波动力学基础

Foundations of Wave Mechanics

高光发 编著

科学出版社

波动力学基础

高光发　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

“波动力学基础”是爆炸与冲击动力学学科的核心专业基础课程，也是兵器科学与技术学科等相关学科的核心课程。本书主要针对应力波理论中的一维问题展开分析讨论，主要包含一维杆中的弹塑性波的传播与演化、一维冲击波和一维爆轰波的产生及其传播与演化、其他几类工程中重要典型应力波传播问题三个方面内容。本课程虽然是专业基础课程，但是其中许多结论和方程能够直接应用于解决相关工程问题或给相关领域的研究提供直接参考。

本书可以作为爆炸力学、冲击动力学、弹药工程、兵器科学与技术、爆破工程、防护工程等涉及爆炸和高速冲击问题的相关专业和学科的本科生或研究生教材；也可作为以上相关学科领域的研究人员以及国防科研院所中相关领域如装备、弹药、人防等研究人员的专业参考书。

图书在版编目(CIP)数据

波动力学基础/高光发编著. —北京：科学出版社, 2019.5

ISBN 978-7-03-061124-6

Ⅰ. ①波…　Ⅱ. ①高…　Ⅲ. ①波动力学　Ⅳ. ①O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 082521 号

责任编辑：李涪汁　曾佳佳／责任校对：杨聪敏

责任印制：师艳茹／封面设计：许　瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

天津文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2019 年 5 月第　一　版　开本：787 × 1092　1/16

2019 年 5 月第一次印刷　印张：18

字数：426 000

定价：79.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言
PREFACE

从物理学角度上讲，波是物理信号传播过程所具备的本质特征，如光波、电磁波、声波等，这些光、电磁和声等物理信号皆是以波的形式进行传播的，介质中的应力/应变扰动信号的传播也遵循这一物理规律。“波动力学”又可称为“应力波理论”，是一门研究应力/应变扰动信号在介质中传播，应力波在传播过程中由于受到边界条件和介质内在物理力学性能影响而产生的各类演化以及应力波之间的相互作用等问题的基础课程。

科学问题的研究与发展总是符合这一过程：从大自然中发现科学问题，提取核心科学问题，科学问题的演化与发展分析，掌握科学问题的规律与机制，利用科学问题进一步了解大自然并将其应用于大自然的改造。因此，提取科学问题并建模是其关键步骤之一，由易到难、由粗糙到精细、由定性到定量，这是模型演化过程的必然趋势，力学问题也不例外。“杠杆原理”是我在力学学习初期印象最深刻的一个重要原理，尤其是“给我一根足够长的杆和一个支点就能撬起地球”当时让我深信不疑，也让我感受到力学知识的强大，当时日常生活中有太多的问题都是利用这一原理的。后来，又学习了牛顿三大定律、物体相互碰撞的动量守恒定律等，然而，多次木棍的压断、冰球摔到地上直接碎裂而并没有反弹等一系列问题让我认识到这些原理应该有前提条件，即刚性假设；进入大学后，学习了材料力学，认识到材料是由强度限制的，而且学习了在受到外力作用下如何计算材料内部的应力分布；之后，进一步学习了弹性力学、塑性力学和连续介质力学。从而，我们能够一步一步地越来越细观精确地分析受力状态下材料内部应力的分布与材料的内在力学行为，假设条件也逐渐从多到少，对问题的解也越来越准确，越来越贴近生产生活实际应用，让我们能更深入更准确地认识和改造自然。科学问题的分析总是如此，在大量的假设前提下，建立最核心的简单模型；在之后的发展过程中，随着数学工具和科技的进步，逐步排除这些假设，从简单到复杂、从宏观到细观，让模型逐渐接近真实情况，模型的解逐渐接近真实解。经典力学知识能够解决当前人们生产生活中的绝大多数问题，其重要性毋庸置疑；然而，在爆炸或高速冲击过程中，典型的例子就是碎甲弹的破坏现象，在金属表层爆炸作用下，厚金属板整体没有出现明显破坏，而在内表面却出现大量的拉伸破坏而产生大量的高速破片，为何出现外荷载为压力的条件下在介质中同时存在压应力和拉应力？这个问题利用经典的力学无法解释，因此在此类问题上，传统的经典力学无法直接应用。研究发现，这主要是由经典力学中介质应力瞬间均匀假设而导致的。事实上，任何材料都具有可变形性和惯性，当其受到外部载荷的扰动时，其变

