

全国高等学校新工科系列教材

GONGCHENG LIXUE

# 工程力学

李福宝 周丽楠 李勤 主编



化学工业出版社

全国高等学校新工科系列教材

GONGCHENG LIXUE

# 工程力学

李福宝 周丽楠 李勤 主编



化学工业出版社

· 北京 ·

元 00 00 00 00 00

《工程力学》遵循“有用则精学、不用则先不学”的原则，不追求博大精深的理论阐述，也非面向其他专业的大平台教材，而是过程装备与控制相关专业新工科教材。本书将在本专业领域应用不多的理论部分进行精简，突出工程应用技术，以生产实践和技术应用案例为载体，把必要的理论和专业知识呈现给学生。

《工程力学》共分 11 章，主要内容包括标量与矢量、力与力偶、静力学、运动学、动力学、机械振动、应力状态与强度理论、拉伸和压缩 剪切和挤压、弯曲、扭转、组合变形，在每章的末尾，都有对应的大量工程实践例题，以利于学生理解专业的知识及其应用。

《工程力学》可作为过程装备与控制工程、油气储运工程、环保设备工程、物流工程等专业的教材，也可供相关专业工程技术人员参考。

# 学式野工

## 图书在版编目 (CIP) 数据

工程力学/李福宝, 周丽楠, 李勤主编. —北京: 化学工业出版社, 2019.3  
全国高等学校新工科系列教材  
ISBN 978-7-122-33931-7

I. ①工… II. ①李…②周…③李… III. ①工程力学-高等学校-教材 IV. ①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 029167 号

责任编辑: 丁建华 徐雅妮

装帧设计: 韩 飞

责任校对: 宋 玮

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装: 三河市延风印装有限公司

710mm×1000mm 1/16 印张 16 1/4 字数 315 千字 2019 年 3 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888

售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 39.00 元

版权所有 违者必究

## 前言

随着国民经济发展的不断深入,我国的产业结构发生了革新式的变化,支撑产业革新的新知识、新技术也随之发生新的调整和升级。因此,培养新知识结构人才必然要求创新,“新时代,新工科,新人才”应时而生。为了适应新型人才培养需要,我们组织编写了本书。

本书具有以下特点:

1. 以石油化工行业为背景,强调理论和实践双翼齐飞的原则,用基础理论解决生产实际问题。因此,在“工程实践例题与简解”的编写中以石油化工装备为对象,在解题中要让学生了解该设备是什么、用在哪、什么结构、什么原理、我们用该知识能解决什么问题,避免空谈理论,使学生不知道它用在哪、怎么用,这就是我们提出的“教学要落地”。

2. 与实践紧密结合。坚持“把课桌搬到车间里、把黑板挂在设备上、把论文写在产品中”的原则,与生产实践紧密联系,做到有的放矢的“教与学”。

3. 坚持“四个面向”。即充分考虑培养的学生到什么企业工作、在什么岗位、在这个岗位干什么、这个岗位需要什么样的知识结构,并以此知识为核心建立教学体系。

4. 根据“新时代,新工科,新人才”的需求改变课程体系。坚持“精准教学”,即充分考虑哪些课要上、哪些课要调整、哪些内容是重点,以符合“新工科”人才的培养目标。

5. 坚持“用则精学”的原则。就业岗位技术技能需要的知识,坚持“精讲”“精学”“精用”,使学生集中精力学好、用好。对于在专业体系中用得少的或用不到的知识先不学,以后用到再学,从而把有限的时间,集中在学生真正需要掌握的知识上,做到学懂弄通。

本书由沈阳工业大学李福宝教授、周丽楠讲师、李勤教授主编,全书共11章,其中第6、7章由李福宝编写,第8章由李秀菊编写,第2章由江远鹏编写,第1、4、9章由周丽楠编写,第5章由李勤编写,第10章由刘岩岩编写,第3章由临沂大学机械与车辆工程学院院长孙成通教授编写,第11章由中海油惠州石化总经理、沈阳工业大学硕士生导师、教授级高级工程师赵岩编写,全书由李福宝教授统稿。

