法和模式,也没有普遍的方法可以遵循,只能根据具体问题进行具体分析,选择合适的方法去求解.因此,本书选择了近几十年来国内外数学竞赛中的经典试题,进行了分类讲解,供数学爱好者参考.

由于作者水平有限,书中一定会有许多不足之处,敬请广大读者批评指正.

南秀全

2018.11

◎

目录

第七章

非线性不定方程(组)及其解法

上册我们研究了一次不定方程(组)的解法及其应用. 在本册里,我们来讨论非线性不定方程(组)的解法. 非线性不定方程(组)的求解方法灵活多变,下面总结归纳几种主要的求解方法.

7.1 因式分解法

这是求非线性不定方程(组)的解的最常用的方法之一. 一般地,将所求解的方程的右边化为常数,再作质因数分解;将方程左边的代数式进行因式分解. 这样,再对比方程两边,考察因式的每种取值情况,就将原方程分离成几个更简单的方程(组),或进行求解,或证明它无解.

例 1 求方程 $xy-10(x+y)=1$ 的整数解.

解 将原方程整理,得

$$xy-10x-10y=1$$

即

$$xy-10x-10y+100=101$$

亦即

$$(x-10)(y-10)=101$$

由于整数 $x-10$ 与 $y-10$ 均为 101 的约数,所以

$$\begin{cases}x-10=101\\y-10=1\end{cases},\begin{cases}x-10=1\\y-10=101\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-10=-101\\y-10=-1\end{cases},\begin{cases}x-10=-1\\y-10=-101\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=111\\y=11\end{cases},\begin{cases}x=11\\y=111\end{cases},\begin{cases}x=-91\\y=9\end{cases},\begin{cases}x=9\\y=-91\end{cases}$$

即原方程 $xy-10(x+y)=1$ 有上述4组整数解.

例2 (2007年克罗地亚数学竞赛)求方程 $x^3+11^3=y^3$ 的全部整数解.

解 由观察显然有 $y>x$,即 $y-x>0$. 则原方程等价于

$$11^3=y^3-x^3=(y-x)(y^2+xy+x^2)$$

由于11为素数,故 $y-x$ 只能为 $1,11,11^2$ 或 11^3.

若 $y-x=1$,则

$$x^2+xy+y^2=11^3=3x^2+3x+1$$

此时方程无整数解.

若 $y-x=11$,则

$$11^2=x^2+xy+y^2=3x^2+3\cdot 11x+11^2$$

解得 $x=0,y=11$ 或 $x=-11,y=0$.

若 $y-x=11^2$,则

$$11=x^2+xy+y^2=3x^2+3\cdot 11^2x+11^4$$

因为上式左边被11整除,所以,$3x^2$ 必须能被11整除,从而必须有 $11\mid x$. 令 $x=11k(k\in\mathbf{Z})$,则

$$1=3\cdot 11k^2+3\cdot 11^2k+11^3$$

上式右边能被11整除,而左边不能,矛盾. 故此时方程无整数解.

若 $y-x=11^3$,则

$$1=x^2+xy+y^2=3x^2+3\cdot 11^3x+11^6$$

此时,$\Delta<0$,故方程无实数解.

综上所述,原方程的所有整数解为

$$\begin{cases}x=0\\y=11\end{cases},\begin{cases}x=-11\\y=0\end{cases}$$

例3 (1983年第46届莫斯科数学奥林匹克)试求出满足下述等式 $x^2=y^2+2y+13$的所有整数对(x,y).

解 已知方程可化为

$$x^2-(y+1)^2=12$$

即

$$(x+y+1)(x-y-1)=12$$

因为 $x+y+1$ 与 $x-y-1$ 有相同的奇偶性,而12是偶数,则有

$$\begin{cases}x+y+1=2\\x-y-1=6\end{cases},\begin{cases}x+y+1=6\\x-y-1=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y+1=-2\\x-y-1=-6\end{cases},\begin{cases}x+y+1=-6\\x-y-1=-2\end{cases}$$

由以上可得4组整数解

$$(x,y)=(4,-3),(4,1),(-4,1),(-4,-3)$$

例4 (1989年第30届国际数学奥林匹克候选题)求方程

$$4x^3+4x^2y-15xy^2-18y^3-12x^2+6xy+36y^2+5x-10y=0$$

的所有正整数解.

