

高等院校工科类、经管类数学同步训练与考研辅导丛书

微积分之高分突破

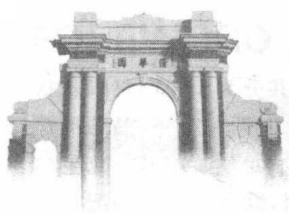


刘 强
姜玉英

◎ 编著



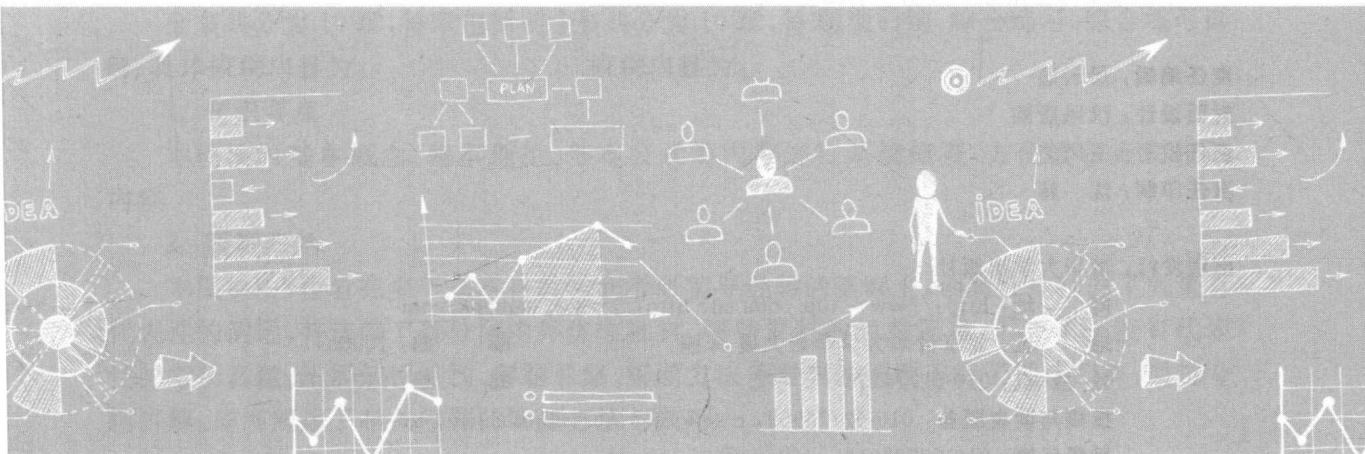
清华大学出版社



高等院校工科类、经管类数学同步训练与考研辅导丛书

微积分之高分突破

刘 强 姜玉英 © 编著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者在多年来本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的. 本书共分为 10 章, 每章包括四个模块, 即知识要点、题型归纳、综合练习及综合练习详解. 本书编写的主要目的有两个: 一是帮助学有余力的本科生更好地学习“微积分”课程, 开阔学习视野, 拓展解题思路; 二是满足学生报考研究生的需要. 本书编写紧扣数学三考研大纲, 紧贴考试实际, 按题型归类, 内容详略得当, 综合练习全部配有详细的解答过程, 有些题一题多解, 帮助考研学生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧, 提高综合分析问题、解决问题的能力, 以达到融会贯通、举一反三的学习效果.

本书既可以作为普通高等院校工科类、经管类本科生学习“微积分”课程的同步训练用书, 也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的训练辅导用书.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

微积分之高分突破/刘强, 姜玉英编著. —北京: 清华大学出版社, 2019

(普通高校工科类、经管类数学同步训练与考研辅导丛书)

ISBN 978-7-302-52280-5

I. ①微… II. ①刘… ②姜… III. ①微积分—高等学校—教学参考资料 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 024851 号

责任编辑: 梁云慈

封面设计: 汉风唐韵

责任校对: 王凤芝

责任印制: 沈 露

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 北京富博印刷有限公司

装 订 者: 北京市密云县京文制本装订厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm 印 张: 16.75

