現代几何学概観

Godeaux 著

黄緣芳譯

商务印書館

現代·几何学概观

Godeaux 著
黃緣芳 譯

商务印書館

現代几何学概观

Godeaux著

黃緣芳譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新華書店總經售
上海勞動印製廠印刷
13017·130

1951年10月初版　開本850×1168 1/32
1957年5月再版　印張4 11/16
1957年5月上海第一次印刷　印數2,001－6,000
定價(10)¥0.75

著者序

本書之目的，不在闡論幾何學之內容，而在敍述幾何學之派系。質言之，本書乃將近來幾何學者所闢之若干途徑，加以敍列，而尤致力於陳述到達較完美的近世幾何學理論之過程。此種企圖之前面，滿佈荊棘，殆屬無可諱言。須知，算學上無康莊大道；吾人欲洞曉近世理論，勢必上溯古星卜家樹立初步原則之日，下覽人類智慧發展所歷之途。此種涉獵自較先進所經之過程爲坦直，但未必簡短。本書卽就此目標作詳細之說明，以貢獻於具有若干算學概念之讀者。

F. Klein 將幾何學與變換羣概念取得聯繫，遂使幾何學得顯著之進步，誠無疑義。故每種幾何學各與一變換羣成對應。讀者祇要瀏覽本書前四節卽可了解 Klein 之觀念。稍進頗涉抽象，而達到更普遍之概念。此爲第一章之梗概。

第二章論射影幾何學，爲說明簡單計，採用解析幾何學方法。吾人重得徵驗 Klein 觀念用途之弘大。

第三章專論幾何學原理及非歐克里得幾何學。在說明中，Klein 觀念第三度表現其主要任務。

著者草此三章時，務求與 Liège 大學各學院預備生有同等算學知識之讀者易於通曉；並希望準備操技師生涯之青年能讀此而有得於心，此種希望不爲其有裨於應用方面，而爲其有裨於普遍構圖法之獲得。

後二章之知識頗爲需要;依著者期望言之,對於治算學之大學生更覺切要,蓋冀其能窺見雙有理變換之幾何學之富美,或能激發其中之若干讀者向此途徑進行研究之趣味,則著者之辛勞卽獲得巨大之代價矣。

茲以不欲於正文中瑣碎夾雜文獻,故將認爲有裨參考之資料彙列於本書之末。

本書足以反映出著者在 Liège 大學內教授幾何學所取之方針。

1930年9月14日 Lucien Godeaux 序於 Liège

目　　錄

附錄

第一章　幾何學與羣論

1. 圖形之幾何性質　一圖形就性質言之，可別爲二：即圖樣性質 (Propriétés topographiques) 及幾何性質 (Propriétés géométriques) 是。

試作一三角形及其內切圓。設此圓之半徑量得 8 公分，此一性質僅爲特殊三角形所獨有，故屬於所作圖形之圖樣性質。反之，吾人謂三角形之內心乃內角平分線之交點，此一性質便不限於所作三角形，而爲一切三角形所公有，即爲三角形之幾何性質。

設一教師向學生講正六角形之理論，乃在黑板上作其圖形；於是，諸生亦於其筆記簿上作一面積較小之正六角形，相似 (semblable) 於其在黑板上所見者。斯時，學生完全可仿教師對於六角形之論究，而各就其筆記簿上所畫六角形作同樣論究。即將筆記簿之紙施以平移及迴轉運動，對於原來論究仍無變更。不獨此也，設以 A, B, C, D, E, F 等文字按時針動向表六角形各頂，而此等論究能成立時，則將文字改依反時針動向表各頂（即以 AD 爲軸所得之對稱形代原形），而論究仍然成立。

