

高等院校教材同步辅导
及考研复习用书



张天德◎主编

高等数学辅导

同济七版·上册

· 同济七版 ·
全新升级

年销量10万册 《高等数学辅导》

考点图解+题型归总+真题精讲+习题全解



关注微信公众号
听免费课程



扫码观看高数
常考题型精讲视频

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

教材同步辅导
习用书



高等数学辅导

同济七版·上册

张天德[◎]主编

窦慧、王玮、高海荣[◎]副主编

版权专有 侵权必究

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学辅导：同济七版·上册 / 张天德主编. —北京：北京理工大学出版社，2018. 6

ISBN 978 - 7 - 5682 - 5754 - 1

I. ①高… II. ①张… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 113620 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 保定市中华美凯印刷有限公司

开 本 / 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

印 张 / 22.25

字 数 / 455 千字

版 次 / 2018 年 6 月第 1 版 2018 年 6 月第 1 次印刷

定 价 / 39.80 元

责任编辑 / 王俊洁

文案编辑 / 王俊洁

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

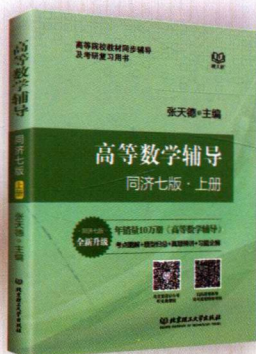
高等数学

期末考试/考研初期 应试提分包

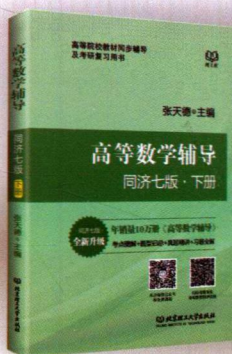
第一步：同步教材，夯实基础

教材同步辅导

上下分册设计，满足不同学习阶段
章节知识图解，系统掌握教材知识
题型精讲精练，自测试题巩固提高
教材习题详解，方法技巧妙手点拨



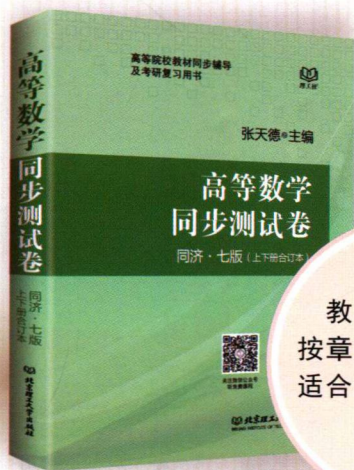
《高等数学辅导》
(同济七版·上册)



《高等数学辅导》
(同济七版·下册)

第二步：巩固训练，提升能力

教材同步测试卷



教材同步测试
按章节阶梯式分布
适合不同学习阶段

- A 卷侧重基础，巩固教材知识考点
- B 卷提升能力，综合自测查漏补缺
解析详尽透彻，思路探索方法点拨
搭配高数辅导，讲练结合提高效率

《高等数学同步测试卷（同济七版）》

前 言

高等数学是理工类专业的一门重要的基础课,也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》是一部深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材。为了帮助读者学好高等数学,我们编写了《高等数学辅导(同济七版)》,该书与同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》配套,汇集了编者几十年的丰富经验,将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中。本书将会成为读者学习高等数学的良师益友。

本书的章节划分和内容设置与同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识点进行简要概括,然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系,便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

讲解结构七大部分

一、知识结构图解 用结构图解的形式对每节涉及的基本概念、基本定理和基本公式进行系统梳理,并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需要注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、重点及常考点分析 分类总结每章重点题型以及重要定理,使读者能更扎实地掌握各个知识点,最终提升读者的应试能力。

三、考研大纲要求解读 帮助读者了解本章内容在考研试题中考查的考点及题型,为复习备考指明方向,使读者准备考试更加轻松。

四、例题精解 这一部分是每一节讲解中的核心内容,也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题及全国大学生数学竞赛试题的研究,将该节教材内容中学生需要掌握的、考研和数学竞赛中经常考到的重点、难点、考点归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出大量精选例题,深入讲解,使读者扎实掌握每一个知识点,并能在具体解题中熟练运用。本书使基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动,一举突破难点,从而使学生获得实际应用能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”“方法点击”,更是巧妙点拨,让读者举一反三、触类旁通。