在本书编写过程中，得到了中海油惠州石化公司及临沂大学机械与车辆工程学院相关领导和同事的大力支持，同时沈阳工业大学的许增金、徐飞、霍英姐、刘一达、王志宇、金珏、赵一峰、王春晓、孙嘉馨等老师和研究生也做出了贡献，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中难免疏漏和不足之处，呈请读者批评指正。

编者

2018年12月

# 目录

## 第1章 标量与矢量

2

|                    |    |
|--------------------|----|
| 1.1 标量与矢量概述 .....  | 2  |
| 1.1.1 定义 .....     | 2  |
| 1.1.2 矢量运算 .....   | 2  |
| 1.1.3 三维正交矢量 ..... | 3  |
| 1.1.4 矢量的点积 .....  | 4  |
| 1.1.5 矢量的叉积 .....  | 5  |
| 1.1.6 矢量的微积分 ..... | 6  |
| 1.2 梯度 .....       | 7  |
| 1.3 散度 .....       | 7  |
| 1.4 旋度 .....       | 8  |
| 工程实践例题与简解 .....    | 8  |
| 思考题 .....          | 14 |

## 第2章 力与力偶

15

|                   |    |
|-------------------|----|
| 2.1 力的概念及性质 ..... | 15 |
| 2.2 刚体受力分析 .....  | 16 |
| 2.3 力矩和力偶 .....   | 18 |
| 工程实践例题与简解 .....   | 20 |
| 思考题 .....         | 30 |

## 第3章 静力学

32

|                  |    |
|------------------|----|
| 3.1 平面力系问题 ..... | 32 |
| 3.2 空间力系问题 ..... | 34 |
| 工程实践例题与简解 .....  | 36 |
| 思考题 .....        | 50 |

## 第4章 运动学

52

|                 |    |
|-----------------|----|
| 4.1 点的运动 .....  | 52 |
| 4.2 刚体的运动 ..... | 56 |
| 工程实践例题与简解 ..... | 59 |
| 思考题 .....       | 72 |

## 第5章 动力学

73

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 5.1 动力学基本定律 .....    | 73  |
| 5.2 质点运动微分基本方程 ..... | 73  |
| 5.3 惯性力 .....        | 74  |
| 5.4 平面图形的几何问题 .....  | 75  |
| 5.5 动力学定理 .....      | 78  |
| 5.6 功率 .....         | 88  |
| 工程实践例题与简解 .....      | 89  |
| 思考题 .....            | 100 |

## 第6章 机械振动

102

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 6.1 简谐振动 .....    | 102 |
| 6.2 无阻尼受迫振动 ..... | 106 |
| 6.3 有阻尼振动 .....   | 107 |
| 6.4 有阻尼受迫振动 ..... | 109 |
| 6.5 共振 .....      | 110 |
| 6.6 振动合成 .....    | 112 |
| 工程实践例题与简解 .....   | 113 |
| 思考题 .....         | 129 |

## 第7章 应力状态与强度理论

131

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 7.1 应力与应变 ..... | 131 |
| 7.1.1 应力 .....  | 131 |
| 7.1.2 应变 .....  | 132 |

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 7.2 应力状态 .....      | 132 |
| 7.2.1 单元体 .....     | 133 |
| 7.2.2 主应力 .....     | 134 |
| 7.2.3 平面应力状态 .....  | 134 |
| 7.2.4 三向应力圆 .....   | 137 |
| 7.3 广义胡克定律 .....    | 138 |
| 7.4 金属材料力学性能 .....  | 138 |
| 7.4.1 低碳钢拉伸试验 ..... | 138 |
| 7.4.2 强度指标 .....    | 140 |
| 7.4.3 许用应力 .....    | 140 |
| 7.4.4 弹性与塑性 .....   | 143 |
| 7.5 强度理论 .....      | 144 |
| 工程实践例题与简解 .....     | 145 |
| 思考题 .....           | 154 |

## 第8章 拉伸和压缩 剪切和挤压

156

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 8.1 拉伸和压缩 .....   | 156 |
| 8.1.1 内力 .....    | 156 |
| 8.1.2 应变与应力 ..... | 156 |
| 8.1.3 胡克定律 .....  | 158 |
| 8.1.4 强度计算 .....  | 158 |
| 8.2 剪切与挤压 .....   | 159 |
| 8.2.1 剪切 .....    | 159 |
| 8.2.2 挤压 .....    | 160 |
| 工程实践例题与简解 .....   | 162 |
| 思考题 .....         | 176 |