解 已知方程可化为

$$\begin{aligned}&4x^3+4x^2y-15xy^2-18y^3-12x^2+6xy+36y^2+5x-10y\\&=(x-2y)(4x^2+12xy+9y^2-12x-18y+5)\\&=(x-2y)(2x+3y-5)(2x+3y-1)\\&=0\end{aligned}$$

则 $x-2y=0$ 或 $2x+3y-5=0$ 或 $2x+3y-1=0$.

方程

$$x-2y=0$$

的正整数解为 $(x,y)=(2y,y),y\in\mathbf{N}$.

方程

$$2x+3y-5=0$$

仅有一组正整数解 $(x,y)=(1,1)$.

方程

$$2x+3y-1=0$$

没有正整数解.

于是,方程的全部正整数解为

$$\{(x,y)\}=\{(1,1)\}\cup\{(2y,y),y\in\mathbf{N}\}$$

例5 (1988年加拿大数学奥林匹克训练题)是否存在整数 x,y,z 满足条件

$$x^4+y^4+z^4=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+24$$

解 若存在整数 x,y,z 满足条件,则

$$\begin{aligned}-24&=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-(x^4+y^4+z^4)\\&=-(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)z^2-z^4+4x^2y^2\\&=-(x^2+y^2-z^2)^2+4x^2y^2\\&=(2xy+x^2+y^2-z^2)(2xy-x^2-y^2+z^2)\\&=[(x+y)^2-z^2][z^2-(x-y)^2]\\&=(x+y+z)(x+y-z)(z+x-y)(y+z-x)\end{aligned}$$

这要求 -24 能表示成4个整数 $x+y+z,x+y-z,z+x-y,y+z-x$ 的乘积的形式,而这4个数中任意两个数之差都为偶数,故这4个数具有相同的奇偶

性,由 -24 为偶数,知它们都是偶数,但这要求 $2^4 \mid 24$,矛盾.

所以,不存在符合要求的整数.

例 6 (2005 年瑞典数学奥林匹克)求方程

$$(x+y^2)(x^2+y)=(x+y)^3$$

的所有整数解.

解 原方程化为

$$x^3+x^2y^2+xy+y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$x^2y^2+xy=3xy(x+y)$$

即

$$xy(xy-3x-3y+1)=0$$

当 $xy=0$ 时,有 $x=0$ 或 $y=0$,则原方程的解为

$$\begin{cases}x=0\\y=k\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=k\\y=0\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

当 $xy-3(x+y)+1=0$ 时,有

$$(x-3)(y-3)=8$$

则有方程组

$$\begin{cases}x-3=1\\y-3=8\end{cases},\begin{cases}x-3=2\\y-3=4\end{cases},\begin{cases}x-3=4\\y-3=2\end{cases},\begin{cases}x-3=8\\y-3=1\end{cases}$$
$$\begin{cases}x-3=-1\\y-3=-8\end{cases},\begin{cases}x-3=-2\\y-3=-4\end{cases},\begin{cases}x-3=-4\\y-3=-2\end{cases},\begin{cases}x-3=-8\\y-3=-1\end{cases}$$

相应的解为 $(x,y)=(4,11),(5,7),(7,5),(11,4),(2,-5),(1,-1),(-1,1),(-5,2)$.

于是方程的整数解为 $(0,k),(k,0)(k\in\mathbf{Z})$ 和上述 8 组解.

例 7 求不定方程 $2x^2+5xy-3xz-5y+3z=5$ 的全部正整数解 (x,y,z).

解 将方程左边看作 x,y 的二次式,用十字相乘法,原方程可变为

$$(x-1)(2x+5y-3z+2)=3$$

因为 $x>0$,所以

$$\begin{cases}x-1=1\\2x+5y-3z+2=3\end{cases}\qquad ①$$

或

$$\begin{cases}x-1=3\\2x+5y-3z+2=1\end{cases}\qquad ②$$

先解方程组①,显然,$x=2$,所以 $3z-5y=3$.