形不可能瞬间均匀完成，而是有一个传播过程，这个应力扰动信号的传播行为即为本书的研究对象。

从最初的简单力学理论到应力波理论，从本质上讲，问题的核心构架一直没有改变，只是在发展过程中不断改进、不断完善，逐渐减少人为假设，让物理模型逐步解决实际问题；问题研究的尺度也不断改变，从宏观逐渐到微观，从大尺度结构逐渐到微米、纳米甚至分子层级。应力波理论在某种意义上是经典静力学理论的本质与基础，而静力学理论是应力波理论的现象和简化，前者的重要性不容置疑。当然，并不是所有问题都需要应用应力波理论来解决，相对于经典力学而言，应力波理论无论是其复杂程度还是其成熟程度皆不足，对于应力均匀时间远小于荷载作用时间尺度的大多数问题而言，采用经典力学即静力学知识来进行分析和求解既简单又足够准确。但是，对于荷载作用时间足够短，扰动信号足够剧烈，以至于应力波在荷载作用时间内的传播空间尺度与介质或结构处于同一个尺度或更小尺度，此种情况下应力波传播引起的效应不可忽视，此时，利用应力波理论来解释、分析、推导和解决问题在某种意义上讲是当前唯一可行可信的理论途径了。

我第一次接触“波动力学”知识是在中国科学技术大学近代力学系攻读博士学位期间，当时该课程的学习对我来说是一种考验，也对我的力学知识有一个较大的冲击；由于应力波理论研究的时间尺度和所涉及的空间尺度很难用肉眼直接观测，并不在我们日常生活的尺度范围内，因此，不像学习经典静力学期间经常可以参考日常可以看到和接触到的类似科学或工程案例来加深理解，应力波理论中许多结论一般只能从唯象结果或理论推导来“脑补”，即使有试验能够给出部分直观观测结果，也是“杯水车薪”了，这也是“波动力学”课程学习的难点之一。国内当前具有独立思路和特色的应力波理论教材有王礼立教授主编的《应力波基础》和李永池教授主编的《波动力学》等。我学习应力波理论知识时使用的参考教材就是《应力波基础》，该教材是我国公开出版的第一部系统讲授应力波理论知识的教材，该教材开阔了我的力学视野，让我感受到爆炸力学的魅力并对参与国防科技研究产生了浓厚的兴趣，在此对王礼立先生表示衷心的感谢。老先生年过八十还一直在应力波科研一线，对我国爆炸力学学者是一个极大的鞭策和鼓舞，也在很大程度上持续推动了我国爆炸力学学科的发展。如果说王老师的《应力波基础》将我领进了应力波理论的大门，另一部教材《波动力学》真正让我走进应力波理论并能够深切感受与初步应用应力波理论。该教材与我也有极大的渊源:《波动力学》的主编是我的博士生导师李永池教授，是我最尊敬的老师，是他帮我加强了我原本薄弱的力学基础，并带我领略了应力波理论在前沿科技上应用的风光，让我初步理解了什么是真正的科研、如何搞科研，他老人家至今还是我的科研指导人。在李永池教授撰写《张量初步和近代连续介质力学概论》和《波动力学》期间，本人几乎全程参与这两部教材图文的编写工作，在编写《波动力学》教材过程中，我深刻感受到李永池教授对力学

问题把握的深度和对语言逻辑性的严谨，通常一段文字要反复修改几天，在推导表达式过程中，李老师也给我很多指点；从某种意义上讲，相当于李老先生手把手地教我这两部教材的内容很多遍，而且反复修改的过程让我对其中细节核心有了更深的理解。在此再次向李永池教授表示由衷的感恩。

