21世纪应用型本科院校规划教材

概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULITONGJI

第二版

高　峰　刘绪庆　姜红燕　嵇绍春　编

南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

概率论与数理统计

第二版

高　峰　刘绪庆　姜红燕　嵇绍春　编

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 高峰等编. —2 版. —南京：南京大学出版社，2019.1
ISBN 978-7-305-21599-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 013464 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 概率论与数理统计(第二版)
编　　者 高　峰　刘绪庆　姜红燕　嵇绍春
责任编辑 刘　飞　蔡文彬　　编辑热线 025-83592146

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 江苏凤凰通达印刷有限公司
开　　本 787×1 092　1/16　印张 18.25　字数 445 千
版　　次 2019 年 1 月第 2 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-21599-5
定　　价 45.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：njuyuexue
销售咨询热线：(025)83594756

第二版前言

数学是人类与自然对话的一种语言，而数学公式可以看作为数学语言里的“诗经”，它是质朴的，却含义丰富、晦涩难懂，所以学生往往不是理解公式，而是套用公式。为此，本书的第二版在每一章后增加了“公式解析”内容，希望能够帮助学生提高理解公式和分析公式的能力；好的习题是数学类教材的重要组成部分，我们在保留本书第一版分层次习题的基础上，在教材的每一节后面增加了练习题，使得学生更加方便地获得针对性的练习题目，我们还增加了二维码数字资源，内容主要是习题教学视频，有利于学生自主性学习。

感谢同行们对本教材第一版的肯定和鼓励，他们指出了本书的一些错误和不足之处，提出了一些很有价值的建议。在编写过程中，我们参考了国内外许多优秀教材和著作，引用了其中的一些例题和习题，这些文献附在书后。在此，我们谨向这些文献的著者表示崇高的敬意和衷心的感谢；南京大学出版社的刘飞编辑认真校对了书稿，提出了宝贵的意见，我们向他表示衷心的感谢。

本书的第一、三、四、五、七章由高峰老师负责修改，第二章由姜红燕老师负责修改，第六章由刘绪庆老师负责修改，全书由高峰老师统稿。由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2019 年 1 月

第一版前言

为了适应本科应用型人才的培养需要，结合教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的工科类和经济管理类本科数学基础课程教学的基本要求，我们编写了这本教材。

经过多年的教学实践，我们深深体会到学生学习概率统计课程的困难：为什么要有概率密度和分布函数？指数分布的概率密度简直是从天而降，最大似然估计令人莫名其妙，假设检验更是雾里看花……这说明概率统计课程的教学困难之处主要在于概念和方法的理解上。编者虽然水平有限，但也想通过我们的努力，在一定程度上解决这种困难。具体来说，我们从以下几个方面做了努力：

1. 加强知识的应用背景

概率统计的应用性很强，对于它的许多概念，如果单纯从数学的角度来理解，往往既感到困难又不够透彻。因此本教材注意理论联系实际，注重从统计背景的角度对概念加以说明，注意选择一些应用性和时代气息比较强的例题来帮助学生理解概念。

2. 采用题解数理统计的模式

从数理统计的发展历史看，许多统计推断方法是由著名统计学家皮尔逊、费歇尔等在解决一些具体的实际问题时提出的。本教材在介绍最大似然估计和假设检验等一些统计方法时，采用了在问题解决背景下来阐释统计推断方法的思想，以期降低学生学习数理统计的难度。

3. 改革教材体系

本教材按照离散型随机变量和连续型随机变量两条线，几乎平行地介绍了一维随机变量的概率分布和数字特征、二维随机变量的概率分布和数字特征。这样做能够带来两个好处：第一，离散型随机变量比较直观从而容易被理解，学生能够比较容易地进入概率论的体系中，同时也为学生进一步学习比较抽象的连续型随机变量打下基础；第二，概率论中的主要概念在两种不同的场合下重复出现，有利于学生进行类比和巩固。

4. 分层次配备习题

每章之后安排A、B、C三套习题，A套安排了填空题和选择题，用于检查学生对知识点的理解程度；B套习题用于检查学生的基本应用能力；C套习题是一些提高题。这样安排有利于不同层次的学生进行选择。