故其通解为

$$y=3+3t,z=6+5t \quad (t\text{ 为任意整数})$$

这样,①的全部正整数解是

$$x=2,y=3+3t,z=6+5t \quad (t\text{ 为非负整数}) \tag{③}$$

同样可求得方程组②的全部正整数解是

$$x=4,y=3+3t,z=8+5t \quad (t\text{ 为非负整数}) \tag{④}$$

原方程的全部正整数解由③④给出.

可分解方程不同于一次方程(组),它没有完整的理论与固定的解法可循,我们难以断定一个方程能否分解. 即使能够分解,有时不知怎样分解,有时因为分解方式较多而难以选择. 这里有很多初等的技巧,解法因题而异.

例 8 (2009 年日本数学奥林匹克预赛)求满足方程 $ab+c=13,a+bc=23$ 的所有三元正整数组(a,b,c).

解 将两个方程分别相加、相减,得

$$\begin{cases}(ab+c)+(a+bc)=(b+1)(a+c)=36\\(a+bc)-(ab+c)=(b-1)(c-a)=10\end{cases}$$

因为 $b+1$ 和 $b-1$ 分别是 36 和 10 的因数,所以,$b=2,3$ 或 11.

若 $b=2$,由 $a+c=12,c-a=10$,得 $a=1,c=11$;

若 $b=3$,由 $a+c=9,c-a=5$,得 $a=2,c=7$;

若 $b=11$,由 $a+c=3,c-a=1$,得 $a=1,c=2$.

综上,$(a,b,c)=(1,2,11),(1,11,2),(2,3,7)$.

例 9 (1991 年第 25 届全苏数学奥林匹克)求方程组 $\begin{cases}xz-2yt=3\\xt+yz=1\end{cases}$ 的整数解.

解 由原方程组可得

$$(xz-2yt)^2+2(xt+yz)^2=11$$

即

$$(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11$$

因为 11 是素数,则有

$$\begin{cases}x^2+2y^2=1\\z^2+2t^2=11\end{cases} \tag{①}$$

$$\begin{cases}x^2+2y^2=11\\z^2+2t^2=1\end{cases} \tag{②}$$

由①②可得方程的 4 组整数解

$$\begin{cases}x=1\\y=0\\z=3\\t=1\end{cases},\begin{cases}x=-1\\y=0\\z=-3\\t=-1\end{cases},\begin{cases}x=3\\y=1\\z=1\\t=0\end{cases},\begin{cases}x=-3\\y=-1\\z=-1\\t=0\end{cases}$$

例 10 （1993 年第 11 届美国数学邀请赛）有多少个整数的有序四元数组 (a,b,c,d) 满足

$$0<a<b<c<d<500, a+d=b+c, bc-ad=93$$

解 由 $a+d=b+c$ 及 $0<a<b<c<d$ 可知，存在 $\delta\in\mathbf{N}$，使得

$$\begin{cases}b=a+\delta & ①\\c=d-\delta & ②\end{cases}$$

将①②代入 $bc-ad=93$，得

$$(a+\delta)(d-\delta)-ad=93$$

$$\delta(d-a-\delta)=1\times93=3\times31$$

由此可得到 4 个方程组

$$\text{I}.\begin{cases}\delta=1\\d-a-\delta=93\end{cases},\text{II}.\begin{cases}\delta=3\\d-a-\delta=31\end{cases}$$

$$\text{III}.\begin{cases}\delta=93\\d-a-\delta=1\end{cases},\text{IV}.\begin{cases}\delta=31\\d-a-\delta=3\end{cases}$$

由①②及方程组 I，得

$$\begin{cases}b=a+1\\c=d-1=93+a+1-1=93+a\\d=c+1=94+a\end{cases}$$

因为

$$a+94<500$$

所以

$$0<a<406$$

于是有 405 组 (a,b,c,d).

