MATHEMATICAL ANALYSIS

数学分析选讲

许绍元◎主编

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

MATHEMATICAL ANALYSIS

数学分析选讲

主编◎许绍元

编者◎许绍元　朱天翔

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

数学分析选讲/ 许绍元主编. —广州：暨南大学出版社，2018. 11
ISBN 978 - 7 - 5668 - 2432 - 5

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①许…　Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教材
Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 198493 号

数学分析选讲
SHUXUE FENXI XUANJIANG
主　编：许绍元

出 版 人： 徐义雄
策划编辑： 暨　南　胡艳晴
责任编辑： 胡艳晴　邓家昭
责任校对： 邓丽藤　刘雨婷
责任印制： 汤慧君　周一丹

出版发行： 暨南大学出版社（510630）
电　　话： 总编室（8620）85221601
营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
网　　址： http：//www. jnupress. com
排　　版： 广州尚文数码科技有限公司
印　　刷： 佛山市浩文彩色印刷有限公司
开　　本： 787mm × 1092mm　1/16
印　　张： 11. 5
字　　数： 230 千
版　　次： 2018 年 11 月第 1 版
印　　次： 2018 年 11 月第 1 次
定　　价： 39. 80 元

前　言

数学分析是数学与应用数学专业一门重要的基础课。学好本课程将为进一步学习微分方程、复变函数、数值计算方法以及概率论等后续课程打下坚实的基础。本课程的学习有助于学生树立辩证唯物主义思想和观点，有助于培养学生严密的逻辑思维能力和较强的抽象思维能力。该课程是以极限为工具，研究函数的微分和积分的一门学科。但是，许多数学类专业的学生反映难以学深弄透、融会贯通，特别是一些准备硕士研究生入学考试和参加全国数学竞赛的同学，要在较短的时间内掌握数学分析的基本知识、基本技能和解题技巧，并具有较强的解题能力，往往感到十分困难。

本书是为适应本科学生报考数学类专业硕士研究生和参加全国大学生数学竞赛的需要，在“数学分析选讲”选修课讲义的基础上编写的。通过本书的学习，有利于加深学生对数学分析的基本理论的理解，提高分析问题与解决问题的能力。本书系统地总结了数学分析的基本概念、基本结论和方法，并通过典型例题介绍解题的基本方法与技巧。这些典型例题中有的是部分高校和科研院所的硕士研究生入学试题，有的是全国大学生数学竞赛历年真题，其中以历届硕士研究生入学试题居多。本书在知识处理上力求整体化、系统化、深入化，注重概念的加深理解、定理的使用方法总结及典型例题解题方法的剖析，旨在揭示数学分析的方法、解题规律与技巧，使学生牢牢掌握数学分析的基本理论和方法，大力提高解题能力。

本书分为八章：数列极限与函数极限、一元函数的连续与一致连续、一元函数微分学、一元函数积分学、级数、一致收敛、多元函数微积分学、数学竞赛真题选解。这些内容的顺序与通用教材的顺序基本一致，涵盖了研究生入学考试和全国大学生数学竞赛的主要内容。本书既可以作为数学分析相关选修课的教材，又可为报考硕士研究生和参加全国大学生数学竞赛的学生提供复习指导，还可以作为有关专业的教师和学生的参考书。

本书在编写过程中，得到了韩山师范学院教务处的大力支持，并且还得到了中山大学周作领教授的热情关心与帮助。另外，湖北师范大学徐望斌副教授以及昭通学院韩艳讲师在本书排版和校对的过程中给了作者极大帮助，韩山师范学院数学与统计学院的苏伟林、纪伊玲、蔡耀凯、黎嘉朗、乔鹏刚、郑琼悦、杨业坤等同学在文字录入和校对方面给予了大力帮助，在此一并致谢。

本书的出版得到了暨南大学出版社的大力支持，特别感谢暨南大学出版社总编室周玉宏主任和编辑邓家昭的辛勤劳动，他们对书稿进行了十分仔细的编辑并提出了宝贵的修改意见，使本书增色甚多。本书的出版还得到了广东省教学质量工程数学分析教学团队项目（粤教高函〔2015〕133 号）和韩山师范学院创新强校教学类项目“数学分析”（粤韩师教字〔2014〕97 号）的资助。

本书写作始于 2017 年冬。由于时间仓促加上水平有限，错误和缺点一定在所难免，恳请读者不吝指正。

编　者

2018 年 4 月

CONTENTS

目 录

第一章　数列极限与函数极限

一、预备知识

（一）实数及其性质

1. 实数的构成

$$实数\begin{cases}有理数（有限小数和无限循环小数；或\dfrac{q}{p}，p，q 为整数且 p\neq 0）\\ 无理数（无限不循环小数）\end{cases}$$

2. 实数的运算

实数的各种运算（四则运算、乘幂等）及中学介绍的运算法则均适用.