5. 配备著名概率统计学家的介绍材料

每章之后附一段阅读材料，分别介绍了贝叶斯、伯努利、高斯、切比雪夫、皮尔逊、费歇尔和奈曼七位概率统计学家的生平简况以及他们对概率统计的重要贡献，他们能够对学生的学习兴趣和人生价值观产生正面影响。

本书的第1章由嵇绍春老师编写，第2章和第4章由姜红燕老师编写，第3章、第5章和第7章由高峰老师编写，第6章由刘绪庆老师编写，全书由高峰老师统稿。

在编写过程中，我们参考了国内外许多优秀教材和著作，引用了其中的一些例题和习题，这些文献附在书后。在此，我们谨向这些文献的著者表示崇高的敬意和衷心的感谢；南京大学出版社的沈洁编辑认真校对了书稿，提出了宝贵的意见，我们向她表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正，我们将做进一步修改。

编　者

2014年12月

目　录

特配电子资源

概率论篇

数理统计篇

概率论篇

对于一个理论而言，重要的是它的解释力量，以及它是否能经受住批判和检验。

——卡尔·波普尔

第1章
随机事件与概率

概率论与数理统计研究的对象是随机现象。所谓随机现象，是指在一定的条件下，并不总是出现相同结果的现象。如抛掷一枚硬币，结果可能是正面，也可能是反面，掷一粒骰子，结果可能是 1 点、2 点、…、6 点，每年国庆节到苏州旅游的人数，某个电视节目的收视率等，这些都是随机现象。随机现象具有两个特点：

(1) 结果不止一个；

(2) 哪一个结果出现，事先并不知道。

随机现象在自然界和人类社会中无处不在，研究随机现象中的数量规律性对于我们认识社会和自然界，有效地进行经济活动和社会活动是十分重要的。比如保险公司需要掌握人的寿命分布规律，医学需要探索基因的遗传和变异规律，企业需要研究市场需求的变化规律，等等。

概率论与数理统计是研究随机现象中的数量规律的一门学科，其中，概率论主要是研究随机现象的概率模型，数理统计是研究随机现象的数据收集与处理。

§1.1 随机事件及其运算

1.1.1 样本空间

为了研究随机现象的数量规律性，需要进行观察或者安排实验。例如，通过观察近 10 年来在国庆节期间到苏州的旅游人数，我们可以研究国庆节到苏州旅游人数的规律性；通过记录若干年来空调在一年中的春夏秋冬四个季节的销售量，我们可以了解季节对于空调销售数量的影响；而对于基因的遗传和变异规律、产品的寿命分布规律，则需要安排专业的实验来获得必要的数据。

在相同的条件下可以重复进行的关于随机现象的观察、记录、实验称为**随机试验**(random experiment)。不作特别说明时，本书所讲的试验都是指随机试验。

为了从数学上来表示试验的结果，我们引进样本空间和随机事件的概念。

把试验的每一个可能结果称为**样本点**，试验的全体样本点的集合称为该试验的**样本空间**(sample space)，用符号 Ω 表示。

例 1.1 连续抛一枚硬币三次，观察正反面出现的情况，写出这个试验的样本空间。

解 为表示简洁，令 H 表示“正面向上”，T 表示“反面向上”，则该试验的样本空间为

$$\Omega_1 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

例 1.2 掷一颗质地均匀的骰子，观察其点数，写出这个试验的样本空间。

解 $$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

例 1.3 观察每年国庆节到苏州旅游的人数，其样本空间是

$$\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots,100,\cdots,10^{10},\cdots\}$$

例 1.4 从一批灯泡中任意取出一只灯泡做试验，观察其使用寿命，写出这个试验的样本空间。

解 记灯泡的寿命为 t，则该试验的样本空间为

$$\Omega_4 = \{t \mid t \geqslant 0\}$$

1.1.2 随机事件

在研究随机现象时，我们除了关心样本点和样本空间，还要关心随机事件这个重要概念。直观上，若一个事件在每一次重复试验中既可能发生，也可能不发生，则称为随机事件。比如在例 1.1 中，记 A 表示“正面恰好出现一次”，B 表示“正面至少出现一次”，则事件 A 和事件 B 在每次试验中是否发生具有偶然性，所以它们是随机事件。请注意事件 A 和事件 B 可以和样本空间产生联系，事件 A 中包含 3 个样本点：HTT，THT，TTH；事件 B 包含 7 个样本点：HHH，HHT，HTH，THH，HTT，THT，TTH。所以事件 A 和事件 B 可表示为

$$A = \{HTT, THT, TTH\}$$
$$B = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$$