由①②及方程组 II，得

$$\begin{cases}b=a+3\\c=d-3=a+31\\d=c+3=a+34\end{cases}$$

因为

$$a+34<500$$

所以

$$0 < a < 466$$

于是有 465 组(a,b,c,d).

由①②及方程组Ⅲ,得

$$\begin{cases}b=a+93\\c=a+1\\d=a+94\end{cases}$$

不满足 $a<b<c<d$.

由①②及方程组Ⅳ,得

$$\begin{cases}b=a+31\\c=a+31\\d=a+62\end{cases}$$

不满足 $a<b<c<d$.

因此共有 $405+465=870$ 组(a,b,c,d).

例 11 求出所有边长为整数,且面积(的数值)等于周长的直角三角形.

解 设这个直角三角形的三边之长分别为正整数 $x,y,z(x\leqslant y<z)$. 依题意,得方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\x+y+z=\dfrac{1}{2}xy\end{cases}$$

消去 z,有

$$x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}xy-x-y\right)^2$$

即

$$(x-4)(y-4)=8$$

于是

$$(x-4)\mid 8,(y-4)\mid 8$$

当 $x<4$ 时,只能有 $x=2$ 或 $x=3$,相应的 $y=0$ 或 $y=-4$,均不可能,从而 $x-4>0$. 又 $x-4\leqslant y-4$,这样 $x-4$ 只能为 1 或 2,求得 $x=5$ 或 $x=6$,相应的 $y=12$ 或 $y=8$,于是全部解是$(x,y,z)=(5,12,13),(6,8,10)$.

例 12 求不定方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3\\x^3+y^3+z^3=3\end{cases}$$

的全部整数解.

解 从方程组消去 z,得到

$$8-9x-9y+3x^2+6xy+3y^2-x^2y-xy^2=0$$

变形为

$$8-3x(3-x)-3y(3-x)+xy(3-x)+y^2(3-x)=0$$

即

$$(3-x)(3x+3y-xy-y^2)=8$$

由此得出$(3-x)\mid 8$,从而

$$3-x=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

即$x=-5,-1,1,2,4,5,7,11$(如果有解,那么必有其中),逐一代入原方程检验,不难得出全部整数解是$(x,y,z)=(1,1,1),(-5,4,4),(4,-5,4),(4,4,-5)$.

通过分解确定解的取值范围($a\mid b$就意味着$|a|\leqslant|b|$),然后逐一验证,这也是常用方法之一.

例13 (1999年保加利亚数学奥林匹克)求所有的正整数组(x,y,z),使得y是素数,$y\nmid z$,$3\nmid z$,且$x^3-y^3=z^2$.

解 由题意,得

$$(x-y)[(x-y)^2+3xy]=z^2 \quad ①$$

因为y是素数,且$y\nmid z$,$3\nmid z$,所以,综合式①知

$$(x,y)=1,(x-y,3)=1$$

则

$$(x^2+xy+y^2,x-y)=(3xy,x-y)=1 \quad ②$$

由式①②得

$$x-y=m^2,x^2+xy+y^2=n^2,z=mn \quad (m,n\in\mathbf{N}_+)$$

故

$$3y^2=4n^2-(2x+y)^2=(2n+2x+y)(2n-2x-y)$$

又y是素数,且$2n-2x-y<2n+2x+y$,因此,有以下三种情形:

(1)$2n-2x-y=y,2n+2x+y=3y$. 解得$x=0$,舍去.

(2)$2n-2x-y=3,2n+2x+y=y^2$. 则

$$y^2-3=4x+2y=4(m^2+y)+2y=4m^2+6y$$

即

$$(y-3)^2-4m^2=12$$

解得$y=7,m=1$. 所以,$x=8,y=7,z=13$.

(3)$2n-2x-y=1,2n+2x+y=3y^2$. 则

$$3y^2-1=4x+2y=4(m^2+y)+2y=2(2m^2+3y)$$

即

$$3y^2-6y-3m^2=m^2+1$$

故 $m^2+1\equiv 0(\bmod 3)$ 与 $m^2\equiv 0,1(\bmod 3)$ 矛盾.

综上,满足条件的正整数组是唯一的,即 $(x,y,z)=(8,7,13)$.

