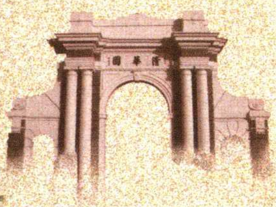
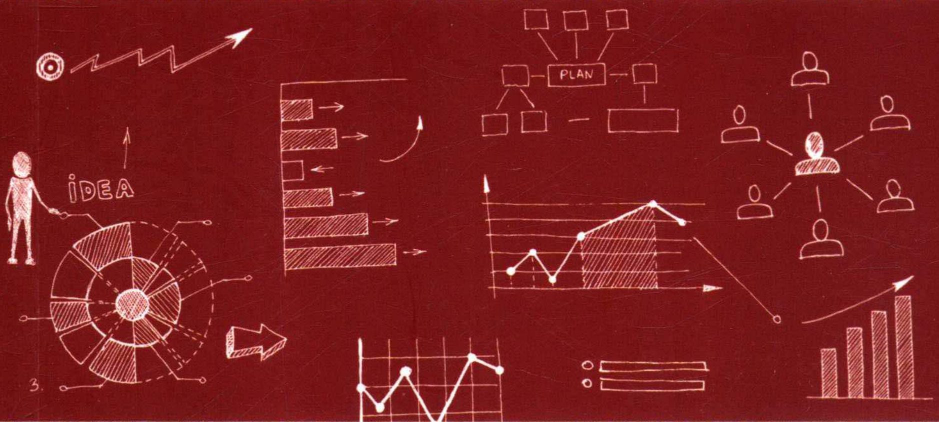