五、本章知识小结 对本章所学的知识进行系统回顾,帮助读者更好地复习、总结、提高。

六、本章同步自测 精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年研究生入学考试和大学生数学竞赛试题),以此检测、巩固读者所学知识,达到提高应试水平的目的。

七、教材习题详解 为了方便读者对课本知识进行复习巩固,本书对教材课后习题做了详细解答,这与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中,本书对部分有代表性的习题设置了“思路探索”,以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法;本书安排了“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。针对部分习题,本书还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维的能力。

内容编写三大特色

一、重新修订、内容完善 本书是《高等数学辅导(同济六版)》的最新修订版,前一版在市场上受到了广大学子的欢迎,每年销量都在10万册以上。本次修订增加了大学生数学竞赛试题,更新了研究生入学考试试题,改正了原来的印刷错误,内容更加完善,体例更为合理。

二、条理清晰、学习高效 知识点讲解清晰明了,分析透彻到位,既对重点及常考知识点进行归纳,又对基本题型的解题思路、解题方法和答题技巧进行了深层次的总结。据此,读者不仅可以从全局上对章节要点有整体性的把握,更可以纲举目张,系统地把握数学知识的内在逻辑性。

三、联系考研、经济实用 本书不仅是一本与教材同步的辅导书,也是一本不可多得的考研复习用书,书中内容与研究生入学考试联系紧密。本书在知识全解版块设置“考研大纲要求”版块,例题精解和自测题部分选取大量考研真题,让读者在同步学习中达到考研的备考水平。

本书由张天德任主编,由窦慧、王玮、高海荣任副主编。衷心希望我们的这本《高等数学辅导(同济七版)》能对读者有所裨益。由于编者水平有限,书中疏漏之处在所难免,不足之处敬请读者批评指正,以便不断完善。

张天德

目 录

教材知识全解(上册)

第一章 函数与极限	3
第一节 映射与函数	4
第二节 数列的极限	7
第三节 函数的极限	9
第四节 无穷小与无穷大	12
第五节 极限运算法则	13
第六节 极限存在准则 两个重要极限	15
第七节 无穷小的比较	19
第八节 函数的连续性与间断点	21
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	23
第十节 闭区间上连续函数的性质	25
自测题	27
自测题答案	29
第二章 导数与微分	31
第一节 导数概念	32
第二节 函数的求导法则	36
第三节 高阶导数	39
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	41
第五节 函数的微分	44
自测题	47
自测题答案	48
第三章 微分中值定理与导数的应用	52
第一节 微分中值定理	53
第二节 洛必达法则	57
第三节 泰勒公式	61

第四节	函数的单调性与曲线的凹凸性	65
第五节	函数的极值与最大值最小值	70
第六节	函数图形的描绘	73
第七节	曲率	75
第八节	方程的近似解	76
	自测题	79
	自测题答案	80
第四章	不定积分	84
第一节	不定积分的概念与性质	85
第二节	换元积分法	88
第三节	分部积分法	95
第四节	有理函数的积分	100
第五节	积分表的使用	106
	自测题	107
	自测题答案	108
第五章	定积分	111
第一节	定积分的概念与性质	112
第二节	微积分基本公式	117
第三节	定积分的换元法和分部积分法	120
第四节	反常积分	123
第五节	反常积分的审敛法 Γ 函数	126
	自测题	127
	自测题答案	129
第六章	定积分的应用	133
第一节	定积分的元素法	134
第二节	定积分在几何学上的应用	134
第三节	定积分在物理学上的应用	138
	自测题	140
	自测题答案	142
第七章	微分方程	147
第一节	微分方程的基本概念	148
第二节	可分离变量的微分方程	149
第三节	齐次方程	153
第四节	一阶线性微分方程	154



第五节 可降阶的高阶微分方程	158
第六节 高阶线性微分方程	160
第七节 常系数齐次线性微分方程	162
第八节 常系数非齐次线性微分方程	164
*第九节 欧拉方程	166
*第十节 常系数线性微分方程组解法举例	168
自测题	170
自测题答案	171

教材习题全解(上册)