3. 实数的性质

（1）封闭性：（实数集 $\mathbf{R}$ 对 $+$，$-$，$\times$，$\div$）四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商（除数不为0）仍是实数.

（2）有序性：任意两个实数 a，b 必满足下列关系之一：$a<b$，$a>b$，$a=b$.

（3）传递性：$a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$，或者 $a<b$，$b<c\Rightarrow a<c$.

（4）阿基米德性：$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，$b>a>0\Rightarrow\exists n\in\mathbf{N}$ 使得 $na>b$.

（5）稠密性：两个不等的实数之间总有另一个实数.

（6）实数与数轴（规定了原点、正方向、单位长度的直线）上的点有着一一对应关系.

（二）绝对值与不等式

绝对值与不等式是数学分析中进行论证的基本工具之一.

1. 绝对值的定义

实数 a 的绝对值的定义为 $|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$.

2. 性质

（1）$|a|=|-a|\geqslant 0$；$|a|=0\Leftrightarrow a=0$（非负性）；

（2）$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(3) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$，$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$ $(h>0)$；
(4) 对任何 a，$b\in\mathbf{R}$，有 $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$（三角不等式）；
(5) $|ab|=|a|\cdot|b|$；
(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

（三）几个重要不等式

(1) 对于任意实数 a，b 有 $a^2+b^2\geqslant 2|ab|\geqslant 2ab$；
(2) 对于任意实数 x 有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\sin x|\leqslant|x|$；
(3) 对满足 $x>0$ 的一切 x，有 $\sin x<x$；
(4) 均值不等式.
对 $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n\in\mathbf{R}^+$，则有如下均值不等式：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}{n},$$

这里等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立. 特别地，两个正数 a，b 的均值不等式：

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

记忆技巧：调几算平（即按照从小到大的顺序：调和平均、几何平均、算术平均、平方平均）.
(5) 利用二项展开式得到的不等式.
设 $n\geqslant 3$，则对 $\forall h>0$，由二项展开式，有

$$(1+h)^n>nh,\ (1+h)^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2,\ (1+h)^n>\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3.$$

一般地，当 $n\geqslant k\geqslant 2$ 时，有

$$(1+h)^n>\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}h^k.$$

二、基本概念与基本结论

（一）数列极限

1. 数列极限的定义

定义 1 若 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或 $x_n\to a$ $(n\to\infty)$，此时称极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 如果数列没有极限，则称数列是发散的，即数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0，存在 N>0，使得当 n>N 时有 |x_n-a|<\varepsilon.$$

关于数列极限有如下等价命题（也可以作为数列极限的等价定义）.
命题 1 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<k\varepsilon$（其中 k 是任意给定的正常数）.

命题 2　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall 0<\varepsilon<1$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

证：必要性：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则由定义 1 可知 $\forall 0<\varepsilon<1$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

充分性：$\forall \varepsilon>0$，分两种情况讨论.

当 $0<\varepsilon<1$，由题设，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon\geqslant 1$ 时，由题设，任取 $0<\varepsilon_0<1$（比如，取 $\varepsilon_0=0.5$），存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon_0$ 成立，从而有 $|x_n-a|<\varepsilon_0<1\leqslant\varepsilon$. 于是，对 $\varepsilon\geqslant 1$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 故命题 2 成立.

命题 3　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall 0<\varepsilon<1$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时都有 $|x_n-a|<k\varepsilon$（其中 k 是任意给定的正常数）.

注 1：定义 1 和命题 2 中的不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 可以改为 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon$. 命题 1 和命题 3 中 $|x_n-a|<k\varepsilon$ 也可以改为 $|x_n-a|\leqslant k\varepsilon$.

