线性代数

导学教程

沈阳建筑大学理学院
《线性代数导学教程》编写组 / 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数导学教程

沈阳建筑大学理学院《线性代数导学教程》编写组　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数导学教程/沈阳建筑大学理学院《线性代数导学教程》编写组主编.—北京：北京理工大学出版社，2019.8

ISBN 978-7-5682-7446-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①沈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第176922号

出版发行/北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/唐山富达印务有限公司
开　　本/787毫米×1092毫米 1/16
印　　张/7
字　　数/165千字
版　　次/2019年8月第1版 2019年8月第1次印刷
定　　价/25.00元

责任编辑/多海鹏
文案编辑/孟祥雪
责任校对/周瑞红
责任印制/李志强

前 言

《线性代数导学教程》是配套沈阳建筑大学靖新主编的《线性代数》教材编写的导学教程. 根据教学安排，其对每一次课堂教学的主要内容进行了概括性总结，并配有同步作业，典型例题解题流程图等. 本书主要面向理工科院校的学生，可作为线性代数课程的配套导学使用，也可供使用该教材的教师作为教学参考.

编写《线性代数导学教程》，主要是为了满足广大工科、经济类、管理类等非数学专业的学生学习线性代数的需要. 期望本书能对提高线性代数的教学质量有所帮助，帮助学生掌握线性代数的教学基本要求.

本书按照教材的讲课内容概括了知识点并安排了相应的作业题，题型包括填空题、选择题、计算题和证明题. 本书以基础性习题为主，主要侧重基本概念、基本知识和基本技能的训练，突出教材重点、难点；同时，适当增加了提高能力题.

为了方便学生线上、线下和课上、课下学习，本书还以二维码方式给出了若干个线性代数作业题的数学实验即用 MATLAB 求解的结果；还增加了难理解的内容的课件 PDF 文件以及难题讲解的 PDF 文件，学生可以通过扫码方式深入学习有关知识.

本书第一章、第二章由靖新编写；第三章由缪淑贤编写；第四章由郑莉编写；第五章由孙海义编写. 全书习题部分由郑莉统筹规划，内容部分由靖新、郑莉统稿，全书由靖新主审.

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

目录

线性代数导学教程

难题讲解

班级：　　　　学号：　　　　姓名：　　　　任课教师：

授课章节	第一章　行列式　1.1　二阶与三阶行列式;1.2　全排列及逆序数
目的要求	1. 掌握二阶与三阶行列式的定义及运算; 2. 了解全排列及逆序数
重点难点	重点:三阶行列式的对角线展开; 难点:复杂排列的逆序数计算

主要内容:

一、二阶与三阶行列式

1. 二阶与三阶行列式的概念

行列式在线性代数中仅仅是一个工具,我们要学会观察行列式的结构特点,发现行列式中数据的排列规律,会计算行列式的值.

定义 1.1.1　称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式,其值等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

定义 1.1.2　称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式,其值等于

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

2. 二阶与三阶行列式的计算

对角线法则只适用于二阶、三阶行列式. 对于四阶及四阶以上的行列式不能使用对角线法则.

二、全排列及逆序数

为了描述 n 阶行列式定义,需要引入全排列、逆序数及奇排列和偶排列概念.

定义 1.2.1　由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列(简称为排列).

定义 1.2.2　在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么这一对数就构成一个逆序,一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

定义 1.2.3　逆序数为偶数的排列称为偶排列;逆序数为奇数的排列称为奇排列.

学习笔录:

学习笔录：

三、难题解答

例题 1　求解关于变量 x 的方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解　用对角线法则，将方程左端的三阶行列式 D 展开为：

$$\begin{aligned} D &= 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 \\ &= x^2 - 5x + 6 \\ &= (x-2)(x-3) \end{aligned}$$

令 $D=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

本次课作业：

1.1　二阶与三阶行列式

1. 填空题：

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} =$ ________；

(2) $\begin{vmatrix} a & ab \\ b & b^2 \end{vmatrix} =$ ________；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} =$ ________；

(4) 三阶行列式 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ ________.

2. 用计算行列式方法求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 3x + 4y = 6; \end{cases}$

学习笔录：

(2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-1, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ 3x_1+x_2-2x_3=-1. \end{cases}$

1.2　全排列及其逆序数

1. 选择题：

(1) 排列 134782695 的逆序数为________.

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

(2) 下列排列中________是偶排列.

A. 4312　　B. 51432　　C. 45312　　D. 654321

2. 确定 i 与 j，使：

(1) $1245i6j97$ 为奇排列；(2) $3972i15j4$ 为偶排列.

3. 求下列排列的逆序数：

(1) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；

(2) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$.

线性代数导学教程

班级：　　　　学号：　　　　姓名：　　　　任课教师：

授课章节	第一章　行列式　1.3　n 阶行列式的定义;1.4　对换;1.5　行列式的性质
目的要求	1. 理解 n 阶行列式的定义; 2. 会计算几个特殊的 n 阶行列式; 3. 会用行列式的性质计算行列式
重点难点	重点:n 阶行列式的定义; 难点:n 阶行列式的计算及证明

主要内容:

学习笔录:

一、n 阶行列式的定义

1. 定义

定义 1.3.1　称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式,其值等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中,$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列;$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 排列的逆序数;$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列求和. 习惯上,我们记:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用 $a_{ij}(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ 表示 D 中第 i 行第 j 列元素. 行列式简记为 $\det(a_{ij})$.

2. 两个特殊行列式

(1) 三角形行列式.

主对角线以下(上)的元素都为零的行列式叫作上(下)三角形行列式.

n 阶上三角形行列式的值等于主对角元素的乘积,即:

学习笔录：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

（2）对角形行列式.