## 第9章 弯曲

177

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 9.1 外力分析 .....         | 177 |
| 9.2 内力分析 .....         | 178 |
| 9.3 弯曲应力 .....         | 181 |
| 9.4 挠度 .....           | 186 |
| 9.5 提高梁的强度和刚度的措施 ..... | 188 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 9.6 圆环的挠曲线微分方程 ..... | 189 |
| 工程实践例题与简解 .....      | 192 |
| 思考题 .....            | 206 |

## 第10章 扭转

207

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 10.1 外力偶矩 .....     | 207 |
| 10.2 薄壁筒扭转 .....    | 208 |
| 10.2.1 扭矩 .....     | 208 |
| 10.2.2 应力 .....     | 209 |
| 10.2.3 应变 .....     | 210 |
| 10.2.4 物理方程 .....   | 210 |
| 10.3 圆轴扭转 .....     | 210 |
| 10.3.1 扭矩 .....     | 211 |
| 10.3.2 几何方程 .....   | 211 |
| 10.3.3 物理方程 .....   | 212 |
| 10.3.4 静力学方程 .....  | 212 |
| 10.4 圆轴扭转强度条件 ..... | 213 |
| 10.5 圆轴扭转刚度条件 ..... | 213 |
| 工程实践例题与简解 .....     | 214 |
| 思考题 .....           | 230 |

## 第11章 组合变形

231

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 11.1 拉伸与弯曲组合 ..... | 231 |
| 11.2 弯曲与扭转组合 ..... | 233 |
| 工程实践例题与简解 .....    | 235 |
| 思考题 .....          | 248 |

## 参考文献

249



工程力学是工科相关专业的一门技术基础课，涉及众多的力学学科分支与广泛的工程技术领域，理论性较强，与工程技术联系极为密切，主要包含理论力学和材料力学部分内容。在学习这门课程之前，需要首先明确以下概念。

#### (1) 构件的强度、刚度和稳定性

化工机械设备的构件在力学方面必须满足强度、刚度和稳定性三个方面的基本要求，以保证其能够安全运行：

- ① 强度——抵抗载荷对其的破坏；
- ② 刚度——不发生超过许可的变形；
- ③ 稳定性——维持构件自身的几何形状。

#### (2) 力的外效应与内效应

力是化工机械设备机械性能影响因素的主要方面，而力的效应是通过物体间相互作用所产生的效果体现出来的。力的作用效果分为外效应与内效应两个方面。

① 外效应：力使物体运动状态发生改变，是理论力学要研究的问题。

② 内效应：力使物体发生形变，是材料力学要研究的问题。

外效应是内效应的基础。

#### (3) 理论力学与材料力学

理论力学是研究物体在空间的位置随时间改变的一般规律的科学，以研究力与力偶为基础，按其内容分为：静力学（研究受力物体平衡时作用力应满足的条件）、运动学（研究物体的运动规律，如轨迹、速度、加速度）、动力学（研究受力物体的运动和作用力之间的关系）。

材料力学是研究构件在外力作用下的变形和破坏规律。以研究应力与应变为基础，其主要内容为：拉伸、压缩、弯曲、扭转和组合变形。

工程力学的定理、定律和结论广泛应用于各行各业的工程技术中，是解决工程实际问题的重要基础。

# 第 1 章

## 标量与矢量

### 1.1 标量与矢量概述

#### 1.1.1 定义

标量 (scalar quantity) 只具有大小, 如: 时间, 体积, 能量, 质量, 密度和功。用代数方法进行标量的求和运算, 如:  $2s+7s=9s$ ;  $14\text{kg}-5\text{kg}=9\text{kg}$ 。

矢量 (vector quantity) 既有大小又有方向, 如: 力, 位移, 速度和冲量。

其用黑斜体字母和带箭头字母表示, 如:  $\mathbf{P}$  或  $\vec{P}$ , 其大小用  $|\mathbf{P}|$  表示。

注: ① 单位矢量 (单位矢) 是一个具有单位长度的矢量, 如  $\vec{i}$ , 其  $|\vec{i}|=1$ 。

② 矢量  $\mathbf{P}$  的负矢量用  $-\mathbf{P}$  表示, 其大小相等, 方向相反。

③ 一个矢量与自身的减法运算称为零矢量, 即  $\mathbf{P}-\mathbf{P}=\mathbf{0}$ 。

#### 1.1.2 矢量运算

##### (1) 加法

① 平行四边形法。如图 1-1 所示, 矢量  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  合成矢量  $\mathbf{R}$ 。