注 2：在利用数列极限的定义验证某个数列的极限值时，有时找 N 比较困难，这时往往需要把 $|x_n-a|$ 适当地变形、放大，若放大后的式子小于 ε，那么必有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

定义 2　称 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$，如果 $\exists \varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists n_0>N$ 使得 $|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

2. 收敛数列的性质

定理 1　（唯一性）若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限.

定理 2　（有界性）若数列 $\{a_n\}$ 收敛，那么它一定有界，即：对于数列 $\{a_n\}$，$\exists$ 正数 M，对一切 n，有 $|a_n|\leqslant M$.

定理 3　（保号性）若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > a' > 0$（或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < a' < 0$），则存在正数 N，使得当 $n>N$ 时有 $a_n > a' > 0$（或 $a_n < a' < 0$）.

上述极限的保号性有如下的等价描述.

定理 3′　（保正号）若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a>0$，则存在正数 N，使得当 $n>N$ 时有 $a_n>0$.

（保负号）若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a<0$，则存在正数 N，使得当 $n>N$ 时有 $a_n<0$.

定理 4　（保不等式性）设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为收敛数列，若存在正数 N_0，使得当 $n>N_0$ 时有 $a_n\leqslant b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

定理 5　（迫敛性）设收敛数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都以 a 为极限，且数列 $\{c_n\}$ 满足：存在正数 N_0，当 $n>N_0$ 时有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

（二）函数的极限

1. 自变量趋向有限值 x_0 时函数的极限

定义 3　如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，就称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$，此时称极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在. 即函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{使得当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时有 } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

注 3：定义 3 中 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$，这说明当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关（可以无定义，即使有定义，与 $f(x_0)$ 值也无关）. 定义 3 中要求 f 在 $\mathring{U}(x_0;\delta)=$

$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$中有定义.

定义 4 如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时（当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时），有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左（右）极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$（$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$）.

定理 6 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

定义 5 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall \delta > 0$，$\exists x_1$ 使得当 $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x_1) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

2. **自变量趋向无穷大时函数的极限**

定义 6 设 $f(x)$ 当 $|x| > a(a > 0)$ 时是有定义的，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X(X > a)$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，就称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$. 即

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists X > 0\ (X > a),\ 当 |x| > X 时，有 |f(x) - A| < \varepsilon.$$

注 4：设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)((-\infty, b])$ 上有定义，若对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x > X$（$x < -X$）时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，就称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$（$x \to -\infty$）时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，或 $f(x) \to A$（当 $x \to +\infty$）（$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$，或 $f(x) \to A$（当 $x \to -\infty$））.

注 5：$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

（三）极限存在的条件

1. **单调有界定理**

定理 7 单调有界数列必有极限.

如果数列 x_n 满足：$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$，就称之为单调递增（或单调上升）数列；若满足：$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$，就称之为单调递减（或单调下降）数列.

注 6：单调递增数列必有下界；单调递减数列必有上界.

定理 8 有界的单调数列必有极限. 具体包括两个方面：

单调递增且有上界的数列必有极限；单调递减且有下界的数列必有极限.

2. **迫敛性（两边夹法则）**

数列的迫敛性见定理 5. 下面介绍函数的迫敛性.

定理 9 如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$满足下列条件：

（1）当 $x \in \mathring{U}(x_0; \delta)$（$|x| > M$）时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；

（2）当 $x \to x_0$（$x \to \infty$）时，有 $g(x) \to A$，$h(x) \to A$. 那么当 $x \to x_0$（$x \to \infty$）时，$f(x)$的极限存在，且等于 A.

3. **柯西（Cauchy）收敛准则**

定理 10 （数列极限柯西收敛准则）数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$，$m > N$ 时，有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

4. **归结原则**

定理 11　（归结原则）设函数 f 在点 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在⇔对任何 $\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0)$ 且 $x_n\to x_0$（$n\to\infty$），$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等.

5. **子列收敛原则**

定理 12　（子列收敛原则）数列 $\{x_n\}$ 收敛⇔子列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n-1}\}$ 都收敛且极限相等.

（四）无穷小与无穷大

1. **无穷小**

若 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限为零，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 x 按照其他任何趋势）时的无穷小，即有

定义 7　若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$（$X>0$），使得当 $0<|x-x_0|<\delta$（$|x|>X$）时，有 $|f(x)|<\varepsilon$ 成立，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时的无穷小，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）.

注 7：除上两种之外，还有 $x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$ 的情形.