它们恰是样本空间的子集。这启发我们给予随机事件更有意义的定义。

定义 1.1 样本空间的某个子集称为**随机事件**(random event)，简称**事件**。

在例 1.2 中，事件 C_1 =“掷出点数为奇数”，事件 C_2 =“掷出点数为偶数”，则 C_1 可表示为 $C_1 = \{1, 3, 5\}$，C_2 可表示为 $C_2 = \{2, 4, 6\}$。

对于事件，我们常常称“发生”或者“不发生”，当事件 A 的某一个样本点在试验中出现了，则称事件 A 发生。

再回到例 1.1，它的样本空间包含 8 个样本点，所以它一共有

$$C_8^0 + C_8^1 + \cdots + C_8^8 = 2^8 = 256$$

个子集，表明该试验能够发生的事件一共有 256 个，这些全体事件再构成一集合，我们称之为**事件域**。

注意任何事件域都包含两个事件：$\varnothing$，Ω，分别称为**不可能事件**(impossible event)和**必然事件**(certain event)。

下面给事件之间建立两个方面的内容，即事件的关系和事件的运算，以便于我们进一步研究事件的概率。

1.1.3　事件的关系

事件的基本关系有包含、相等、互不相容(互斥)、对立等。

1. 包含(inclusion)

若事件 A 的发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记为 $A \subset B$。显然对任何事件 A，$\varnothing \subset A \subset \Omega$。

等价表述(集合的观点)：属于 A 的样本点必然属于 B。

2. 相等(equal)

若事件 A 包含于事件 B，并且事件 B 又包含于事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等。

3. 互不相容(互斥)(mutually exclusive)

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互不相容(互斥)。

等价表述：A 与 B 没有公共的样本点。

你能找到例 1.1 中与事件 A(正面恰好出现一次)互不相容的两个事件吗？

4. 对立(complementary)

若事件 A 与 B 互不相容，并且在一次试验中事件 A 与事件 B 必有一个发生，则称事件 A 与事件 B 为对立事件。

用集合的观点：A 与 B 互为补集，所以 A 的对立事件记为 $\overline{A}$。

由定义可知，两个互相对立的事件一定是互不相容事件，但反之不成立。

例 1.1 中事件 A="正面恰好出现一次"的对立事件 $\overline{A}$ 是什么？

例 1.2 中事件 C_1 ="掷出点数为奇数" 与 C_2 ="掷出点数为偶数"是对立事件吗？

用维恩(Venn)图可以直观地表示事件之间的关系(如图 1.1 所示)。

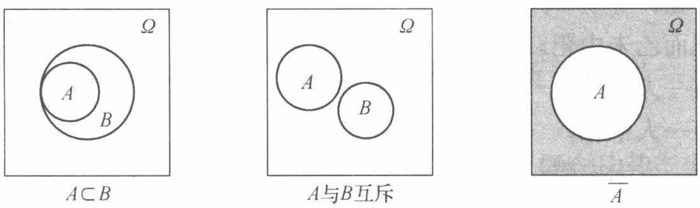

图 1.1　事件的关系

1.1.4　事件的运算

事件的基本运算有三种：和、积、差，它和集合的运算在形式上是相同的。

1. 事件的和(union)

事件 A 与事件 B 的和也称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$(或 $A+B$)，表示"A 与 B 至少有一个发生"这样的一个新事件。

集合的观点：$A \cup B$ 是由属于 A 的样本点或属于 B 的样本点所组成的集合。

2. 事件的积(intersection)

事件 A 与事件 B 的积也称为 A 与 B 的交,记为 $A \cap B$(或 AB),表示"A 与 B 都发生"这样的一个新事件。

集合的观点:AB 是由既属于 A 又属于 B 的样本点所组成的集合。

3. 事件的差(difference)

事件 A 与事件 B 的差记为 $A-B$(或 $A\backslash B$),表示"A 发生而 B 不发生"这样的一个新事件。

集合的观点:$A-B$ 是由属于 A 的样本点但是不属于 B 的样本点所组成的集合。

想一想,$A\overline{B}$ 表示什么事件,它与事件 $A-B$ 是什么关系?