波动力学中应力波理论知识无论在固体力学等力学理论中还是工程应用中皆具有不可替代的核心基础作用，其重要性毋庸置疑。可以说，没有波动力学知识我们无法开展任何爆炸力学相关研究。在当前工业生产过程中，如地质断层探测、煤矿中瓦斯治理、隧道与地下巷道的掘进、材料无损探伤、工程爆破等诸多的应用中，应力波理论是其直接和根本的指导理论；在航空航天中也是如此，如鸟撞飞机、太空微尘撞击飞行器、火箭发射过程中的诸多核心问题等，应力波理论知识也是其不可或缺的指导理论；特别地，在国防科技的研究和设计、优化与生产过程中，无论是武器的设计与优化，还是各类防护装甲和防护结构的设计与优化、各类防护工程的设计与优化都离不开应力波理论的指导。就像中国科学技术大学原校长侯建国院士所说“无用之用，实堪大用”，理论是原始创新的源泉，没有理论的创新很难做到从源头开展革命性的创新，没有理论的指导很容易出现科研过程中方向性的偏移；然而，令人遗憾的是，当前在国防研究相关领域的很多高校与科研院所中学生和科研人员的应力波理论基础不尽如人意，这在很大程度上限制了相关科研的原创性和开拓性步伐。从多年的教学和科研交流来看，本人认为造成这个问题的主要原因有三点：首先，相对于传统经典静力学知识而言，波动力学知识更为抽象，很多情况下无法从现实生活中直观地感受其过程，日常生活中感受的力学问题的空间尺度和时间尺度大多处于经典静力学范畴，因而，波动力学的学习相对难度更大，其对读者的数学和力学理论根底要求相对较高，这无形中提高了学习的门槛；其次，在爆炸力学、兵器科学和防护工程等领域，特别是国防工业领域，当前我国相关科技成果已走到世界前列，各类因素要求我们必须进行原创性、“颠覆性”的研究，此时我们才会重视理论基础，而在过去的数十年内虽然取得了巨大的进步，但主要以仿制和技术创新为主，科学原创性内容并不多，无论是科研人员还是学生课程设置对波动力学的重视程度虽然逐渐提高但还不够，应力波理论的系统性学习还远远不足；再次，前述两部教材的主编王礼立教授和李永池教授皆是应力波领域的领头人，具有极深的理论根底，两部教材各有千秋，深度和广度皆无可置疑，然而，两部教材都出自中国科学技术大学近代力学系，其授课对象为本系的本科生、硕士研究生、博士研究生，该系本科课程体系中数学和力学相关课程设置非常完备，与其他高校或其他专业如弹药工程、兵器科学、防护工程等相比，其对学生的数学和力学根底要求更高，因此，这两部教材相对于弹药工程、兵器科学等相关领域内学生和科研人员而言门槛过高，而且，其中三维特征线理论等更加深入的理论知识更难理解且实用性并不理想。

值得庆幸的是，在爆炸与冲击动力学相关领域，一维应力波理论在大多数情况下能够给出指导性的结论甚至给出足够准确的结果，而且一维应力波理论所推导的解析解及其推导过程能够让读者更深刻地理解相关知识。本书即立足于此，针对弹药工程、兵器科学、防护工程和爆炸与冲击动力学等相关专业或学科，主要以一维假设为前提，以高等数学与材料力学为基础，阐释一维弹性波、弹塑性波、冲击波和爆轰波相关理论与应用。全书分为 5 章，为让读者更容易阅读和理解，在编写本书过程中，本人没有直接复制上课时的讲义，而是通篇逐字逐句地一一输入电脑，书中每一个表达式、图表也是重新推导或重新绘制的，以保证全书语言风格和解决问题思路的一致性。

本书是在南京理工大学何勇教授的鼓励和支持下开始编写的，在此表示感谢。本书是作者在进入南京理工大学机械工程学院工作数年内完成的，由于科研任务较重，因此编写工作都是在下班后开展的。在没有出差时和无特殊情况下，几乎每天下班回家后都花大量的精力推导公式、绘制图表和编写文字，若没有我妻子齐敏菊的无私奉献和支持，我不可能完成本书的编写，在此特别向她表示深深的感谢；过去两年多繁重的科研任务和编写任务，让我几乎没有时间陪女儿出去旅行甚至在市内游玩过，在此向我女儿高玉涵表示歉意。

由于水平限制，本书不足之处在所难免，望各位读者指出并指导。希望本书能够给国防科技工作者和相关专业的学生提供理论参考，为提高我国国防科技中兵器科学与防护工程等相关领域的原创性研究水平提供助力！