字 数: 364 千字

版 次: 2019 年 3 月第 1 版

印 次: 2019 年 3 月第 1 次印刷

定 价: 49.00 元

产品编号: 080608-01

为了更好地帮助普通高等院校工科类、经管类本科生学好大学数学,提高学习能力,同时为了满足众多考生考研的需要,我们结合多年的本科教学和考研辅导经验,编写了“普通高校工科类、经管类数学同步训练与考研辅导丛书”,该丛书包括微积分、高等数学、线性代数、概率论与数理统计四门课程用书,由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编。该套丛书在内容编排上,知识点不前后穿插,便于读者同步学习。

本书为微积分分册,内容涵盖了考研数学三中关于微积分内容的全部考点。本书编写的主要目的有两个:一是帮助学有余力的本科生更好地学习“微积分”课程,开阔学习视野,拓展解题思路;二是满足学生报考研究生的需要,本书编写紧扣数学三考研大纲,紧贴考试实际,按题型归类,内容详略得当,综合练习全部配有详细的解答过程,有些题一题多解,帮助考研学生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧,提高综合分析问题、解决问题的能力,以达到融会贯通、举一反三的学习效果。

全书共分为 10 章,每章包括四个模块,即知识要点、题型归纳、综合练习、综合练习详解。具体模块内容为:

1. 知识要点

本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理,方便读者查阅相关内容。

2. 题型归纳

本模块中,作者在多年来本科教学和考研辅导经验的基础上,创新性地构思了大量有代表性的例题,并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目,汇集了一些有代表性的考研真题,按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类,通过专题讲解,详细阐述了相关问题的解题方法与技巧。

3. 综合练习

在本模块作者精心选编了部分具有代表性的习题以及部分考研真题,帮助读者巩固强化所学知识,提升读者学习效果,做到融会贯通、举一反三。

4. 综合练习详解

本模块对综合练习的全部习题均给出了详细的解答过程,部分习题给出多种解法,以开拓读者的解题思路,培养读者的分析能力和发散思维。

为了方便读者查阅,本书在考研真题后面加上了标志,如【2019(3)】表示该题是 2019 年硕士研究生入学考试数学三考题,【2019(1,3)】表示该题是 2019 年数学一和数学三考

题,等等.

在丛书的编写过程中,得到了北京工商大学曹显兵教授,广东财经大学胡桂武教授,北方工业大学刘喜波教授,北京工业大学李高荣教授,中央财经大学贾尚晖教授,山东工商学院李希亮教授,首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授以及同事们的大力支持,清华大学出版社的梁云慈编辑也为丛书的出版付出了很多的努力,在此表示诚挚的感谢.

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“微积分”课程的同步训练用书,也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书.

由于作者水平有限,书中仍可能存在不妥之处,恳请读者和同行们不吝指正.

作 者

2019年1月

第 1 章 函数	1
1.1 知识要点	1
1.1.1 函数与邻域	1
1.1.2 函数的基本特性	1
1.1.3 反函数与复合函数	2
1.1.4 基本初等函数与初等函数	2
1.1.5 极坐标	3
1.1.6 一些常用公式	3
1.2 题型归纳	4
1.2.1 题型一 函数定义域的求解	4
1.2.2 题型二 函数表达式的求解	5
1.2.3 题型三 反函数的求解	6
1.2.4 题型四 复合函数的求解	6
1.2.5 题型五 函数的几何特性问题	7
1.3 综合练习	9
1.4 综合练习详解	10
第 2 章 极限与连续	14
2.1 知识要点	14
2.1.1 极限的概念	14
2.1.2 无穷小量与无穷大量	14
2.1.3 极限的性质	16
2.1.4 极限的运算法则	16
2.1.5 极限存在准则	16
2.1.6 两个重要极限	17
2.1.7 函数的连续性	17
2.1.8 间断点的类型	17
2.1.9 连续函数的性质	18