② 矩形法。如图 1-2 所示, 矢量  $\mathbf{P}$  垂直于矢量  $\mathbf{Q}$ 。

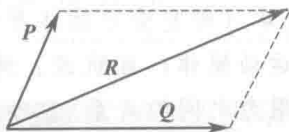


图 1-1 平行四边形法

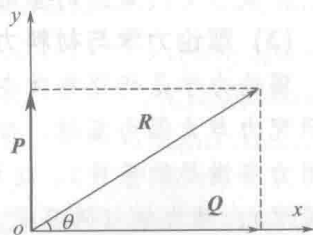


图 1-2 矩形法

其分量为:

$$\begin{cases} Q=R\cos\theta \\ P=R\sin\theta \end{cases}$$

③ 三角形法。任取一矢量, 其末端连接另一矢量始端, 则合矢量是从第一

个矢量的始端连接到另一矢量的末端，如图 1-3 所示。

(2) 减法

矢量减法是矢量加法的逆运算，即：

$$\mathbf{P}-\mathbf{Q}=\mathbf{P}+(-\mathbf{Q})$$

(3) 矢量与数量乘法运算

矢量  $\mathbf{P}$  与数量  $m$  相乘等于  $m\mathbf{P}$ ，其大小是矢量  $\mathbf{P}$  的  $m$  倍，作用线与  $\mathbf{P}$  相同，但方向要取决于  $m$  的正负。

运算法则：

$$\begin{aligned}(m+n)\mathbf{P} &= m\mathbf{P}+n\mathbf{P} \\ m(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) &= m\mathbf{P}+m\mathbf{Q} \\ m(n\mathbf{P}) &= n(m\mathbf{P})=(mn)\mathbf{P}\end{aligned}$$

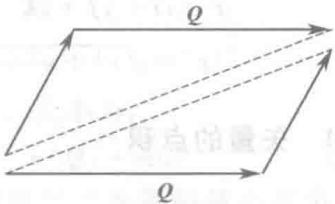


图 1-3 三角形法

### 1.1.3 三维正交矢量

(1) 三维正交单位矢量 (three dimensional orthogonal vector)

坐标轴  $x, y, z$  对应单位矢量为  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ，如图 1-4 所示， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  符合右手定则。

因此，矢量  $\mathbf{P}$  可写成：

$$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k} \tag{1-1}$$

其中，如图 1-5 所示， $P_x\mathbf{i}, P_y\mathbf{j}, P_z\mathbf{k}$  为  $\mathbf{P}$  沿着正交坐标轴  $x, y, z$  的分矢量， $P_x, P_y, P_z$  为  $\mathbf{P}$  在  $x, y, z$  轴上的分量。

且  $P_x=|\mathbf{P}|\cos\theta_x, P_y=|\mathbf{P}|\cos\theta_y, P_z=|\mathbf{P}|\cos\theta_z$ 。

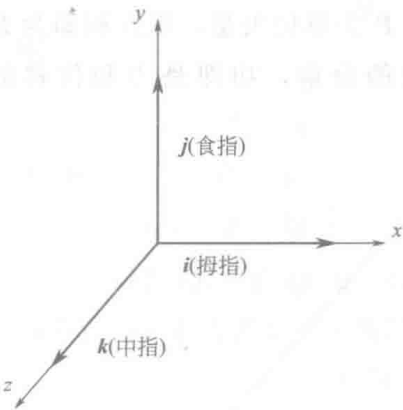


图 1-4 单位矢量

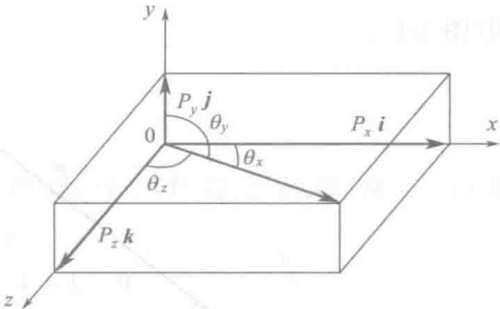


图 1-5 矢量分解

(2) 矢径

在坐标系  $(x, y, z)$  下，如图 1-6 所示，矢径  $\mathbf{r}$  为：

$$\begin{cases} \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (1-2)$$

### 1.1.4 矢量的点积

定义：二矢量  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$ ，如图 1-7 所示，其点积  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$  是一标量，大小为：