用图 1.2 可以表示上述三种事件的运算,其中 $A \cup B$, AB, $A-B$ 分别为图中的阴影部分。

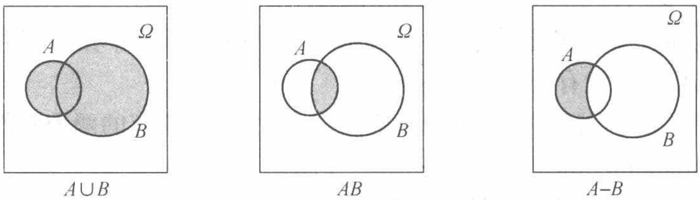

图 1.2 事件的运算

例 1.5 (1) $AB=\varnothing$, (2) $\begin{cases} AB=\varnothing \\ A \cup B=\Omega \end{cases}$ 分别表示事件 A 与事件 B 是什么关系?

解 (1) 表示 A 与 B 互不相容;(2) 表示 $B=\overline{A}$。

例 1.6 设甲、乙两人各射击一次,记 A 表示"甲中靶",B 表示"乙中靶",试用 A、B 的关系与运算来表示下列事件:

(1) 甲未中靶;

(2) 甲中靶而乙未中靶;

(3) 恰好有一人中靶;

(4) 至少有一人中靶;

(5) 至少有一人未中靶;

(6) 两人均中靶;

(7) 两人均未中靶。

解 (1) $\overline{A}$; (2) $A-B$; (3) $A\overline{B} \cup \overline{A}B$; (4) $A \cup B$; (5) $\overline{A} \cup \overline{B}$; (6) AB; (7) $\overline{A}\,\overline{B}$。

进一步地,注意到(4)和(7)、(5)和(6)互为对立事件,因此有 $\overline{A \cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A} \cup \overline{B}$, 这正是集合运算中的对偶律(又称德·摩根律),事实上,集合的运算律对于事件的运算也是成立的,比如

(1) 交换律:$A \cup B=B \cup A$, $AB=BA$;

(2) 结合律:$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$, $(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律:$(A \cup B) \cap C=AC \cup BC$, $(AB) \cup C=(A \cup C) \cap (B \cup C)$;

等等。

例 1.7　化简(1) $AB \cup A\overline{B}$，(2) $A \cup \overline{A}B$。

解　(1) $AB \cup A\overline{B} = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \Omega = A$。

(2) $A \cup \overline{A}B = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) = A \cup B$。

小　结
● 样本空间是一个集合，它描述了试验全体可能的结果。
● 随机事件也是一个集合，它是样本空间的子集。
● 事件之间有四种关系：包含、相等、互不相容和对立关系。
● 事件之间有三种基本运算：和、积、差。

练习题 1.1

1. 口袋中有黑、白、红球各一个，从中依次取出两个球，
   (1) 写出该试验的样本空间；
   (2) 写出“没有取到白球”的随机事件；
   (3) 写出“没有取到白球”的对立事件。
2. 设 A,B 为随机事件，用事件的关系和运算来表示下列事件：
   (1) A 发生而 B 不发生；
   (2) A 与 B 至少有一个发生；
   (3) A 与 B 至少有一个未发生；
   (4) A 与 B 全没发生。

§1.2　随机事件的概率

概率(probability)是事件发生可能性的一种度量，这个概念从其产生到完善经历了漫长的历史。18 世纪初，雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)的《猜度术》中就出现了现在称之为“古典概率”的概率定义，而后又产生了“几何概率”的概念，但是人们发现，古典概率和几何概率只具有局部解释力，实践中有很多情形的概率是古典概率和几何概率都无法适用的。直到 1933 年，苏联大数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)才以公理化定义的方式给出了概率的严格定义，这个定义目前被认为具有普遍解释力。

本节中我们先介绍古典概率和几何概率，然后学习概率的公理化定义，并且应用概率的公理化定义演绎出概率的基本性质。

1.2.1　古典概率(classical probability)