2.1.10	闭区间上连续函数的性质	18
2.1.11	一些重要的结论	18
2.2	题型归纳	19
2.2.1	题型一 极限的概念与性质问题	19
2.2.2	题型二 利用极限的四则运算法则求极限	20
2.2.3	题型三 利用单侧极限求极限	21
2.2.4	题型四 利用两个重要极限求极限	22
2.2.5	题型五 利用等价无穷小量替换求极限	23
2.2.6	题型六 利用极限存在准则求极限	23
2.2.7	题型七 无穷小量的比较	24
2.2.8	题型八 函数的连续性问题	24
2.2.9	题型九 连续函数的等式证明问题	25
2.2.10	题型十 极限的综合问题	27
2.3	综合练习	28
2.4	综合练习详解	31
第3章	导数与微分	39
3.1	知识要点	39
3.1.1	导数的概念	39
3.1.2	导数的几何意义	39
3.1.3	基本导数公式	40
3.1.4	导数的四则运算法则	40
3.1.5	常用求导法则	40
3.1.6	高阶导数	41
3.1.7	微分的概念与性质	42
3.1.8	导数在经济学中的应用	43
3.2	题型归纳	43
3.2.1	题型一 按照定义求导数与微分	43
3.2.2	题型二 利用导数的定义求极限	45
3.2.3	题型三 分段函数的求导问题	45
3.2.4	题型四 函数可导性的讨论	46
3.2.5	题型五 导数的几何应用	47
3.2.6	题型六 导函数的基本特性问题	48
3.2.7	题型七 利用可导性求参数值(域)	49
3.2.8	题型八 高阶导数问题	50
3.2.9	题型九 反函数、复合函数的求导问题	51
3.2.10	题型十 隐函数的求导问题	52
3.2.11	题型十一 导函数的连续性问题	53

3.2.12 题型十二 导数在经济学中的应用	53
3.3 综合练习	54
3.4 综合练习详解	57
第4章 中值定理与导数的应用	65
4.1 知识要点	65
4.1.1 微分中值定理	65
4.1.2 洛必达法则	66
4.1.3 函数的单调区间	66
4.1.4 函数的极值与最值	66
4.1.5 函数的凹凸区间与拐点	66
4.1.6 曲线的渐近线	67
4.1.7 函数作图	67
4.1.8 一些常用的麦克劳林公式	68
4.1.9 达布(Darboux)定理	68
4.2 题型归纳	68
4.2.1 题型一 仅出现一个中值的等式证明问题	68
4.2.2 题型二 出现多个中值的等式证明问题	70
4.2.3 题型三 利用中值定理证明不等式问题	71
4.2.4 题型四 利用洛必达法则求极限	71
4.2.5 题型五 洛必达法则的综合应用	72
4.2.6 题型六 函数的极值与最值问题	73
4.2.7 题型七 函数的凹凸性与拐点问题	74
4.2.8 题型八 显式不等式的证明问题	75
4.2.9 题型九 函数的零点(方程的根)问题	77
4.2.10 题型十 渐近线问题	78
4.2.11 题型十一 泰勒公式的应用	79
4.2.12 题型十二 导数的经济应用	80
4.3 综合练习	81
4.4 综合练习详解	84
第5章 不定积分	92
5.1 知识要点	92
5.1.1 不定积分的概念与性质	92
5.1.2 换元积分法	92
5.1.3 分部积分法	93
5.1.4 有理函数的积分法	94
5.1.5 三角函数有理式的积分法	94

5.1.6	简单无理函数的积分法	95
5.1.7	常用积分公式表	95
5.2	题型归纳	96
5.2.1	题型一 利用不定积分的性质求解不定积分	96
5.2.2	题型二 求解分段函数的不定积分	96
5.2.3	题型三 利用换元积分法求解不定积分	97
5.2.4	题型四 利用分部积分法求解不定积分	99
5.2.5	题型五 利用等式 $\int u dv + \int v du = uv + C$ 求解不定积分	101
5.2.6	题型六 求解有理函数的不定积分	101
5.2.7	题型七 求解三角函数有理式的不定积分	104
5.2.8	题型八 求解简单无理函数的不定积分	106
5.2.9	题型九 求解隐函数的不定积分	107
5.2.10	题型十 递推公式问题	108
5.3	综合练习	108
5.4	综合练习详解	110
第6章	定积分	123
6.1	知识要点	123
6.1.1	定积分的概念	123
6.1.2	定积分的几何意义与物理意义	123
6.1.3	定积分的基本性质	124
6.1.4	变上限积分函数	125
6.1.5	定积分的计算	125
6.1.6	广义积分	125
6.1.7	定积分的几何应用	126
6.1.8	几个重要的结论	127
6.2	题型归纳	128
6.2.1	题型一 有关定积分的性质问题	128
6.2.2	题型二 利用定积分的定义求解极限	130
6.2.3	题型三 变限积分问题	131
6.2.4	题型四 利用换元法求解定积分	133
6.2.5	题型五 利用分部积分法求解定积分	134
6.2.6	题型六 利用奇偶性、周期性计算定积分	135
6.2.7	题型七 分段函数的积分问题	136
6.2.8	题型八 某些不易求出原函数的积分计算问题	137
6.2.9	题型九 积分等式的证明问题	138