定理 13　当自变量在同一变化过程（例如 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$）中时，则

（1）具有极限 A 的函数 $f(x)$ 等于其极限 A 与一个无穷小之和，即：A 为 $f(x)$ 的极限⇔$f(x)-A$ 为无穷小.

（2）若一函数可表示为一常数与无穷小之和，那么该常数就是其极限.

2. **无穷大**

若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时有 $f(x)\to\infty$，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大.

定义 8　若对 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$（$X>0$），使得当 $0<|x-x_0|<\delta$（$|x|>X$）时，有 $|f(x)|>M$，就称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）.

注 8：同理还有 $f(x)\to-\infty$，$f(x)\to+\infty$ 时的定义.

注 9：无穷大也不是一个数，不要将其与非常大的数混淆.

注 10：若 $\lim f(x)=\infty$（或 $-\infty$，$+\infty$），按通常意义是 $f(x)$ 的极限不存在.

定理 14　当自变量在同一变化过程中时

（1）若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

（2）若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

注 11：由于数列是一个特殊的函数，故数列也有无穷大和无穷小的定义.

3. **无穷小的阶**

定义 9　设 α 与 β 为 x 在同一变化过程中的两个无穷小，

（1）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$.

（2）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小.

（3）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，就说$\beta$是比$\alpha$同阶的无穷小.

（4）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

注 12：等价无穷小具有传递性：即$\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma$.

用等价无穷小可以简化极限的运算，事实上，有如下定理.

定理 15　若α，β，α'，β'均为x的同一变化过程中的无穷小，且$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$及 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，那么$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

注 13：用等价无穷小代换适用于乘、除运算，对于加、减运算须谨慎.

4. 函数极限的性质

我们在前面引入了下述六种类型的函数极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$；　（2）$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$；　（3）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$；

（4）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；　（5）$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$；　（6）$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

下面以第（4）种类型的极限为代表叙述并证明这些性质.

定理 16　函数极限具有以下性质：

（1）（唯一性）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则此极限是唯一的.

（2）（局部有界性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则$f$在$x_0$的某空心邻域$\mathring{U}(x_0)$内有界.

（3）（局部保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>r>0$（或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A<-r<0$），则存在某空心邻域$\mathring{U}(x_0)$，使得对一切$x\in\mathring{U}(x_0)$有$f(x)>r>0$（或$f(x)<-r<0$）.

（4）（保不等式性）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在，且在某空心邻域$\mathring{U}(x_0)$内有$f(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

（5）（迫敛性）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且在某空心邻域$\mathring{U}(x_0)$内有$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

（6）（四则运算法则）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在，则函数$f\pm g$，$f\cdot g$当$x\to x_0$时极限也存在，且

① $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

② $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则$f/g$当$x\to x_0$时极限存在，且有

③ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

5. **函数极限存在的条件**

定理 17　（归结原则）设 f 在 $\mathring{U}(x_0;\delta')$ 内有定义. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：对任何含于 $\mathring{U}(x_0;\delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在且相等.

定理 18　（单调有界定理）相应于数列极限的单调有界定理，关于上述四类单侧极限也有相应的定理. 现以 $x\to x_0^+$ 这种类型为例叙述如下：设 f 为定义在 $\mathring{U}_+(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在.

定理 19　（柯西准则）设函数 f 在 $\mathring{U}(x_0;\delta')$ 内有定义. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(<\delta')$，使得对任何 x'，$x''\in\mathring{U}(x_0;\delta)$ 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

6. **两个重要极限**

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

三、典型方法

由于数列极限是数学分析的最基本概念，求数列极限或者关于数列极限的题目几乎在所有研究生入学考试和各类大学生数学竞赛中占有较大的比例，本章主要讨论求数列极限的典型方法.

求数列极限的典型方法如下所示：

求极限典型方法：
- 单调有界定理
- 两边夹法则
- 等价无穷小法
- 化为未定型（利用洛必达法则）
- 阶的估计法（利用泰勒公式）
- 利用斯托兹（Stolz）定理：$\left.\begin{array}{l} y_n\to+\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$
- 定义法（利用 $\varepsilon-N$ 定义或 $\varepsilon-\delta$ 定义等）
- 化为定积分：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
- 有界变差数列法
- 压缩数列法
- 递推数列的不动点方法（利用压缩映射原理）
- 化为黄金分割数列：$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}(x_1=1)$，$x_n\to\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$

四、例题选讲

（一）极限典型题

本节结合上述求极限的典型方法，给出典型例子说明这些方法在求极限时采用的常用技巧.