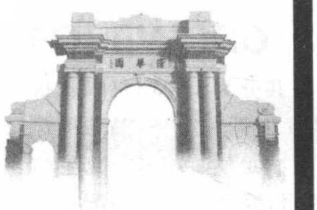
高等院校工科类、经管类数学同步训练与考研辅导丛书

微积分之高分突破



刘　强
姜玉英　◎ 编著

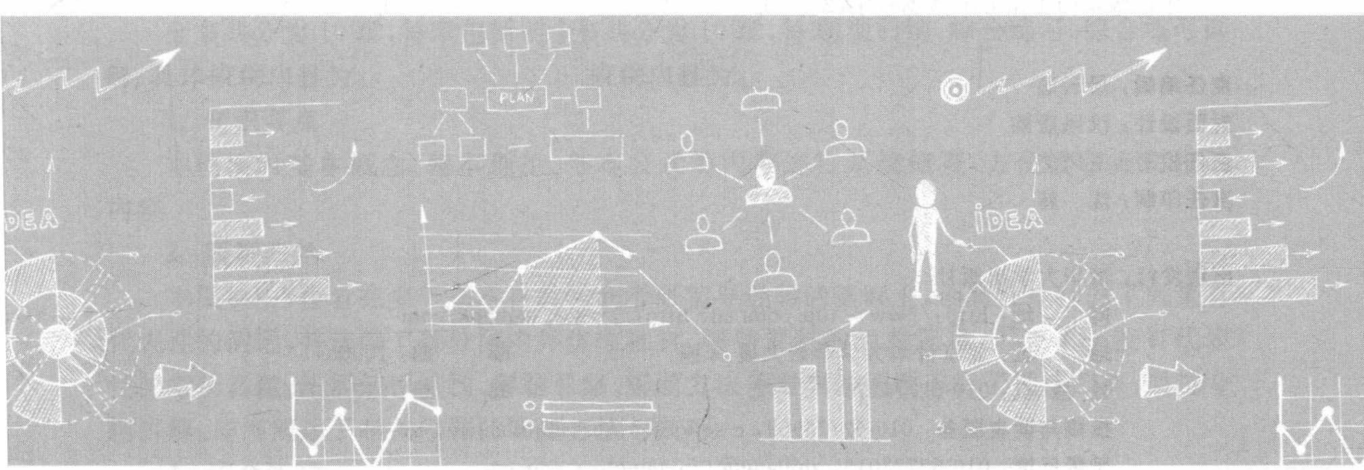
清华大学出版社



高等院校工科类、经管类数学同步训练与考研辅导丛书

微积分之高分突破

刘　强　姜玉英 ◎ 编著



清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是作者在多年来本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的.本书共分为10章,每章包括四个模块,即知识要点、题型归纳、综合练习及综合练习详解.本书编写的主要目的有两个:一是帮助学有余力的本科生更好地学习"微积分"课程,开阔学习视野,拓展解题思路;二是满足学生报考研究生的需要.本书编写紧扣数学三考研大纲,紧贴考试实际,按题型归类,内容详略得当,综合练习全部配有详细的解答过程,有些题一题多解,帮助考研学生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧,提高综合分析问题、解决问题的能力,以达到融会贯通、举一反三的学习效果.

本书既可以作为普通高等院校工科类、经管类本科生学习"微积分"课程的同步训练用书,也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的训练辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分之高分突破/刘强,姜玉英编著.—北京:清华大学出版社,2019
(普通高校工科类、经管类数学同步训练与考研辅导丛书)
ISBN 978-7-302-52280-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①刘… ②姜… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第024851号

责任编辑:梁云慈
封面设计:汉风唐韵
责任校对:王凤芝
责任印制:沈　露

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者:北京富博印刷有限公司
装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:16.75　　**字　　数**:364千字
版　　次:2019年3月第1版　　**印　　次**:2019年3月第1次印刷
定　　价:49.00元

产品编号:080608-01

FOREWORD

前言

为了更好地帮助普通高等院校工科类、经管类本科生学好大学数学，提高学习能力，同时为了满足众多考生考研的需要，我们结合多年的本科教学和考研辅导经验，编写了“普通高校工科类、经管类数学同步训练与考研辅导丛书”，该丛书包括微积分、高等数学、线性代数、概率论与数理统计四门课程用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编. **该套丛书在内容编排上，知识点不前后穿插，便于读者同步学习.**

本书为微积分分册，内容涵盖了考研数学三中关于微积分内容的全部考点. 本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的本科生更好地学习“微积分”课程，开阔学习视野，拓展解题思路；二是满足学生报考研究生的需要，本书编写紧扣数学三考研大纲，紧贴考试实际，**按题型归类**，内容详略得当，综合练习全部配有详细的解答过程，有些题一题多解，帮助考研学生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提高综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果.

全书共分为10章，每章包括四个模块，即知识要点、题型归纳、综合练习、综合练习详解. 具体模块内容为：

1. 知识要点

本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容.

2. 题型归纳

本模块中，作者在多年来本科教学和考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的考研真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧.

3. 综合练习

在本模块作者精心选编了部分具有代表性的习题以及部分考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到融会贯通、举一反三.

4. 综合练习详解

本模块对综合练习的全部习题均给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维.

为了方便读者查阅，本书在考研真题后面加上了标志，如【2019(3)】表示该题是2019年硕士研究生入学考试数学三考题，【2019(1,3)】表示该题是2019年数学一和数学三考

题,等等.

在丛书的编写过程中,得到了北京工商大学曹显兵教授,广东财经大学胡桂武教授,北方工业大学刘喜波教授,北京工业大学李高荣教授,中央财经大学贾尚晖教授,山东工商学院李希亮教授,首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授以及同事们的大力支持,清华大学出版社的梁云慈编辑也为丛书的出版付出了很多的努力,在此表示诚挚的感谢.

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习"微积分"课程的同步训练用书,也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书.

由于作者水平有限,书中仍可能存在不妥之处,恳请读者和同行们不吝指正.

作　者

2019 年 1 月

CONTENTS

目录

第1章

函 数

1.1 知识要点

1.1.1 函数与邻域

函数 $y=f(x)$有两要素，即定义域和对应法则. 两个函数相同的充要条件是定义域与对应法则分别相同.