6.2.10	题型十 积分不等式的证明问题	138
6.2.11	题型十一 广义积分问题	139
6.2.12	题型十二 积分的应用问题	140
6.3	综合练习	142
6.4	综合练习详解	145
第7章	多元函数微积分	157
7.1	知识要点	157
7.1.1	二元函数的定义	157
7.1.2	二元函数的极限与连续	157
7.1.3	偏导数	158
7.1.4	全微分	158
7.1.5	高阶偏导数	159
7.1.6	多元函数的求导法则	160
7.1.7	二元函数的极值	161
7.1.8	二重积分的概念与性质	162
7.1.9	利用直角坐标系计算二重积分	163
7.1.10	利用极坐标计算二重积分	163
7.1.11	利用对称性求解二重积分	164
7.2	题型归纳	165
7.2.1	题型一 求解多元函数的极限	165
7.2.2	题型二 求解多元函数的偏导数	166
7.2.3	题型三 计算多元函数的全微分	168
7.2.4	题型四 判断多元函数在某点处是否可微	168
7.2.5	题型五 抽象复合函数的偏导数的求解	169
7.2.6	题型六 隐函数的微分问题	170
7.2.7	题型七 求多元函数的极值和最值	171
7.2.8	题型八 利用直角坐标系计算二重积分	173
7.2.9	题型九 利用极坐标系计算二重积分	175
7.2.10	题型十 利用对称性计算二重积分	176
7.2.11	题型十一 分段函数的二重积分的计算	177
7.2.12	题型十二 二次积分的换序问题	178
7.2.13	题型十三 广义二重积分的计算	179
7.2.14	题型十四 实际应用题	179
7.3	综合练习	181
7.4	综合练习详解	184

第 8 章 无穷级数	196
8.1 知识要点	196
8.1.1 无穷级数的概念	196
8.1.2 无穷级数的性质	196
8.1.3 常见级数的敛散性	197
8.1.4 正项级数敛散性的判别法	197
8.1.5 任意项级数的敛散性	198
8.1.6 函数项级数的概念	198
8.1.7 幂级数的概念	199
8.1.8 幂级数的和函数的性质	200
8.1.9 函数的幂级数展开	200
8.1.10 常见的麦克劳林公式	200
8.2 题型归纳	201
8.2.1 题型一 利用定义与性质判断级数的敛散性	201
8.2.2 题型二 判断正项级数的敛散性	202
8.2.3 题型三 判断任意项级数的敛散性	203
8.2.4 题型四 函数项级数收敛域的求解	203
8.2.5 题型五 讨论幂级数的收敛半径及收敛域	204
8.2.6 题型六 利用幂级数的性质求和函数	207
*8.2.7 题型七 利用微分方程求幂级数的和函数	209
8.2.8 题型八 利用幂级数求数项级数的和	210
8.2.9 题型九 函数展开成幂级数问题	212
8.2.10 题型十 无穷级数的应用问题	213
8.3 综合练习	214
8.4 综合练习详解	216
第 9 章 常微分方程	226
9.1 知识要点	226
9.1.1 微分方程的概念	226
9.1.2 一阶微分方程及解法	226
9.1.3 二阶线性微分方程	228
9.2 题型归纳	229
9.2.1 题型一 分离变量法求解微分方程	229
9.2.2 题型二 求解齐次微分方程	231
9.2.3 题型三 求解一阶线性微分方程	232