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = |\mathbf{P}| |\mathbf{Q}| \cos(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = PQ \cos \theta \quad (1-3)$$

当  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$  时， $\mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$ 。

当  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$  用分量去表示，即：

$$\begin{cases} \mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \\ \mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \end{cases} \quad (1-4)$$

则  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$

矢量  $\mathbf{P}$  沿着直角坐标系的分矢量为：

$$P_x = P\mathbf{i}, P_y = P\mathbf{j}, P_z = P\mathbf{k}$$

因为  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  是正交单位矢量，所以：

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{1}| \cdot |\mathbf{1}| \cos 90^\circ = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{1}| \cdot |\mathbf{1}| \cos 0^\circ = 1$$

点积的几何意义：可以用来表征或计算两个向量之间的夹角，以及  $\mathbf{P}$  向量在  $\mathbf{Q}$  向量方向的投影。

点积的物理意义：用来计算合力和功。若  $\mathbf{P}$  为单位矢量，则点积即为  $\mathbf{P}$  在方向  $\mathbf{Q}$  的投影，即给出了力在这个方向上的分解，功即是力和位移的点积(图 1-8)。

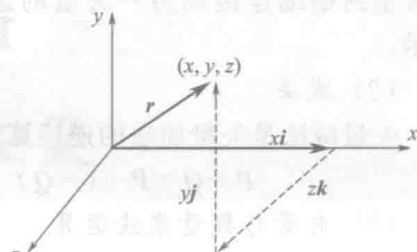


图 1-6 矢径分解

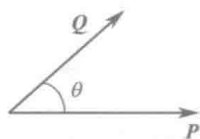


图 1-7 二矢量关系

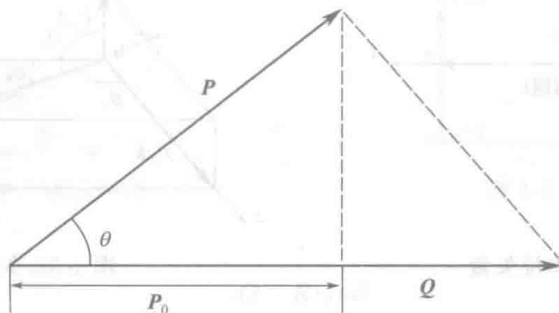


图 1-8 矢量的点积 (dot product of vectors)

### 1.1.5 矢量的叉积

定义：二矢量  $P$  和  $Q$ ，其叉积  $P \times Q$  是一矢量，大小为：

$$|P \times Q| = |P| \cdot |Q| \sin(P, Q) = |P| \cdot |Q| \cdot \sin\theta \quad (1-5)$$

方向符合右手螺旋法则，即四指从  $P$  的方向经过二矢量的最小夹角  $\theta$  到  $Q$  方向，拇指方向即为  $P \times Q$  的方向，如图 1-9 所示。当  $P \times Q = 0$  时， $P \parallel Q$ 。