第一章 函数与极限	175	习题 3-4 解答	226
习题 1-1 解答	175	习题 3-5 解答	233
习题 1-2 解答	179	习题 3-6 解答	238
习题 1-3 解答	181	习题 3-7 解答	242
习题 1-4 解答	184	习题 3-8 解答	245
习题 1-5 解答	185	总习题三解答	246
习题 1-6 解答	187	第四章 不定积分	252
习题 1-7 解答	188	习题 4-1 解答	252
习题 1-8 解答	190	习题 4-2 解答	254
习题 1-9 解答	192	习题 4-3 解答	258
习题 1-10 解答	194	习题 4-4 解答	261
总习题一解答	195	习题 4-5 解答	264
第二章 导数与微分	199	总习题四解答	267
习题 2-1 解答	199	第五章 定积分	273
习题 2-2 解答	202	习题 5-1 解答	273
习题 2-3 解答	206	习题 5-2 解答	278
习题 2-4 解答	208	习题 5-3 解答	281
习题 2-5 解答	212	习题 5-4 解答	285
总习题二解答	215	习题 5-5 解答	287
第三章 微分中值定理与 导数的应用	218	总习题五解答	288
习题 3-1 解答	218	第六章 定积分的应用	294
习题 3-2 解答	221	习题 6-2 解答	294
习题 3-3 解答	223	习题 6-3 解答	301
		总习题六解答	304



第七章 微分方程	307	习题 7-6 解答	322
习题 7-1 解答	307	习题 7-7 解答	326
习题 7-2 解答	309	习题 7-8 解答	328
习题 7-3 解答	311	习题 7-9 解答	333
习题 7-4 解答	314	习题 7-10 解答	335
习题 7-5 解答	318	总习题七解答	340

教材知识全解

(上册)

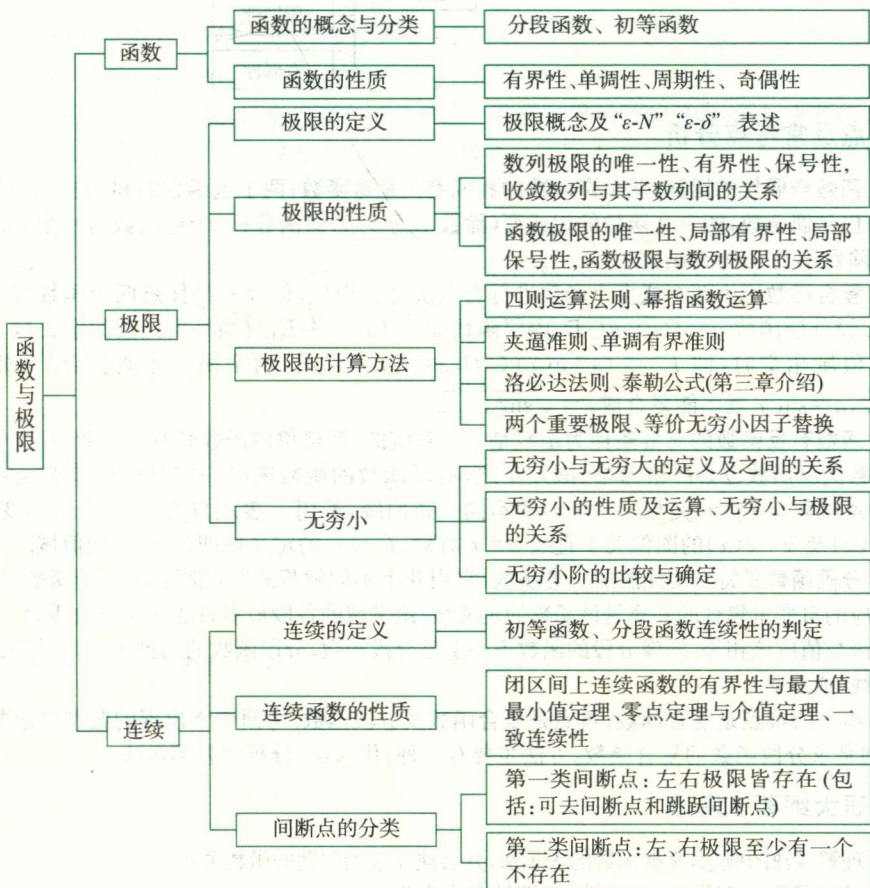


第一章 函数与极限

本章内容概览

函数是高等数学讨论的主要对象,它以极限理论为基础.在研究函数时,我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数的性质,因此我们应用运动变化的观点来掌握函数.极限与函数的连续性理论是高等数学的基础,如何用已知来逼近未知,用有限来逼近无限,在无限变化的过程中考查变量的变化趋势,从有限过渡到无限,这是本章需掌握的基本思想.