例 14 设整数 x,y 都大于 1,求方程

$$x^y=2^z-1$$

的全部正整数解 (x,y,z).

解 显然 x^y 是奇数,从而 x 也是奇数,将方程写成

$$x^y+1=2^z \quad ①$$

这时有两种情况:

当 y 是奇数时,上式可分解为

$$(x+1)(x^{y-1}-x^{y-2}+\cdots-x+1)=2^z \quad ②$$

式②左端第二个因式是奇数(y)个奇数的和,故是奇数. 但它是 2^z 的因数,所以只能是 1. 于是式②成为

$$x+1=2^z$$

从而 $y=1$,与题设矛盾. 这就证明了当 y 为奇数时,方程无解.

当 y 为偶数时,设 $y=2k,k\geqslant 1,x^k=2l+1$. 这样

$$x^y+1=(x^k)^2+1=(2l+1)^2+1=4l(l+1)+2$$

它能被 2 整除,但不能被 4 整除,由①知,z 必须为 1(否则,若 $z\geqslant 2$,则式①的右边被 4 整除). 这就推出 $x=1$,与题设矛盾,故此时方程也无解.

例 15 求出方程

$$x^y=2^z+1$$

的全部正整数解,其中 $y>1$.

解 求解方法和上例中所用过的方法相似,分为两种情况:

当 y 是奇数时,将方程分解成

$$(x-1)(x^{y-1}+x^{y-2}+\cdots+x+1)=2^z$$

因为 x 是奇数,$y>1$,所以 $x^{y-1}+x^{y-2}+\cdots+x+1>1$ 是奇数,与上例一样,此时方程无解.

当 y 是偶数时,设 $y=2k(k\geqslant 1)$. 因 x^k 是奇数,设它为 $2l+1(l\geqslant 1)$,则原方程化为

$$(x^k)^2-1=2^z$$

即

$$4l(l+1)=2^z \quad ①$$

如果 $l>1$,那么 $l,l+1$ 这两个连续整数中必有一个是大于 1 的奇数,故有奇素数 p 整除 $l(l+1)$,但 p 能整除式①的右端,所以,$l>1$ 时方程无解. 而当 $l=1$

时，$x=3,y=2$ 及 $z=3$，于是所求的解为$(x,y,z)=(3,2,3)$.

例 14 及本例都是著名的卡塔兰(Catalan)猜想的特殊情况.

卡塔兰猜想 除了 $8=2^3,9=3^2$ 之外，没有两个连续的正整数都是完全方幂，即不定方程

$$x^m-y^n=1\quad(m>1,n>1)$$

仅有一组正整数解

$$x=3,y=2,m=2,n=3$$

例 16 (2011 年斯洛文尼亚数学奥林匹克)求所有的整数 x，使得 $9x^2-40x+39$ 为素数的幂.

解 设 $9x^2-40x+39=p^n$(p 为素数，$n\in\mathbf{N}$)，则

$$p^n=9x^2-40x+39=(9x-13)(x-3)$$

所以

$$\begin{cases}9x-13=p^k\\x-3=p^l\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}9x-13=-p^k\\x-3=-p^l\end{cases}$$

其中 $k,l\in\mathbf{N},0\leqslant l<k,n=k+l$.

(1)若$\begin{cases}9x-13=p^k\\x-3=p^l\end{cases}$，则

$$9(p^l+3)-13=p^k$$

即

$$14=p^k-9p^l=p^l(p^{k-l}-9)$$

当 $l=0$ 时，有 $p^k=23$，所以 $p=23,k=1$，从而 $x=4$.

当 $l\geqslant1$ 时，有 $p^l\mid14$. 则

$$9(3-p^l)-13=-p^k$$

所以

$$14=9p^l-p^k=p^l(9-p^{k-l})$$

因为 $9-p^{k-l}\leqslant7$，所以，$p^l\geqslant2,p^l\mid14$. 因此

$$\begin{cases}p^l=2\\9-p^{k-l}=7\end{cases}$$

故 $p=2,l=1,k=2$，从而 $x=1$. 或者

$$\begin{cases}p^l=7\\9-p^{k-l}=2\end{cases}$$

故 $p=7,l=1,k=2$,从而 $x=-4$.