故知圖形之幾何性質及所作論究，並不因圖形之平移，旋轉，對稱變換或相似變換等而生變動。

2. 初等平面幾何學　以上考究，使 F. Klein 對於幾何學之對象，獲得精密之論列。茲闡述其觀念於次：

試在平面內考究次列之變換。

(1)（與任一方向平行之）平移(Translation)；

(2)（繞任一點之）旋轉(Rotation)；

(3)（關於任一直線之）對稱(Symétrie)；

(4)（就任意中心及比率之）同位相似(Homothétie)。

設中心為 O，比率為 k，則與點 A 成同位相似之對應點 A'，乃在 OA 線上，且 $OA'=k\times OA$。

此等變換，及結合兩個或多個此等變換而導出之變換成一集 (Ensemble) G_2，組成所謂初等平面幾何學之主變換羣(Groupe principal)。

設有兩相似形，則吾人常可用羣 G_2 內之變換，將一圖形轉移為他一圖形。故平面初等幾何學者，乃研究施以主變換羣 G_2 內各變換時，圖形之不變性質也。

3. 初等空間幾何學(La géométrie élémentaire de l'espace)　上列研究不難推廣以適用於空間。試就次列變換考之：

(1)（與任一平面平行之）平移；

(2)（繞任一直線之）旋轉；

(3)（關於任一平面之）對稱；

(4)(就任意中心及比率之)同位相似。

此等變換，及結合兩個或多個此等變換而導出之變換成一集，稱爲初等空間幾何學之主變換羣。以 G_3 表之。

於是，初等空間幾何學者，乃研究施以羣 G_3 內各變換時圖形之不變性質也。

設於空間內固定一平面 ϖ，則平面 ϖ 上之初等幾何學之主變換羣，乃羣 G_3 之諸變換內能令平面不變(即仍止於此平面上之點)之諸變換所組成。此爲平行於平面 ϖ 之平移，繞垂直於平面 ϖ 之直線而旋轉，就垂直於平面 ϖ 之平面成對稱，及中心在平面 ϖ 上之同位相似等各變換與其結合而得之諸變換所組成。

4. 變換羣(Groupe de transformations)　設想一集 S，其所含各元素爲便利計稱爲點。

設就擔任集 S 內各點之變換考之。由假設知：集 S 內每一點各以一定變換轉移至此集內一定點。

設連續施兩變換 T_1, T_2，則 T_1 使 S 內各點 A, B, C, ……與 A', B', C', ……成一定對應，T_2 又使後者各點與 A'', B'', C'' ……成一定對應。於是，吾人可想像一變換 T 爲使各點 A, B, C, ……轉移至 A'', B'', C'',……之變換，因稱 T 爲 T_1 與 T_2 之積(Produit)，以

$$T=T_2T_1$$

記之；其排列次序以第一變換書於右邊。於此，有須留意者，即 T_2T_1 與 T_1T_2 通常表兩不同變換。

同時，因變換 T_1 能將點 A, B, C,…… 轉移至點 A', B', C', ……,故吾人可想見定有一變換能使點 A', B', C',……轉移至 A, B, C,……;此種變換稱爲 T_1 之反(inverse)以 T_1^{-1} 表之。

變換 $T_1^{-1}T_1$ 使 S 內各點不變，稱爲恆等變換(Transformation identique),以 I 表之,則得

$$T_1^{-1}T_1=I。$$

例如,設 S 爲空間內之點集 (Ensemble des points)，則以上所述之平移,旋轉,對稱及同位相似等皆爲具備上列諸性質之變換。設 T_1, T_2 爲平移,則積 T_2T_1 與 T_1T_2 全然相同；但若表關於平面之對稱時，則其結果全異。關於一平面之對稱變換乃一種變換 T 與其反變換相同者;可以 $T^{-1}=T$ 或 $T^2=I$ 記之。

一變換集若能使

(1)集內任意兩變換之積仍屬於此集，

(2)集內任一變換之反仍屬於此集

時,則稱爲成變換羣。

由此知一個變換羣必含有恆等變換。

前述之集 G_2 及 G_3 俱能滿足上述諸條件，故此等集可易稱爲羣。

對於變換羣理論作深刻之研究者爲 Lie 氏(1842—1899),雖此處並未引用其著作,但其功績殊堪吾人紀念。

5. 幾何學之構成　試就元素簇(Variété) 或集 V 及施於此簇內

各元素之變換羣 G 考之。

由簇 V 內之元素構成兩圖形。若羣 G 內有一變換能使一圖形轉移爲他圖形時，則稱此兩圖形對於羣 G 成彼此同等（équivalentes vis-à-vis du groupe G)。於是發生一問題：兩同等圖形有何公共性質乎?換言之,由簇 V 所構成之圖形不受變換羣 G 內各變換之影響者,其性質究若何乎?或按通用說法言之，對於羣 G 有彼此不變之性質者果如何乎?此種性質之總匯卽構成簇 V 之幾何學,而以羣 G 爲主變換羣。

構成一幾何學云者，乃設定一元素簇及施於此簇內各元素之一變換羣,而求此簇對於羣內各變換不生變更之諸性質也。

已知初等幾何學以如是構成,推之吾人所研究之全部幾何學,其構成方式亦莫不如是也。

6．導來幾何學(Géométries dérivées)　設吾人於羣 G 之變換中,受某一定條件之限制,僅就其一部變換所成之集 G' 予以研究。若 G' 亦自成一羣,則 G' 稱爲羣 G 之子羣(Sous-groupe)。

前已取羣 G 爲主變換羣而構成簇 V 之幾何學；今若取子羣 G' 爲主變換羣,則吾人可更構成簇 V 之第二種幾何學。

第一種幾何學之一切性質,自然亦爲第二種幾何學之一性質；但反之則不能成立。因第二種幾何學之每一性質施以子羣 G' 之諸變換自是不變，但若施以屬於羣 G 而不屬於羣 G' 之各變換時，則必變更；換言之，第一種幾何學內各性質之集體乃第二種幾何學內各性質之集體之一部。此第二種幾何學稱爲由第一種幾何學導來(dérivée)。