9.2.4 题型四 求解伯努利方程·····	234
9.2.5 题型五 求解二阶线性微分方程·····	235
9.2.6 题型六 微分方程的综合应用·····	237
9.3 综合练习·····	238
9.4 综合练习详解·····	240
第 10 章 差分方程 ·····	248
10.1 知识要点·····	248
10.1.1 差分方程的概念与性质·····	248
10.1.2 线性差分方程·····	249
10.1.3 差分方程的解·····	249
10.1.4 一阶常系数线性差分方程·····	250
10.2 题型归纳·····	250
10.2.1 题型一 差分及差分方程的概念问题·····	250
10.2.2 题型二 一阶线性差分方程的求解·····	251
10.3 综合练习·····	252
10.4 综合练习详解·····	252
参考文献 ·····	254

函 数

1.1 知识要点

1.1.1 函数与邻域

函数 $y=f(x)$ 有两要素, 即定义域和对应法则. 两个函数相同的充要条件是定义域与对应法则分别相同.

点 x_0 的 δ 邻域指的是以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$; 集合 $\{x \mid 0 < |x-x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 的去心邻域(或空心邻域).

1.1.2 函数的基本特性

1. 奇偶性

函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 因此如果函数的定义域关于原点不对称, 则该函数不具有奇偶性. 奇函数的图像关于坐标原点对称; 偶函数的图像关于 y 轴对称.

奇、偶函数的一些常用结论:

- (1) 常函数(其定义域关于原点对称)为偶函数;
- (2) 有限个奇函数的代数和为奇函数, 有限个偶函数的代数和为偶函数;
- (3) 奇函数与偶函数的乘积为奇函数;
- (4) 奇数个奇函数的乘积为奇函数, 偶数个奇函数的乘积为偶函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在某个区间 D 上有定义, 对于 $\forall x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$, 有

- (1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调增加(单调递增);
- (2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调减少(单调递减).

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 T , 使得对任意的 $x \in D$, 有 $(x \pm T) \in D$, 且

$$f(x + T) = f(x)$$

恒成立, 则称该函数为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**, 满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**, 通常所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论:

(1) 若 $f(x)$ 的周期为 T , 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$ ($a \neq 0$);

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期均为 T , 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

4. 有界性

函数 $f(x)$ 在 D 上有界的定义有两种:

(1) 存在 $M > 0$, 使得对于 $\forall x \in D$, 恒有 $|f(x)| \leq M$.

(2) 存在实数 a 和 b , 使得对 $\forall x \in D$, 恒有 $a \leq f(x) \leq b$.

1.1.3 反函数与复合函数

函数 $y = f(x)$ 的反函数一般记为 $y = f^{-1}(x)$. 显然, 反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 Z_f , 值域为 D_f , 且对任意的 $y \in Z_f$, 有

$$f[f^{-1}(y)] = y,$$

对任意的 $x \in D_f$, 有

$$f^{-1}[f(x)] = x.$$

单调函数一定存在反函数, 且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像是重合的, $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

复合函数可由两个或多个函数进行有限次复合而成, 但并不是任意两个函数都可以进行复合, 设外层函数为 $y = f(u)$, $u \in D_f$, 内层函数为 $u = \varphi(x)$, $x \in D_\varphi$, 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域有交集时才可以进行复合.

1.1.4 基本初等函数与初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数这 6 大类函数统称为**基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次四则运算和(或)复合运算而得到的函数称为**初等函数**.

几个常见的结论:

(1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ($|x| \leq 1$);

(2) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$;

$$(3) \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (x \neq 0).$$

1.1.5 极坐标

在平面上任取一个定点 O , 称为极点, 过点 O 引一条直线 Ox , 称为极轴, 再选定一个长度单位(图 1.1). 对于平面内的任意一点 M , 用 r 表示线段 OM 的长度, θ 表示从 Ox 到 OM 的角度, r 称为点 M 的极径, θ 称为点 M 的极角, 有序数对 (r, θ) 称为 M 的极坐标. 这样建立的坐标系称为极坐标系.