最后，感谢国家自然科学基金 (11772160，11472008，11842022，11202206) 和国防科技创新特区项目的资助和支持。

高光发

2018 年 11 月于南京

目　录
CONTENTS

绪　论

INTRODUCTION

波是自然界中最普遍和最重要的现象之一，也是最基本的概念之一，如声波、电磁波、微波等。从本质上讲，当介质中由于某种状态量出现变化时，会同时向相邻介质发出某种扰动信号，这种扰动信号也会引起相邻介质状态量发生改变，以此类推，这种扰动信号会由此及彼由近及远传播，这种扰动信号的传播即形成波。常见的例子有：光信号的传播形成的光波，电磁扰动信号传播形成的电磁波，声压扰动信号传播形成的声波，爆炸产生的高温高压对周围物质作用导致的压力扰动信号形成的冲击波，等等。广义地来讲还有：洪水产生的势能扰动信号传播形成的洪水波，由于交通信号控制和路面情况变化引起车流、人流扰动信号的传播形成的波，等等。这些波传播规律的物理定理可能不同，但其控制方程类似。应力波也是一种常见的波，它是指介质中应力扰动信号的传播而形成的波，爆炸冲击波、爆轰波、声波等都属于常见的应力波。然而，波在传播过程中也会受到各种内在或外在因素的影响而改变其特性与强度，这个过程常称为波的演化。本书针对应力波，特别是固体介质中的应力波，研究其在介质中传播与演化的特性。

本质上讲，任何力学问题实际上都是动力学问题，静态问题只是相对的，与时间完全无关的所谓静力学问题在严格意义上是不存在的。任何材料都具有可变形性和惯性，当其受到外部载荷的扰动时，其变形并不是一蹴而就的，而是应力波传播、反射和相互作用的结果。也就是说，任何应力扰动速度不可能是无限的，其在介质中的传播过程是有一个时间过程的，只是传播速度的快慢和持续时间的长短不同而已。当所研究的或所观察的时间尺度相对于应力波传播持续时间已足够大时，即介质中的应力可视为瞬间平衡或均匀，此时材料或结构中的力学问题主要发生在应力平衡后的阶段，因而，可以忽略应力波传播所带来的影响，而着眼于应力平衡后的力学问题，即将问题视为静力学问题进行分析。例如对于一般金属材料而言，其应力波波速为每秒数千米，当其加载时间尺度为秒时，若其空间尺度为米这一量级，在外载荷作用时，其应力波往返了数千次，此时材料受力的绝大部分过程中的应力基本均匀，其应力波传播的影响可以忽略而不予考虑，而且也可以利用更加简单的静力学分析方法得到足够准确的解。然而，对于很多物理现象而言，如爆炸载荷，其在毫秒、微秒甚至纳秒时间尺度上扰动信号极大，且总持续时间极短，此时应力波的传播所带来的影响不可忽视，反而起着关键作用。如钢中弹性纵波波速约 5190m/s，假设爆炸脉冲加载时间约 2μs，此时整个作用时间内，应力波传播路程仅仅约为 10mm，也就是说在相对较厚的装甲和防护工程中高达吉帕级的脉冲荷载作用下，材料的主要力学响应在应力远没有均匀前已经完成，此时仅仅利用准静态力学相关知识进行分析很难得到准确的解，甚至无法解释一些现象。例如，碎甲弹对坦克装甲的破坏问题中，碎甲弹爆炸产生瞬间高压，其对装甲外表面所施加的作用力为压力，但明显可以看出，其破坏为内表面的拉伸破坏；又如，当以较高速度捶打钢杆一端时，我们可以看到钢杆并不像静力学所解出的均匀变形，而是在受力一端出现明显更

大的塑性变形，等等。这类问题中，我们可以看到外载荷的作用时间尺度与介质中的应力波速 (包含弹性波和塑性波及相关应力波等) 的乘积与材料或结构的空间尺度在一个量级或前者量级更高，此时应力波传播、演化与相互作用应予以考虑。

对于考虑时间相关性的动力学问题而言，一般可以将其分为两类：第一类是材料的局部惯性效应起着主导作用的波动力学问题；第二类是结构的总体惯性效应起着主要作用的结构动力系问题；前者是后者的基础与依据，两者互为因果。因此，从本质上讲，波动力学是固体动力学的理论基础。从材料动态本构关系上看，材料中应力波的传播与其动态本构关系是密不可分也是相互耦合的。一方面，应力波的传播是以科学准确的材料本构关系为基础的；另一方面，获得材料的动态力学性能和动态本构关系又必须以应力波传播理论来指导测试与分析。因此，波动力学是材料动态本构关系的研究基础，也是连续介质力学的基本理论支柱之一。