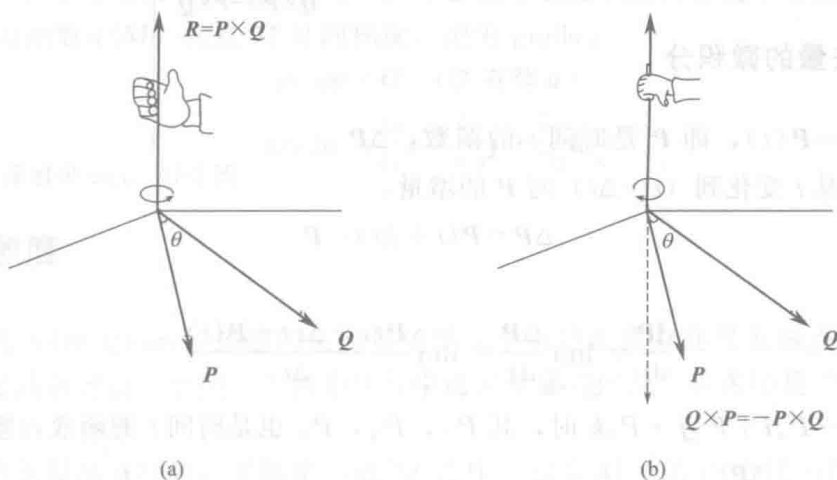


图 1-9 矢量的叉积 (cross product of vectors)

当  $P$  和  $Q$  用分量表示，即：

$$\begin{cases} P = P_x i + P_y j + P_z k \\ Q = Q_x i + Q_y j + Q_z k \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} P \times Q &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \\ &= (P_y Q_z - P_z Q_y) i + (P_z Q_x - P_x Q_z) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k \end{aligned} \quad (1-6)$$

因为  $i, j, k$  为正交单位矢量，所以：

$$\begin{aligned} i \times i &= j \times j = k \times k = 0 \\ i \times j &= k, j \times k = i, k \times i = j \end{aligned}$$

叉积的几何意义：

(1) 在三维几何中，向量  $P$  和向量  $Q$  叉积的结果是一个向量，更为熟知的叫法是法向量，该向量垂直于  $P$  和  $Q$  向量构成的平面。

(2) 在 3D 图像学中, 叉积的概念非常有用, 可以通过两个向量的叉积, 生成第三个垂直于  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  的法向量, 从而构建  $xyz$  坐标系。如图 1-10 所示。

(3) 在二维空间中, 叉积还有另外一个几何意义就是:  $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$  等于由向量  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  构成的平行四边形的面积。

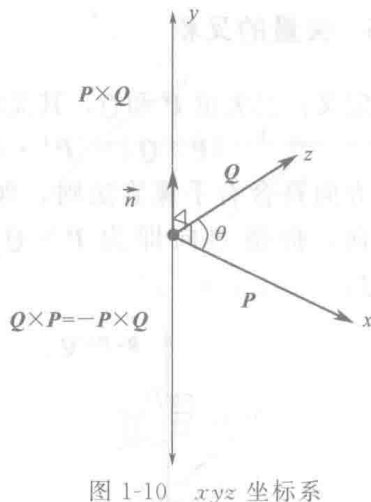


图 1-10  $xyz$  坐标系

### 1.1.6 矢量的微积分

令  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ , 即  $\mathbf{P}$  是时间  $t$  的函数,  $\Delta \mathbf{P}$  是当时间从  $t$  变化到  $(t = \Delta t)$  时  $\mathbf{P}$  的增量。

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}$$

即:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t}$$

当  $\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$  时, 其  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  也是时间  $t$  的函数, 则

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(P_x + \Delta P_x)\mathbf{i} + (P_y + \Delta P_y)\mathbf{j} + (P_z + \Delta P_z)\mathbf{k} - P_x\mathbf{i} - P_y\mathbf{j} - P_z\mathbf{k}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x \mathbf{i} + \Delta P_y \mathbf{j} + \Delta P_z \mathbf{k}}{\Delta t} \\ &= \frac{dP_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1-7)$$

运算关系为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \mathbf{Q} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \cdot \mathbf{P} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \times \mathbf{Q} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \times \mathbf{P} \end{aligned} \quad (1-8)$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{P}) = \varphi \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{P}$$

式中,  $\varphi$  是  $t$  的函数。

## 1.2 梯度

梯度 (gradient) 的本意是一个向量 (矢量), 表示某一函数在该点处的方向导数沿着该方向取得最大值, 即函数在该点处沿着该方向 (此梯度的方向) 变化最快, 变化率最大 (为该梯度的模)。