设试验的样本空间 Ω 含有 n 个样本点，每一个样本点的发生概率相同，$A \subset \Omega$，记

$P(A)$ 表示事件 A 的发生概率,则

$$P(A)=\frac{n(A)}{n} \tag{1.1}$$

其中 $n(A)$ 表示事件 A 中所含的样本点的数目。

古典概率虽然直观简单,却是计算概率的基础。

古典概率的计算经常涉及计数问题,为应用方便,我们列举计数理论中的三个基本公式。

(1) **排列模式** 从 n 个不同元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个元素排成一列(考虑元素之间的先后次序),称此为一个排列,此种排列的总数记为 P_n^r,

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

(2) **组合模式** 从 n 个不同元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个元素并成一组(不考虑元素之间的先后次序),称此为一个组合,此种组合的总数记为 C_n^r,

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(3) **多组组合模式** 有 n 个不同元素,把它们分成 k 个不同的组,使得各组依次有 $n_1,\cdots,n_k$ 个元素,其中 $n_1+\cdots+n_k=n$,则一共有 $\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$ 种不同的分法。

例 1.8 一个袋子中有 10 个球,分别标有号码 1 到 10,从中任意取出 3 个球,求:

(1) 取出的 3 个球中最小号码为 5 的概率;

(2) 取出的 3 个球中最大号码为 5 的概率。

解 试验是从 10 个球中取出 3 个球,观察它们的号码情况,试验发生的全体结果数目等于 $C_{10}^3=120$,这就是式(1.1)中分母的值。

(1) 记 A 表示事件"取出的 3 个球中最小号码为 5",则 $n(A)=C_5^2=10$,于是

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$$

(2) 记 B 表示事件"取出的 3 个球中最大号码为 5",则 $n(B)=C_4^2=6$,于是

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$$

古典概率在有些情况中是不适用的,比如"一个信息交换台在一天中接收到的呼叫次数",其样本空间 $\Omega=(0, 1, 2, \cdots)$,古典概率公式(1.1)中的分母为无穷大,所以失效。

例 1.9 n 个球随机地放入 N $(N\geqslant n)$ 个盒子中,若盒子的容量无限制,求"每个盒子中至多有一球"的概率。

解 记事件 A="每个盒子中至多有一球"。因为每个球都可以放入 N 个盒子中的任何一个,故每个球有 N 种放法。由乘法原理,将 n 个球放入 N 个盒子中共有 N^n 种不

同的放法。

每个盒子中至多有一个球的放法(由乘法原理得)：

$$N(N-1)\cdots(N-n+1)=\mathrm{P}_N^n$$

故

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_N^n}{N^n}$$

数学学习和研究中有一种重要的思想方法——模型迁移,它可以帮助我们解决一类问题。我们如果将 N 个房子比作 365 天,n 个球比作 n 个人的生日,于是例 1.9 可以解决有趣的“生日问题”。

例 1.10　某班级有 n 个人,问:他们中至少有两人生日相同的概率有多大?(一年按 365 天计算,$n\leqslant 365$)

解　记事件 $B=$“班上至少两人生日相同”。这个事件较为复杂,我们不妨先考虑它的对立事件。他们生日各不相同的概率为 $\frac{\mathrm{P}_{365}^n}{365^n}$,则 n 个人中至少有两人生日相同的概率为

$$P(B)=1-\frac{\mathrm{P}_{365}^n}{365^n}$$

这个数值是多少呢? 我们不妨看一些特殊的 n 值(如表 1.1 所示)。

表 1.1　不同人数下相同生日的概率

人数	20	23	30	40	50	60	70
概率	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.994	0.99916

从表 1.1 可以看出:在 40 人以上的班级里,十有八九会发生(两人或两人以上生日相同)这一事件。

1.2.2　几何概率

古典概率考虑了有限等可能结果的随机试验,在实际问题中还存在其他类型的概率模型,例如,样本空间是一线段、平面或者空间区域,此时样本空间中样本点数目就不是有限的,古典概率的公式无法使用。在这里,我们做进一步研究。

(1) 设试验的样本空间 Ω 充满某个区域,其度量(长度、面积或体积)的大小用 S_Ω 表示;

(2) Ω 中的每一个样本点落在度量相同的子区域内是等可能的;

则事件 $A\subset\Omega$ 的发生概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}\tag{1.2}$$