波动力学在工程力学以及相关学科的科研工作上具有极其重要的作用，尤其在爆炸与冲击动力学、兵器科学与技术等相关学科领域的研究中起着不可或缺的作用。从某种程度上讲，没有波动力学知识，要解决爆炸与冲击动力学相关问题是根本不可能的。特别地，在兵器科学与技术、防护工程等国防科研和航空航天、新材料加工制备等高新技术领域，波动力学也有着非常重要的科学意义和应用价值。核爆炸、化学爆炸、物理爆炸等爆炸行为及其破坏效应，应力波传播与演化是其中关键的问题；高速冲击如穿甲弹、破甲弹、碎甲弹、钻地弹等对目标靶板的高速冲击问题也是以波动力学理论为基础进行研究分析的；防护工程如掘开式人防工程、机库顶板防护工程、地下人防工程、机场跑道加固工程等所涉及的问题更是波动力学理论直接应用的问题；装备防护工程如坦克装甲、轻型装甲车、运兵车、武装直升机等防护结构也离不开波动力学理论的指导；航空航天中太空垃圾对航天器的高速撞击破坏效应、飞鸟对飞机的碰撞损坏效应等，也涉及大量的应力波传播与破坏效应问题。在工业生产过程中，波动力学的应用也非常广泛，如煤矿地下地质构造断层的探测技术，就是基于爆炸产生的应力波在地质材料中的传播理论发展出来的；又如煤矿地下冲击地压探测与防治技术，也是利用波动力学相关知识开发出来的；等等。

一般而言，涉及时间效应的问题皆比较复杂，波动力学问题也是如此，三维甚至大多数二维波动问题极其复杂，当前极难或很多情况下根本无法给出其解析解。值得庆幸的是，利用一维假设能够给出很多典型问题的解析解，通过这些一维问题的推导和解析过程我们能够对应力波的传播与演化有着更加深入透彻的理解，而且，一维假设所给出的解析解在大多数情况下足够准确。因此，本书主要针对一维问题，从动量守恒定律、质量守恒定律、能量守恒定律出发，考虑材料的本构关系和状态方程，分别推导应力波 (含弹性波、弹塑性波、冲击波、爆轰波等) 在一维条件下的传播与演化过程，给出其解析解，并结合一些实例，对解析解的科学合理性和准确性进行验证以及应用推广。

本书共 5 章，分为 3 个部分内容。第一部分为一维杆中单纯弹塑性应力波的传播，包含第 1 章一维杆中单纯弹性波的传播和第 2 章一维杆中弹塑性波的传播；分别讲述空间坐标与物质坐标的概念、一维弹性介质中的运动方程、波阵面上的守恒方程、弹塑性双波结构、弹性波和弹塑性波的相互作用、弹性波和弹塑性波在交界面上的透反射问题等内容，并对杆中应力波弥散效应、一维杆中特征线方法也进行了初步介绍。第二部分也是本书中仅有

不是完全讲述一维假设条件下的应力波传播的内容，将其放入本书的主要原因是这些典型的弹性波的传播与演化在实际科研和生产活动中非常常见且非常重要，其对应书中第 3 章内容；主要讲述无限介质中线弹性波传播的基本特征、平面弹性波的斜入射问题、Rayleigh 波、Lamb 波和流体中的波传播等内容。第三部分为冲击波或爆轰波的传播，包含第 4 章一维冲击波的产生与传播及相互作用和第 5 章一维爆轰波及其与材料的相互作用，这部分内容针对弹药工程、兵器科学与技术等专业和学科，主要讲述波阵面上的冲击 Hugoniot 曲线与 Rayleigh 线、固体状态方程、冲击波的产生与衰减及其相互作用、一维爆轰波波阵面上的守恒方程、爆轰波稳定传播的 C-J 点和 von Neumann 峰、Gurney 方程等内容。