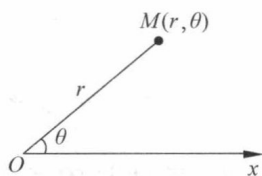


图 1.1

规定从极轴 Ox 开始, 逆时针旋转时 θ 为正, 顺时针旋转时 θ 为负, 从而

$$-\infty < \theta < +\infty.$$

规定极径 $r \geq 0$.

建立极坐标系后, 给定有序数对 (r, θ) , 就可以在平面内唯一确定一点 M ; 反过来, 给定平面内的一点, 也可以找到它的极坐标.

设 M 是平面中的任意一点, 它的直角坐标为 (x, y) , 极坐标为 (r, θ) , 点 M 向 x 轴引垂线, 垂足为 N , 容易推出

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

反之

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

在一般情况下, 由 $\tan \theta$ 确定角度 θ 时, 可根据点 M 所在的象限取最小正角.

1.1.6 一些常用公式

1. 倍角公式

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

2. 半角公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

3. 某些数列的前 n 项和公式

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1);$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$$

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a+(n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d;$$

$$a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

4. 乘法与因式分解公式

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{其中 } n \text{ 为正整数};$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

其中

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{A_k^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^k = C_n^{n-k}.$$

5. 对数公式

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^b = b \log_a x; \quad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a};$$

$$a^{\log_a x} = x.$$

注 在上述对数公式中,要求 $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1$.

1.2 题型归纳

1.2.1 题型一 函数定义域的求解

例 1.2.1 求函数 $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln(x-1)$ 的定义域.

解 由题意, $x-2 \neq 0$, 且 $x-1 > 0$, 解得不等式有 $x \neq 2$, 且 $x > 1$. 因此函数的定义域为

$$D_f = (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

例 1.2.2 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 2-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 由 $f(x) = e^{x^2}$ 可知

$$f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 2 - x,$$

且 $\varphi(x) \geq 0$, 于是

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(2-x)},$$

因此 $\varphi(x)$ 的定义域满足 $2-x > 0, \ln(2-x) \geq 0$, 解得 $x \leq 1$.

例 1.2.3 已知

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln(x^2+1), & 1 < |x| < 2 \end{cases}$$

试求函数 $f(x-1)$ 的定义域.

解 由题意可知, $f(x)$ 的定义域为 $-1 \leq x \leq 1$ 与 $1 < |x| < 2$ 的并集, 因此 $f(x)$ 的定义域为 $-2 < x < 2$, 故 $f(x-1)$ 的定义域为 $-2 < x-1 < 2$, 即 $-1 < x < 3$.

例 1.2.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0, 8]$, 求 $g(x)=f(3x+2)+\ln(2x+1)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 8]$, 因此 $f(3x+2)$ 的定义域为 $0 \leq 3x+2 \leq 8$, 即 $x \in [-\frac{2}{3}, 2]$; 又因为 $2x+1 > 0$, 因此 $x > -\frac{1}{2}$; 所以 $g(x)$ 的定义域为 $D_g = (-\frac{1}{2}, 2]$.

1.2.2 题型二 函数表达式的求解

例 1.2.5 设函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{1}{x}-x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \neq 0$, 试求 $f(x)$ 的表达式.

解 由于

$$f\left(\frac{1}{x}-x\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}-x\right)^2 + 2,$$

令 $t = \frac{1}{x} - x$, 则 $f(t) = t^2 + 2$, 从而

$$f(x) = x^2 + 2.$$

例 1.2.6 设函数 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{2}{x}\right) = cx$, 其中 a, b, c 为常数, 且满足 $|a| \neq |b|$, 试求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $t = \frac{2}{x}$, 则 $x = \frac{2}{t}$, 从而有

$$af\left(\frac{2}{t}\right) + bf(t) = \frac{2c}{t},$$

联立方程组

$$\begin{cases} af(x) + bf\left(\frac{2}{x}\right) = cx, \\ af\left(\frac{2}{x}\right) + bf(x) = \frac{2c}{x} \end{cases}$$

解得

$$f(x) = \frac{acx}{a^2 - b^2} - \frac{2bc}{(a^2 - b^2)x}, \quad x \neq 0.$$

例 1.2.7 设函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + 3x + 1$, 且 $x \neq 1$, 试求函数 $f(x)$ 的