子羣 G' 通常乃由羣 G 之變換內取其能使簇 V 之一圖形 F 變換後仍回復為 F 者組成之。換言之,子羣 G' 乃於羣 G 之變換內取其能使 F 內每一元素各與同圖內一元素成對應者組成之。主變換羣為 G' 之導來幾何學之性質,乃主變換羣為 G 之第一種幾何學與圖形 F 有聯繫之諸性質。

例如,取空間內之點集為簇 V, 而以初等幾何學之主變換羣 G_3 為羣 G。則羣 G_3 內能使空間內一定點 O 不動之變換有:繞過 O 之直線而迴轉,就過 O 之平面成對稱及以 O 為心之同位相似等。此等變換形成 G_3 之一子羣 G'_3。以 G'_3 為主變換羣之幾何學乃由空間內之圖形與定點 O 有聯繫之諸性質所構成。

試就 O 為球心,r 為半徑之球面 S 言之。羣 G_3 內能使球面 S 不變(卽謂此球面施變換後仍回復原球面者)之變換為:繞過 O 之直線而迴轉及就過 O 之平面成對稱。此等變換形成 G_3 之子羣 G''_3(G''_3 又為 G'_3 之子羣)。主變換羣為 G''_3 之幾何學包括空間內圖形與定球面有聯繫之諸性質。

設吾人僅探究球面 S 上之點之性質,則得球面幾何學。

7. 同等幾何學 (Géométries équivalentes) 試再取以羣 G 為主變換羣之簇 V 之幾何學,而就第二個元素簇 V', 並此簇諸元素間之變換羣 G' 及以 G' 為主變換羣之簇 V' 之幾何學三者考之。

設於簇 V, V' 間成立一個雙一一對應 (Correspondance biunivoque) θ, 卽謂能使從 $V(V')$ 內每一元素以一定變換導出 $V'(V)$ 內唯一

元素之對應。

於是，θ 能使羣 G 內一變換 T 與施於簇 V' 內各元素之一變換 T' 成對應。因之，θ^{-1} 能使 V' 之一元素 A' 與 V 之一元素 A 相應；T 又使 A 與 V 內一元素 B 成對應；而 θ 又使 B 與 V' 之一元素 B' 成對應。於是得

$$T'=\theta T\theta^{-1}。$$

設如是得來之變換 T' 屬於羣 G'。此外並假定每個變換 T' 僅能由 G 之唯一變換導出；卽謂因簇 V, V' 之各元素間成立有雙一一對應之故，遂使羣 G, G' 之變換間亦成立雙一一對應。如此之羣稱爲成簡單同形(isomorphisme holoédrique)。

在此等狀況之下，主變換羣爲 G' 之簇 V' 之幾何學之一切性質，除應用術語需要更換外，自然得由主變換羣爲 G 之簇 V 之幾何學內各性質導出。故應設置一部分字彙以供從一幾何學轉換爲他一幾何學時之用。此兩種幾何學成同等(équivalente)。

同等幾何學之概念，亦稱爲轉移原理 (Principe de transport)，予近世幾何學以最富麗之研究法。幾何學問題在研究上發生困難時，常可轉變爲同等幾何學之問題而克服之。

第二章　射影幾何學

8. 笛卡兒空間　空間內之點以坐標表示之法，創自 Descartes (1596—1650) 及 Fermat (1601—1663)，乃基於次列之考究而來：於所設直線 d 上，選定線之一向，稱爲正向 (Sens positif)；其反向稱爲負向 (Sens négatif)。於直線 d 上取二點 A, B, 決定 A 爲始點，B 爲終點之線段。設選定一量度單位。命 a 表距離 AB 之絕對值。設一動點以正向沿直線 d 從 A 向 B 移動，則謂線段 AB 之代數量數 (Mesure) 爲 $+a$；若依反向移動，則得 $-a$。設自始卽於直線 d 上固定一點 O，則直線 d 上每點 M 皆決定一數，卽表線段 OM 之量數。反之，每一實數皆於原點爲 O 時，表線段 OM 之量數，而終點 M 有一定位置。於是，在直線 d 上之點與實數間成立有雙一一對應。零則與點 O 成對應。合有向直線 (Droite orientée) d 及點 O 稱爲有原點 (Origine) O 之軸 (Axe)。

試就有同原點 O 而不在同平面上之三軸 Ox, Oy, Oz 考之。設 M 爲空間內任一點，過此點作平行於 Oyz, Ozx, Oxy 之平面，則此等平面分別交各軸於 M_x, M_y, M_z。反之，若從後者各點出發，可復得點 M。線段 OM_x, OM_y, OM_z 之量數 x, y, z 稱爲點 M 之笛卡兒坐標。故在空間內之點 M，與選定一坐標三面形 (Trièdre de référence) 而得出三實數 x, y, z 之（有序）組間成立有雙一一對應。此等三實數之有序組之全體構成笛卡兒空間 (Espace cartésien)。故此種空間乃一元素簇，其每