第 1 章　一维杆中单纯弹性波的传播

CHAPTER 1

固体中应力波的传播是一个复杂的过程，它受许多因素的影响，包括材料物理力学性能相关因素，而且，这些因素有些相互耦合，因此，直接对复杂条件下应力波的传播演化进行解析分析是非常困难的，而且绝大部分是当前无法给出解析解的。然而，应力波在不同介质和环境下的传播演化物理内涵是相近的，我们可以通过对简单问题的分析给出应力波传播演化相关结论，这些结论能够较好地定性分析复杂条件下的对应问题。本章从最简单的一维杆中弹性波的传播理论开始讲解，分析一维杆中弹性波的传播、相互作用以及应用。值得注意的是，这里的“一维杆”是一个抽象的概念，是指应力波传播过程中空间参数只有一个，它与现实世界中的长杆有一定的区别，当然，如果长杆长径比足够大，两者之间的结果非常接近。

1.1　空间坐标与物质坐标

波动力学理论是建立在连续介质理论的基础上的，波动力学理论系统的建立也是在连续介质力学构架上完成的。在连续介质力学中，我们不从微观上考虑物体的真实物质结构，而是将物体看做是“粒子”(或“微团”) 的连续组合。这些连续介质中的“微团”在微观上要保证足够大，能够包含足够多的微观粒子，以保证这样的“微团”各种物理量在任一时刻都有一个宏观上的统计表观值；同时，它们在宏观上要足够小，以至于可以视作几何上的“点”，从而允许我们应用场论的研究方法。这些“微团”我们称为质点，“微团”的运动速度称为质点速度。一个物体在任一特定时刻的相应配置称为构形。把物体在某一特定时刻的构形 (一般是未变形的构形) 称为初始构形或参考构形，而把物体在任一时刻 t 时的构形称为瞬时构形。为了描述一个质点在参考构形和瞬时构形中的空间位置，我们可以在 Euclidean 空间的参考构形和瞬时构形中各取一个坐标系，我们习惯将它们分别称为 Lagrange 坐标系 (简称为 L 氏坐标系) 和 Euler 坐标系 (简称为 E 氏坐标系)；而质点初始时刻在 L 氏坐标系中的坐标称为 Lagrange 坐标 (简称为 L 氏坐标) 或物质坐标，在 E 氏坐标系中的坐标称为 Euler 坐标 (简称为 E 氏坐标) 或空间坐标。

以质点在一维杆中运动为例，以 X 和 x 分别表示某一特定质点在参考构形和瞬时构形中的位置，即该质点的 L 氏坐标为 X(即该质点的物质坐标为 X，我们一般将之称为质点 X)，在某一时刻 t 时的 E 氏坐标为 x。物体的运动就可以表现为质点 X 在不同时刻 t 取不同空间位置 x，在给定时刻一个质点只能占有一个空间位置，因此，两者的映射关系可以表示为

$$x = x\left(X, t\right) \tag{1.1}$$

上式的含义是：初始时刻位置量为 X 的质点在 t 时刻到达位置 x。

反之，一般来讲，在给定时刻某一空间位置也只能有一个质点，因此我们也可以根据某一特定时刻 t 时瞬时构形中空间位置为 x 的质点找到其在初始构形中的位置 X：

$$X = X(x,t) \tag{1.2}$$

式 (1.1) 和式 (1.2) 说明，任一时刻 t 质点的 L 氏坐标 X 与 E 氏坐标 x 是一一对应的，我们可以根据需要选用这两种坐标系中的任意一个来研究介质运动：一种是随着介质中确定的质点来观察物体的运动，研究给定质点上各物理量随时间的变化，即把物理量 ϕ 视为质点 X 和时间 t 的函数：$\phi = F(X,t)$，这种方法称为 Lagrange 方法或简称 L 氏描述；另一种是在固定空间点上观察介质的运动，研究给定空间点上不同时刻 t 到达该空间坐标 x 的不同质点上各物理量随时间的变化，即把物理量视为 E 氏坐标 x 和时间 t 的函数：$\phi = f(x,t)$，这种方法称为 Euler 方法或简称 E 氏描述。

事实上，根据式 (1.1) 和式 (1.2) 可知，质点物理量的两种描述是可以相互转换的：

$$\begin{cases} \phi = F(X,t) = f[x(X,t),t] \\ \phi = f(x,t) = F[X(x,t),t] \end{cases} \tag{1.3}$$

相应地，分析质点上物理量 ϕ 随时间的变化率也有两种描述方式：一种是跟随一个确定的质点所能感受某物理量 ϕ 随时间的变化率，我们称为物理量 ϕ 的随体导数或物质导数 (Lagrange 导数)，利用 L 氏描述中物理量 ϕ 的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F(X,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_X \tag{1.4}$$