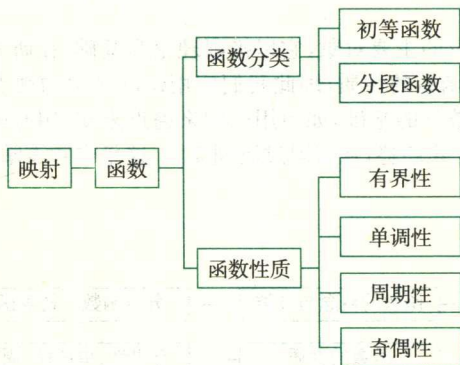
本章知识图解



第一节 映射与函数

知识全解

一 本节知识结构图解



二 重点及常考点分析

1. 函数奇偶性的运算:两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数;两个奇函数的积或商(除数不为0)为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.

2. 复合函数可由两个或多个函数进行有限次复合而成,但并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数 $y=f(u)$, $u \in D$, 内层函数 $u=g(x)$, $x \in E$, 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时, 即 $E^* = \{x \mid g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$ 时, 两个函数才能复合. 例如, $y = \sqrt{u^2 - 2}$, $u = \sin x$ 就不能复合成 $y = \sqrt{\sin^2 x - 2}$.

3. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的. 严格单调函数必有反函数, 且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减). 反之, 有反函数的函数未必一定是严格单调函数, $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线, 若用 x 表示自变量, y 表示因变量, 则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, $f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域.

4. 分段函数是特别要注意的一类函数, 它用几个不同解析式“分段”表示一个函数. 所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域. 定义域的各段最多只能在端点处重合, 重合时对应的函数值应该相等. 图像分段的函数不一定是分段函数, 分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

5. 本节的难点是复合函数, 重点是复合函数及分段函数. 考研中常出现的题型是求复合函数, 特别是求分段函数的复合函数, 方法主要有3种: 代入法、分析法和图示法.

三 考研大纲要求解读

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 并会建立应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念.



例题精解

基本题型 1: 求函数定义域

例 1 求函数 $y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.

解: 由对数定义知 $\frac{5x-x^2}{4} > 0$, 即 $0 < x < 5$.

当 $\lg \frac{5x-x^2}{4} \geq 0$ 时, 函数有定义, 即 $\frac{5x-x^2}{4} \geq 1$, 可知 $1 \leq x \leq 4$.

故函数定义域为 $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$.

【方法点击】 求初等函数的定义域有下列原则:

- (1) 分母不能为零.
- (2) 偶次根式的被开方数不能为负数.
- (3) 对数的真数不能为零或负数.
- (4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$.
- (5) $\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- (6) $\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

求复合函数的定义域, 通常将复合函数看成一系列初等函数的复合, 然后考查每个初等函数的定义域和值域, 得到对应的不等式组, 通过联立求解不等式组, 就可以得到复合函数的定义域.

例 2 设 $f(x) = e^x, f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 的定义域. (考研题)

【思路探索】 由题目条件设法求出 $\varphi(x)$ 的函数表达式, 然后再求出 $\varphi(x)$ 的定义域.

解: 由 $f(x) = e^x$, 知 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)}$, 又因为 $f[\varphi(x)] = 1-x$, 所以 $e^{\varphi(x)} = 1-x$, 于是 $\varphi^2(x) = \ln(1-x)$, 再根据 $\varphi(x) \geq 0$, 可知

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}.$$

要使 $\varphi(x)$ 有定义, 则 $\ln(1-x) \geq 0$ 且 $1-x > 0$, 即 $x \in (-\infty, 0]$.

基本题型 2: 求初等函数的表达式

例 3 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4+1}$, 求 $f(x)$.

解: 因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$.

基本题型 3: 求分段函数的表达式

例 4 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] = (\quad)$. (考研题)

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

解: $g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0, \\ x^2+2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

故应选(D).

【方法点击】 本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程,先将 $g[f(x)]$ 表示为 $f(x)$ 的函数,再解不等式 $f(x) \leq 0$ 与 $f(x) > 0$,最后将 $g[f(x)]$ 表示为 x 的函数.

【小结】 复合函数的求解方法主要有三种:

- ①代入法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替,适用于初等函数的复合.
- ②分析法:抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.
- ③图示法:(i)画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图像;(ii)将 $y = f(u)$ 的分界点在 xu 坐标平面上画出;(iii)写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间;(iv)将(iii)所得的结果代入 $y = f(u)$ 中,便得到复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应的变化区间.此方法适用于两分段函数的复合.