因此 $x=-4,1,4,5$ 为满足题意的解.

例 17 (2005 年捷克 - 波兰 - 斯洛伐克数学竞赛)求满足方程

$$y(x+y)=x^3-7x^2+11x-3$$

的所有整数对(x,y).

解 原方程等价于

$$\begin{aligned}(2y+x)^2&=4x^3-27x^2+44x-12\\&=(x-2)(4x^2-19x+6)\\&=(x-2)[(x-2)(4x-11)-16]\end{aligned}$$

当 $x=2$ 时,$y=-1$ 满足原方程.

若 $x\neq 2$,由于$(2y+x)^2$ 是完全平方数,令 $x-2=ks^2$,其中 $k\in\{-2,-1,1,2\}$,s 为正整数. 实际上,若存在质数 p 和非负整数 m,使得 p^{2m+1} 整除 $x-2$,p^{2m+2}不能整除 $x-2$,于是,p 能整除$(x-2)(4x-11)-16$,则有 $p\mid 16$,即$p=2$.

若 $k=\pm 2$,则 $4x^2-19x+6=\pm 2n^2$,其中 n 为正整数,即

$$(8x-19)^2-265=\pm 32n^2$$

由于 $\pm 32n^2\equiv 0,\pm 2\pmod 5$,因此

$$(8x-19)^2\equiv 0,\pm 1\pmod 5$$

且 $25\nmid 265$,矛盾.

若 $k=1$,则 $4x^2-19x+6=n^2$,其中 n 为正整数,即

$$\begin{aligned}265&=(8x-19)^2-16n^2\\&=(8x-19-4n)(8x-19+4n)\end{aligned}$$

分别对

$$\begin{aligned}265&=1\times 265=5\times 53\\&=(-265)\times(-1)=(-53)\times(-5)\end{aligned}$$

四种情况讨论得到相应的 x,n,使得 $x-2=s^2$ 是完全平方数.

只有 $x=6$ 满足条件,于是 $y=3$ 或 $y=-9$.

若 $k=-1$,则 $4x^2-19x+6=-n^2$,其中 n 为正整数,即

$$265=(8x-19)^2+16n^2$$

由 $16n^2\leqslant 265$,得 $n\leqslant 4$.

当 $n=1,2$ 时,$4x^2-19x+6=-n^2$ 无整数解;

当 $n=3$ 时,得整数解 $x=1$,于是,$y=1$ 或 $y=-2$;

当 $n=4$ 时,得整数解 $x=2$,矛盾.

综上所述,满足条件的(x,y)为

$$\{(6,3),(6,-9),(1,1),(1,-2),(2,-1)\}$$

习 题 7.1

1. (2006 年太原市初中数学竞赛)求方程 $2x^2+5xy+2y^2=2\ 006$ 的所有正整数解.

解 方程两边分别分解因式,得

$$(2x+y)(x+2y)=2\times 17\times 59$$

不妨先设 $x\geqslant y\geqslant 1$,则有

$$2x+y\geqslant x+2y>x+y+1 \quad ①$$

由此,只有三种情况

$$\begin{cases}2x+y=59 & ②\\ x+2y=34 & ③\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}2x+y=118 & ④\\ x+2y=17 & ⑤\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}2x+y=1\ 003 & ⑥\\ x+2y=2 & ⑦\end{cases}$$

由式②③得 $x+y=31$.

再由

$$\begin{cases}x+y=31\\ 2x+y=59\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=28\\ y=3\end{cases}$$

由式④⑤得 $x+y=45$,与式①矛盾;

由式⑥⑦得 $x+y=335$,与式①矛盾.

故原方程的正整数解为

$$\begin{cases}x=28\\ y=3\end{cases},\begin{cases}x=3\\ y=28\end{cases}$$

2. (2013 年第 30 届希腊数学奥林匹克)求 $y=2x^2+5xy+3y^2$ 的所有整数解.

解 原方程等价于