式中，最右端一项表示确定质点 X 求物理量的导数；另一种方法是在一个固定的空间位置 x 感受某物理量 ϕ 随时间的变化率，我们称为物理量 ϕ 的空间导数 (Euler 导数)，而在不同时刻经过同一个空间位置 x 的质点显然是不同的，因此该导数也被称为物理量 ϕ 在空间位置 x 处的局部导数，利用 E 氏描述中物理量 ϕ 的空间导数为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_x \tag{1.5}$$

式中，最右端一项表示固定空间位置 x 求物理量的导数。

我们对式 (1.4) 展开，有

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f[x(X,t),t]}{\partial t}\right|_x + \left.\frac{\partial f[x(X,t),t]}{\partial x}\right|_t \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_X = \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_x + \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right|_t \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_X \tag{1.6}$$

由于

$$v = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_X \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

因此，式 (1.6) 可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_x + v\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_t \tag{1.7}$$

式中，右端第一项表示固定空间位置 x 处物理量 ϕ 随时间的变化率，称为量 ϕ 的局部导数，它是由量 ϕ 在质点与瞬时构形中的空间位置 x 处随时间的变化所引起的，即由场的不定常性所引起的；右端第二项表示物理量 ϕ 在某一特定时间时随空间位置的变化率，称为量ϕ 的

迁移导数，它是由量 ϕ 在具有梯度的不均匀场中以速度 v 迁移所引起的，即由场的不均匀性所引起的。

特别地，当我们取物理量 ϕ 为质点速度 v 时，式 (1.7) 就可写为

$$a = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_x + v\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_t \tag{1.8}$$

式中，右端第一项为局部加速度；右端第二项为迁移加速度。

式 (1.7) 和式 (1.8) 说明，采用 E 氏描述时，任意物理量的随体导数等于其局部导数和迁移导数之和。在波动力学中，清楚认识 L 氏描述和 E 氏描述的内涵和不同是非常重要的。

1.2　一维弹性介质中的运动方程

以一维细长杆为例，如图 1.1 所示，设其沿 X 方向足够长，垂直 X 方向的面积 $\delta A \to 0$，且杆中质点的物理量只是 X 方向的坐标 X 和时间 t 的函数。在坐标为 X 处取出一个无限短的微元 $\mathrm{d}X$ 进行分析，不考虑介质体力的影响，杆介质密度为 ρ，弹性介质材料的本构方程为 $\sigma_X = \sigma_X(\varepsilon)$。

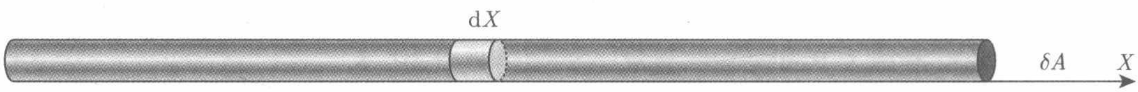

图 1.1　一维杆中的运动方程

1.2.1　一维杆中的纵向振动

当一维杆受到轴线方向的应力脉冲 (压缩或拉伸，以拉伸为正，下文同) 扰动时，微元受到沿着坐标轴方向的作用力和反向作用力的影响，设微元的位移为 u。此时，杆中微元受力满足动平衡，根据牛顿第二定律，可有

$$\left(\sigma_X + \frac{\partial \sigma_X}{\partial X}\mathrm{d}X\right)\delta A - \sigma_X \delta A = \rho \mathrm{d}X \delta A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

即

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_X}{\partial X} \tag{1.9}$$

根据介质的弹性本构方程 $\sigma_X = \sigma_X(\varepsilon)$，可有

$$\frac{\partial \sigma_X}{\partial X} = \frac{\mathrm{d}\sigma_X}{\mathrm{d}\varepsilon_X} \cdot \frac{\partial \varepsilon_X}{\partial X} = \frac{\mathrm{d}\sigma_X}{\mathrm{d}\varepsilon_X} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$$

则式 (1.9) 可以写为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}\sigma_X}{\mathrm{d}\varepsilon_X} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\sigma_X}{\mathrm{d}\varepsilon_X} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$$

或写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2},\ C = \sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\sigma_X}{\mathrm{d}\varepsilon_X}} \tag{1.10}$$