主对角线以外的元素都为零的行列式叫作对角形行列式，其值等于主对角元素的乘积.

引入行列式的性质之前需首先引入对换的概念.

二、对换的定义

定义 1.4.1 在一个排列中，将任意两个自然数互换位置，其余的自然数不动，就得到另一个排列. 这种对排列的变换称为对换.

定理 1.4.1 对换改变排列的奇偶性.

三、行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等. 即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式反号. 即 $D_1=-D_2$.

性质 3 若行列式的两行(列)对应元素相同，则行列式为零.

性质 4 行列式的一行(列)的所有元素同时乘以一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

性质 5 行列式的一行(列)的所有元素的公因子 k，可以提到行列式的外面.

性质 6 如果行列式中的一行(列)为零，则行列式为零.

性质 7 如果行列式中的两行(列)成比例，则行列式为零.

性质 8

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1i} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 9 把行列式的某一行(列)的各元素的 k 倍加到另一行(列)对应的元素中，行列式的值不变.

学习笔录：

四、计算行列式的思路流程图(见图 1-1)

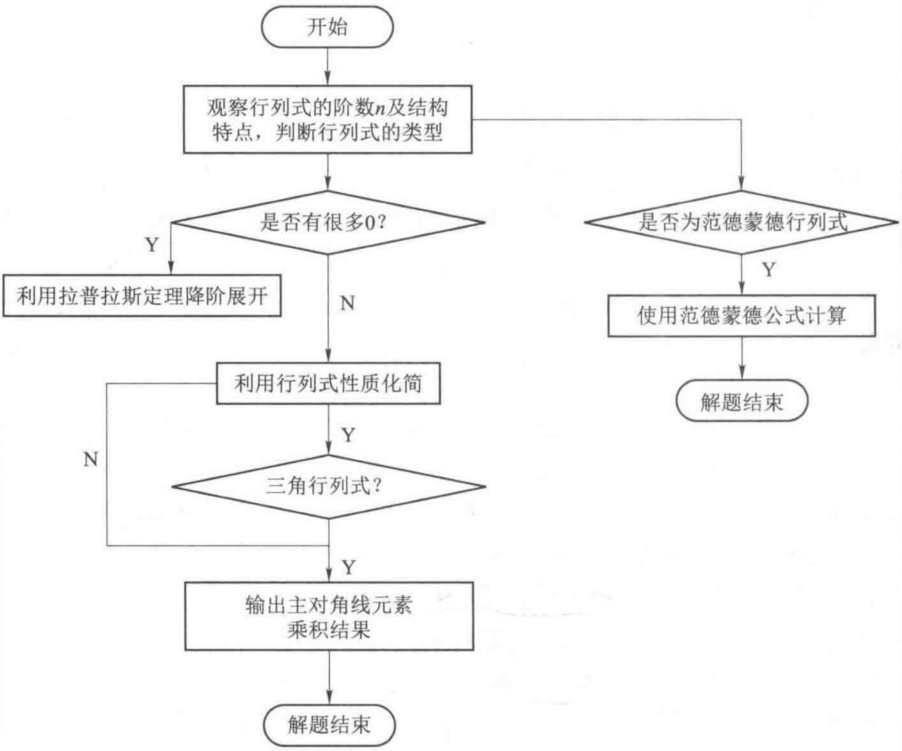

图 1-1　计算行列式的思路流程图

本次课作业：

1.3　*n* 阶行列式的定义

1. 下列各乘积中哪些是四阶行列式中的项？请在其后的括号中填上该项所带的符号；哪些不是四阶行列式中的项？请在其后的括号中划×.

$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$(　　)；　　$a_{12}a_{22}a_{34}a_{43}$(　　)；

$a_{22}a_{33}a_{41}a_{11}$(　　)；　　$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$(　　).

2. 填空题：

(1) 如果 n 阶行列式 D 中等于零的元素个数大于 n^2-n 个，则 $D=$ ________.

(2) n 阶行列式共有________项，共有________个元素.

学习笔录：

（3）设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 11 & -7 \\ 5 & 4 & x & 1 \\ 3 & x & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$，则 D 的展开式中 x^2 的系数为________.

3. 计算行列式：

（1）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　（4）$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

学习笔录：

1.4 对换　　1.5 行列式的性质

1. 填空题：

(1) 每列元素之和等于零的行列式的值为________；

(2) 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & -2a_{22} & 2a_{23} \\ 3a_{31} & -3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} =$ ________；

(3) 三阶 $D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2k+5a_1 & 3+4a_1 \\ 1+a_2 & 2k+5a_2 & 3+4a_2 \\ 1+a_3 & 2k+5a_3 & 3+4a_3 \end{vmatrix} =$ ________；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -6 \\ 4 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ ________.

2. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1\,014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

学习笔录：

(3) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$（其中，$a_0a_1\cdots a_n \neq 0$）；

(4) $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$；

学习笔录：

（5）$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$.

3. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$（其中，$a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$）.

线性代数导学教程

班级：　　　　学号：　　　　姓名：　　　　任课教师：

授课章节	第一章　行列式　1.6　行列式按行(列)展开； 1.7　克拉默法则——用行列式求解 n 元线性方程组
目的要求	1. 理解行列式按行(列)展开； 2. 会用克拉默法则解 n 元线性方程组
重点难点	重点：克拉默法则； 难点：行列式按行(列)展开

主要内容：

学习笔录：

一、行列式按行(列)展开

低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便. n 阶行列式通过 $n-1$ 阶行列式降阶展开，可以降低阶数，计算简便.

1. 余子式与代数余子式的概念

定义 1.6.1　在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 拉普拉斯定理

行列式等于它的任一行(列)的元素与其对应的代数余子式乘积之和.

二、克拉默法则

定理　如果 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$