方法一：单调有界定理

例 1　（中国人民大学）设 $x_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x_{n+1}=\sin x_n(n\geqslant 1)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

[解题要点]　用数学归纳法证明数列$\{x_n\}$单调递减有下界. 当 $\xi=\sin\xi$，且 $0\leqslant\xi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，用反证法证明 $\xi=0$.

证：先证$\{x_n\}$收敛. 由 $x_1\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x_2=\sin x_1$，有 $0<x_2=\sin x_1<x_1<\dfrac{\pi}{2}$，故 $x_2\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. 由归纳法，对任意 $n\geqslant 1$，有 $x_n\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $x_{n+1}<x_n$，故$\{x_n\}$单调递减有下界 0，由单调有界定理知$\{x_n\}$收敛.

下证 $x_n\to 0(n\to\infty)$. 设 $x_n\to\xi(n\to\infty)$，由于 $x_n\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $0\leqslant\xi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 又 $x_{n+1}=\sin x_n$，令 $n\to\infty$，有 $\xi=\sin\xi$，故 $\xi\neq\dfrac{\pi}{2}$. 下证 $\xi=0$.

反证法：若 $\xi\neq 0$ 则 $0<\xi<\dfrac{\pi}{2}$，与 $\xi=\sin\xi<\xi$ 矛盾. 故 $\xi=0$，即 $x_n\to 0(n\to\infty)$.

例 2　证明：数列$\{x_n\}$收敛，其中 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

[解题要点]　利用不等式$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$（$n\geqslant 1$）证明数列$\{x_n\}$单调递减有下界.

证：对任意 $n\geqslant 1$，由$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，可知 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<0$，于是，$\{x_n\}$单调递减. 观察不等式 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，有

$$\ln\frac{2}{1}<\frac{1}{1},\ \ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2},\ \ln\frac{4}{3}<\frac{1}{3},\ \cdots,\ \ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

将上述不等式相加得

$$\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

于是，

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)>0.$$

故$\{x_n\}$单调递减有下界 0，由单调有界定理即知$\{x_n\}$收敛.

方法二：两边夹法则

例 3　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0)$.

[解题要点]　利用不等式 $d^n\leqslant a^n+b^n+c^n\leqslant 3d^n$（$d=\max\{a,b,c\}$），设法构造两边夹不等式.

解：令 $d=\max\{a,b,c\}$，则

$$d=(d^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(3d^n)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{3}d\to d\ (n\to\infty),$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,b,c\}$.

类似地，有下例.

例 4　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}({a_1}^n+{a_2}^n+\cdots+{a_k}^n)^{\frac{1}{n}}(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\geqslant 0)$.

答案：原式 $=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$.

方法三：等价无穷小法

注意：当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小有 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$（其中 $\alpha>0$），$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$，$a^x-1\sim x\ln a$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$.

注 14：以上 x 换成其他任何无穷小量仍成立. 例如 $\sin\tan x\sim\tan x\sim x$（$x\to 0$），$\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$（$n\to\infty$）.

例 5　当 $x\to x_0$ 时，α、β、$\bar\alpha$、$\bar\beta$ 都是无穷小，且 $\alpha\sim\bar\alpha$，$\beta\sim\bar\beta$. 证明：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha f=\lim\limits_{x\to x_0}\bar\alpha f$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{\beta g}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{\bar\beta g}$；

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\bar\beta}{\bar\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}\neq -1$，则 $\alpha+\beta\sim\bar\alpha+\bar\beta$；

（3）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\bar\beta}{\bar\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}\neq 1$，则 $\alpha-\beta\sim\bar\alpha-\bar\beta$.

[解题要点]　利用等价无穷小的定义.