若在数量场  $u(M)$  中的一点  $M$  处, 存在这样的矢量  $G$ , 其方向为函数  $u(M)$  在  $M$  点处变化率最大的方向, 其模也正好是这个最大变化率的数值, 则称矢量  $G$  为函数  $u(M)$  在点  $M$  处的梯度, 记为  $\text{grad}u$ :

$$\text{grad}u = G \quad (G \text{ 有势 } u)$$

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k \quad (1-9)$$

## 1.3 散度

散度 (divergence) 描述的是向量场里一个点是汇聚点还是发源点, 形象地说, 就是这包含这一点的一个微小体元中的向量是“向外”居多还是“向内”居多。散度是个标量。

设有矢量场  $A(M)$ , 于场中一点  $M$  处作一包含  $M$  点在内的任一闭曲面  $S$ , 设其所包围的空间区域为  $\Omega$ , 以  $\Delta v$  表示其体积, 以  $\Delta\Phi$  表示从其内穿出  $S$  的通量, 如图 1-11 所示, 则:

$$\text{div}A = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\Delta\Phi}{\Delta v} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\oint_S A dS}{\Delta v}$$

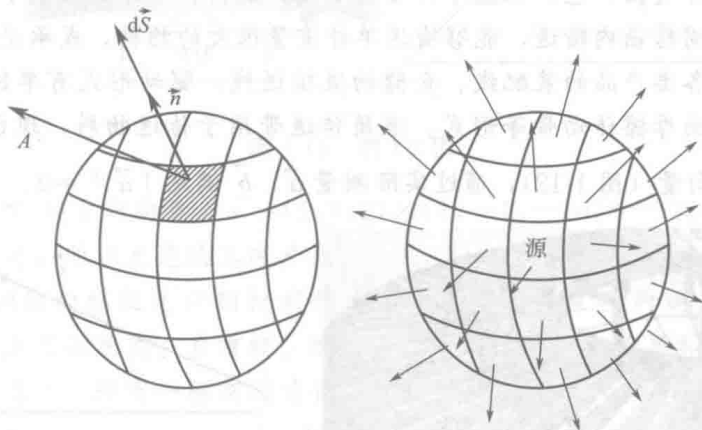


图 1-11 散度

如果  $A = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (1-10)$$

## 1.4 旋度

旋度 (curl) 表示三维向量场对某一点附近的微元造成的旋转程度。这个向量提供了向量场在这一点附近的旋转性质。旋度向量的方向表示向量场在这一点附近旋转度最大的环量的旋转轴, 它和向量旋转的方向满足右手定则。旋度向量的大小则是绕着这个旋转轴旋转的环量与旋转路径围成的面元的面积之比。

若在向量场  $\mathbf{A}$  中的一点  $M$  处存在这样的—个矢量  $\mathbf{R}$ , 向量场  $\mathbf{A}$  在点  $M$  处沿其方向的环量面密度为最大, 这个最大的数值正好就是  $|\mathbf{R}|$ , 则称矢量  $\mathbf{R}$  为向量场  $\mathbf{A}$  在点  $M$  处的旋度, 记作  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{R}$ 。

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1-11)$$

$$\text{环量密度: } \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$



### 工程实践例题与简解

**例 1-1** 滚筒输送机由机架、辊筒、支腿等组成, 是非常适合重载的输送设备。其适用于各类箱、包、托盘等件货的输送, 散料、小件物品或不规则的物品需放在托盘上或周转箱内输送, 能够输送单件重量很大的物料, 或承受较大的冲击载荷, 也可做成各类产品的装配线、仓储物流输送线, 驱动形式有单链轮、双链轮、O 形皮带、平面摩擦传动带等形式。滚筒传送带用于传送物料, 现已知两滚筒  $a$ ,  $b$  可看做两个向量 (图 1-12), 通过实际测量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 2$ , 而

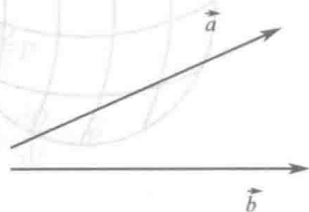
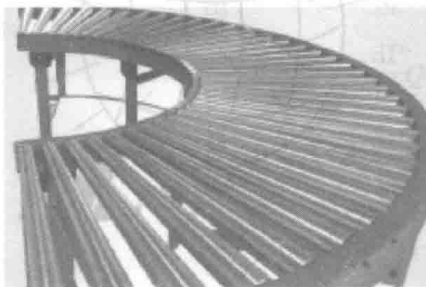


图 1-12 例 1-1 图