点 x_0 的 δ **邻域**指的是以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$；集合$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的 δ 的**去心邻域**(或**空心邻域**).

1.1.2 函数的基本特性

1. 奇偶性

函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，因此如果函数的定义域关于原点不对称，则该函数不具有奇偶性. 奇函数的图像关于坐标原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

奇、偶函数的一些常用结论：

(1) 常函数(其定义域关于原点对称)为偶函数；

(2) 有限个奇函数的代数和为奇函数，有限个偶函数的代数和为偶函数；

(3) 奇函数与偶函数的乘积为奇函数；

(4) 奇数个奇函数的乘积为奇函数，偶数个奇函数的乘积为偶函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$在某个区间 D 上有定义，对于$\forall x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，有

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 D **单调增加**(**单调递增**)；

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 D **单调减少**(**单调递减**).

3. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个正数 T,使得对任意的 $x\in D$,有$(x\pm T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称该函数为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$的**周期**,满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**,通常所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论:

(1) 若 $f(x)$的周期为 T,则 $f(ax+b)$的周期为$\dfrac{T}{|a|}$　$(a\neq0)$;

(2) 若 $f(x)$和 $g(x)$的周期均为 T,则 $f(x)\pm g(x)$也是周期为 T 的周期函数.

4. 有界性

函数 $f(x)$在 D 上**有界**的定义有两种:

(1) 存在 $M>0$,使得对于$\forall x\in D$,恒有$|f(x)|\leqslant M$.

(2) 存在实数 a 和 b,使得对$\forall x\in D$,恒有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$.

1.1.3 反函数与复合函数

函数 $y=f(x)$的反函数一般记为 $y=f^{-1}(x)$. 显然,反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域为 Z_f,值域为 D_f,且对任意的 $y\in Z_f$,有

$$f[f^{-1}(y)]=y,$$

对任意的 $x\in D_f$,有

$$f^{-1}[f(x)]=x.$$

单调函数一定存在反函数,且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下,函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$的图像是重合的,$y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

复合函数可由两个或多个函数进行有限次复合而成,但并不是任意两个函数都可以进行复合,设外层函数为 $y=f(u)$,$u\in D_f$,内层函数为 $u=\varphi(x)$,$x\in D_\varphi$,仅当外层函数的定义域与内层函数的值域有交集时才可以进行复合.

1.1.4 基本初等函数与初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数这 6 大类函数统称为**基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次四则运算和(或)复合运算而得到的函数称为**初等函数**.

几个常见的结论:

(1) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$　$(|x|\leqslant1)$;

(2) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\quad(x\neq 0)$.

1.1.5 极坐标

在平面上任取一个定点 O，称为**极点**，过点 O 引一条直线 Ox，称为**极轴**，再选定一个长度单位(图 1.1)．对于平面内的任意一点 M，用 r 表示线段 OM 的长度，θ 表示从 Ox 到 OM 的角度，r 称为点 M 的**极径**，θ 称为点 M 的**极角**，有序数对 (r,θ) 称为 M 的**极坐标**．这样建立的坐标系称为**极坐标系**．

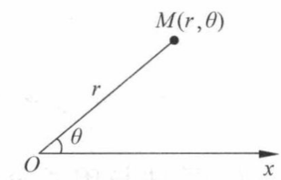


图 1.1

规定从极轴 Ox 开始，逆时针旋转时 θ 为正，顺时针旋转时 θ 为负，从而

$$-\infty<\theta<+\infty.$$

规定极径 $r\geqslant 0$．

建立极坐标系后，给定有序数对 (r,θ)，就可以在平面内唯一确定一点 M；反过来，给定平面内的一点，也可以找到它的极坐标．

设 M 是平面中的任意一点，它的直角坐标为 (x,y)，极坐标为 (r,θ)，点 M 向 x 轴引垂线，垂足为 N，容易推出

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

反之

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\theta=\frac{y}{x},x\neq 0.$$