证：（1）因为当 $x\to x_0$ 时，α、β、$\bar\alpha$、$\bar\beta$ 都是无穷小，且 $\alpha\sim\bar\alpha$，$\beta\sim\bar\beta$，显然有

$$\lim_{x\to x_0}\alpha f=\lim_{x\to x_0}\bar\alpha f,\ \lim_{x\to x_0}\frac{f}{\beta g}=\lim_{x\to x_0}\frac{f}{\bar\beta g}.$$

（2）由于

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha+\beta}{\bar\alpha+\bar\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}}{\dfrac{\bar\alpha+\bar\beta}{\bar\alpha}}=\lim_{x\to x_0}\frac{1+\dfrac{\beta}{\alpha}}{1+\dfrac{\bar\beta}{\bar\alpha}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}}{1+\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\bar\beta}{\bar\alpha}}=1,$$

因此 $\alpha+\beta\sim\bar\alpha+\bar\beta$.

（3）证明方法与技巧同（2），证明从略.

例 6 求(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)+\sin 2x}{\tan x-3\arctan 2x}$.

(2)(复旦大学)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{e^x-1}$.

[解题要点] 设法利用结论:(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\bar\beta}{\bar\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}\neq-1$,则 $\alpha+\beta\sim\bar\alpha+\bar\beta$;(2)当 $x\to0$ 时有 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$,$1-(1+x)^\alpha\sim-\alpha x$,其中 $\alpha>0$.

解:(1)由于当 $x\to0$ 时,$\sin(\sin x)\sim\sin x\sim x$,$\sin 2x\sim2x$,$\tan x\sim x$,$-3\arctan 2x\sim-3\cdot2x=-6x$,且

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}\neq-1,\ \lim_{x\to0}\frac{x}{-6x}=-\frac{1}{6}\neq-1.$$

因此,

$$\sin(\sin x)+\sin(2x)\sim x+2x=3x,$$
$$\tan x-3\arctan 2x\sim x-6x=-5x,$$

故原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{-5x}=-\dfrac{3}{5}$.

(2)由于当 $x\to0$ 时,$\sqrt{1+\tan x}-1\sim\dfrac{\tan x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$,

$$1-\sqrt{1-\sin x}\sim-\frac{1}{2}\cdot(-\sin x)=\frac{1}{2}\sin x\sim\frac{x}{2},$$
$$e^x-1\sim x,$$

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\neq-1$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-1)+(1-\sqrt{1-\sin x})}{e^x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1.$$

方法四:化为未定型(利用洛必达法则)

常见未定型有 $\dfrac{0}{0}$ 型,$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,$\dfrac{\bullet}{\infty}$ 型,以及可化成 $\dfrac{0}{0}$、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 的未定型.

例 7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^p-n^p]$ $(0<p<1)$.

解法 1:化为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定型.

[解题要点] (1)化为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定型后利用洛必达法则;(2)$\lim\limits_{t\to0^+}t^\alpha=0$ $(\alpha>0)$.

$$原式=\lim_{n\to\infty}n^p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right]\xlongequal{t=\frac{1}{n}}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^p-1}{t^p}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{p(1+t)^{p-1}}{pt^{p-1}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{1-p}}{(1+t)^{1-p}}=0.$$

解法 2：利用等价无穷小.

[解题要点] 利用 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\sim\frac{1}{n}\cdot\alpha$ $(\alpha>0,\ n\to\infty)$.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p}-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{p}}=\lim_{n\to\infty}p\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{1-p}=0.$$

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a,\ b,\ c>0)$.

[解题要点] $\lim f(x)=\lim \mathrm{e}^{\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim \ln f(x)}$

解：$\text{原式}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{a^x+b^x+c^x}\cdot\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{3}}$

$=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}$.

例 9 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}$ $(a,\ b,\ c>0)$.

[解题要点] 利用归结原则和例 8 结论.

解：令 $x=\frac{1}{n}$，代入原式并由例 8 得

$$\text{原式}=\sqrt[3]{abc}.$$

例 10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_m^{\frac{1}{n}}}{m}\right)^{n}$ $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m>0)$.

[解题要点] 利用归结原则和例 9 结论.

解：令 $x=\frac{1}{n}$，代入原式并由例 9 得

$$\text{原式}=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}.$$

例 11 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+f'(x)]=k$（有限），求 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

[解题要点] 化为$\frac{\bullet}{\infty}$型未定型.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^xf(x)}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[\mathrm{e}^xf(x)]'}{(\mathrm{e}^x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^xf(x)+\mathrm{e}^xf'(x)}{\mathrm{e}^x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+f'(x)]=k.$

方法五：阶的估计法（利用泰勒公式）

常用泰勒公式：当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$；$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)$；$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)$；$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$；$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$；$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^3)$.