基本题型 4: 求反函数

例 5 函数 $y = \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 - \sqrt{1-x}}$ 的反函数为_____.

解:令 $t = \sqrt{1-x}$,则 $y = \frac{1+t}{1-t}$,所以 $t = \frac{y-1}{y+1}$,即 $\sqrt{1-x} = \frac{y-1}{y+1}$,从而

$$x = 1 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 = \frac{4y}{(y+1)^2},$$

因此反函数为 $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

【方法点击】 反函数求解方法比较固定,即由 $y = f(x)$ 解出 x 的表达式,然后交换 x 与 y 的位置,即可求得反函数 $y = f^{-1}(x)$.对于分段函数要注意所求函数表达式的区间.

基本题型 5: 把复合函数分解为基本初等函数的复合

例 6 函数 $y = \ln \cos(e^x)$ 由哪些基本初等函数复合而成?

解:函数 $y = \ln \cos(e^x)$ 可由基本初等函数 $u = e^x$, $v = \cos u$, $y = \ln v$ 三个函数复合而成.

【方法点击】 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础,而由里到外,逐级分解是解决问题的关键.做题时不能跨越某个级别,漏掉某个基本初等函数,要分清复合函数的成分和结构.

基本题型 6: 函数单调性的问题

例 7 判断函数 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性.

解:对任意的 $x_1, x_2 \in (0, \pi)$,且满足 $x_1 < x_2$,

因为 $\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$,由于 $x_1 < x_2$,故有 $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi$, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$,

所以 $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$,从而 $\cos x_2 - \cos x_1 < 0$,即 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减.

【方法点击】 证明函数单调性的主要方法有:

- (1) 利用函数单调性定义.
- (2) 利用导数证明(例题见后续章节).



基本题型 7: 函数奇偶性问题

例 8 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$, $-\infty < x < +\infty$ 是(). (考研题)

- (A) 有界函数 (B) 单调函数
(C) 周期函数 (D) 偶函数

解: $f(-x) = |-x \sin(-x)| e^{\cos(-x)} = |x \sin x| e^{\cos x} = f(x)$.

可见 $f(x)$ 是偶函数, 故应选(D).

【方法点击】 判断函数奇偶性通常采用的方法有:

(1) 先判断定义域关于原点是否对称, 再从定义出发, 或者利用运算性质(奇函数的代数之和为奇函数等).

(2) 证明 $f(-x) + f(x) = 0$ 或 $f(-x) - f(x) = 0$.

基本题型 8: 函数周期性问题

例 9 设 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a$, $x = b$ 均对称($a < b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数并求其周期.

证明: 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\begin{aligned} f(x+2b-2a) &= f(b+x+b-2a) = f[b-(x+b-2a)] \\ &= f(a+a-x) = f[a-(a-x)] = f(x). \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 是周期函数, $2b-2a$ 是它的一个周期.

【方法点击】 判定函数为周期函数的主要方法:

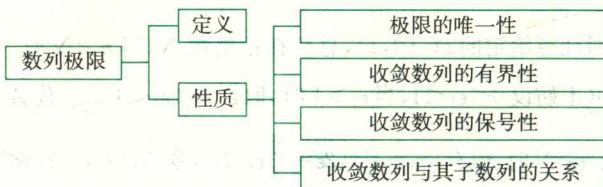
(1) 从定义出发, 找到 $T \neq 0$, 使得 $f(x+T) = f(x)$.

(2) 利用周期函数的运算性质证明.

第二节 数列的极限

知识全解

一 本节知识结构图解



二 重点及常考点分析

1. 正确理解数列极限的 $\epsilon-N$ 定义.

(1) $\epsilon > 0$ 的任意给定性: ϵ 是任意给定的正数, 它是任意的, 但一经给出, 又可视为固定的, 以便依 ϵ 来求 N . 由于 $\epsilon > 0$ 的任意性, 所以定义中的不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 可改为 $|x_n - a| < k\epsilon$ ($k > 0$ 且为常数), 也可改为 $|x_n - a| < \epsilon^2$, $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{M}$ (M 是任意正整数), $|x_n - a| \leq \epsilon$ 等, 其含义与 $|x_n - a| < \epsilon$ 等价.