在一般情况下，由 $\tan\theta$ 确定角度 θ 时，可根据点 M 所在的象限取最小正角．

1.1.6 一些常用公式

1. 倍角公式

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

2. 半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

3. 某些数列的前 *n* 项和公式

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$$

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]=na+\frac{n(n-1)}{2}d;$$

$$a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

4. 乘法与因式分解公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，其中 n 为正整数；

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n,$$

其中

$$C_n^0=1,\quad C_n^k=\frac{A_n^k}{A_k^k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad C_n^k=C_n^{n-k}.$$

5. 对数公式

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y;\quad \log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y;$$

$$\log_a x^b=b\log_a x;\quad \log_a x=\frac{\log_c x}{\log_c a};$$

$$a^{\log_a x}=x.$$

注 在上述对数公式中，要求 $x>0, y>0, a>0, a\neq1, c>0, c\neq1$.

1.2 题型归纳

1.2.1 题型一 函数定义域的求解

例 1.2.1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln(x-1)$ 的定义域.

解 由题意，$x-2\neq0$，且 $x-1>0$，解得不等式有 $x\neq2$，且 $x>1$. 因此函数的定义域为

$$D_f=(1,2)\cup(2,+\infty).$$

例 1.2.2 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=2-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 由 $f(x)=e^{x^2}$ 可知

$$f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 2 - x,$$

且 $\varphi(x) \geqslant 0$，于是

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(2-x)},$$

因此 $\varphi(x)$ 的定义域满足 $2-x>0$，$\ln(2-x)\geqslant 0$，解得 $x\leqslant 1$.

例 1.2.3　已知

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \ln(x^2+1), & 1 < |x| < 2 \end{cases}$$

试求函数 $f(x-1)$ 的定义域.

解　由题意可知，$f(x)$ 的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 与 $1<|x|<2$ 的并集，因此 $f(x)$ 的定义域为 $-2<x<2$，故 $f(x-1)$ 的定义域为 $-2<x-1<2$，即 $-1<x<3$.

例 1.2.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,8]$，求 $g(x)=f(3x+2)+\ln(2x+1)$ 的定义域.

解　由于 $f(x)$ 的定义域为 $[0,8]$，因此 $f(3x+2)$ 的定义域为 $0\leqslant 3x+2\leqslant 8$，即 $x\in\left[-\frac{2}{3},2\right]$；又因为 $2x+1>0$，因此 $x>-\frac{1}{2}$；所以 $g(x)$ 的定义域为 $D_g=\left(-\frac{1}{2},2\right]$.

1.2.2　题型二　函数表达式的求解

例 1.2.5　设函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{x}-x\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，$x\neq 0$，试求 $f(x)$ 的表达式.

解　由于

$$f\left(\frac{1}{x}-x\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}-x\right)^2 + 2,$$

令 $t=\frac{1}{x}-x$，则 $f(t)=t^2+2$，从而

$$f(x) = x^2 + 2.$$

例 1.2.6　设函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{2}{x}\right)=cx$，其中 a,b,c 为常数，且满足 $|a|\neq|b|$，试求 $f(x)$ 的表达式.

解　令 $t=\frac{2}{x}$，则 $x=\frac{2}{t}$，从而有

$$af\left(\frac{2}{t}\right) + bf(t) = \frac{2c}{t},$$

联立方程组

$$\begin{cases} af(x) + bf\left(\frac{2}{x}\right) = cx, \\ af\left(\frac{2}{x}\right) + bf(x) = \frac{2c}{x} \end{cases}$$

解得

$$f(x) = \frac{acx}{a^2-b^2} - \frac{2bc}{(a^2-b^2)x}, \quad x \neq 0.$$

例 1.2.7　设函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2f(x)+3x+1$，且 $x\neq 1$，试求函数 $f(x)$ 的