"十三五"国家重点出版物出版规划项目

可靠性新技术丛书

Reliability Theory
Based on Uncertain Lifetimes

基于不确定寿命的可靠性理论

刘颖 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

版物出版规划项目

可靠性新技术丛书

基于不确定寿命的可靠性理论

Reliability Theory Based on Uncertain Lifetimes

刘颖 著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书以系统结构、部件寿命特征以及维修时间等相关信息为出发点，建立不同环境下的可靠性数学模型，进而估计与系统寿命特征有关的可靠性数量指标。本书研究对象主要包括：基于随机寿命的不可修系统、基于随机寿命和维修时间的可修系统、基于模糊寿命的不可修系统、基于随机模糊寿命的不可修系统、基于随机模糊寿命和维修时间的可修系统五部分。另外，本书还介绍了不确定性数学相关的理论知识，可作为可靠性模型的数学基础。

图书在版编目(CIP)数据

基于不确定寿命的可靠性理论/刘颖著．—北京：国防工业出版社，2018.8

(可靠性新技术丛书)

ISBN 978-7-118-11716-5

Ⅰ．①基…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①可靠性理论　Ⅳ．①O213.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 241822 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

北京龙世杰印刷有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×1000　1/16　**印张** 11¾　**字数** 208 千字

2018 年 8 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—2000 册　**定价** 68.00 元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

可靠性新技术丛书

编审委员会

丛书序

可靠性理论与技术发源于20世纪50年代，在西方工业化先进国家得到了学术界、工业界广泛持续的关注，在理论、技术和实践上均取得了显著的成就。20世纪60年代，我国开始在学术界和电子、航天等工业领域关注可靠性理论研究和技术应用，但是由于众所周知的原因，这一时期进展并不顺利。直到20世纪80年代，国内才开始系统化地研究和应用可靠性理论与技术，但在发展初期，主要以引进吸收国外的成熟理论与技术进行转化应用为主，原创性的研究成果不多，这一局面直到20世纪90年代才开始逐渐转变。1995年以来，在航空航天及国防工业领域开始设立可靠性技术的国家级专项研究计划，标志着国内可靠性理论与技术研究的起步；2005年，以国家863计划为代表，开始在非军工领域设立可靠性技术专项研究计划；2010年以来，在国家自然科学基金的资助项目中，各领域的可靠性基础研究项目数量也大幅增加。同时，进入21世纪以来，在国内若干单位先后建立了国家级、省部级的可靠性技术重点实验室。上述工作全方位地推动了国内可靠性理论与技术研究工作。当然，在这一进程中，随着中国制造业的快速发展，特别是《中国制造2025》的颁布，中国正从制造大国向制造强国的目标迈进，在这一进程中，中国工业界对可靠性理论与技术的迫切需求也越来越强烈。工业界的需求与学术界的研究相互促进，使得国内可靠性理论与技术自主成果层出不穷，极大地丰富和充实了已有的可靠性理论与技术体系。

在上述背景下，我们组织编著了这套可靠性新技术丛书，以集中展示近5年国内可靠性技术领域最新的原创性研究和应用成果。在组织编著丛书过程中，坚持了以下几个原则：

一是**坚持原创**。丛书选题的征集，要求每一本图书反映的成果都要依托国家级科研项目或重大工程实践，确保图书内容反映理论、技术和应用创新成果，力求做到每一本图书达到专著或编著水平。

二是**体现科学**。丛书框架的设计，按照可靠性系统工程管理、可靠性设计与试验、故障诊断预测与维修决策、可靠性物理与失效分析4个板块组织丛书的选题，基本上反映了可靠性技术作为一门新兴交叉学科的主要内容，也能在一定时期内保证本套丛书的开放性。

三是**保证权威**。丛书作者的遴选，汇聚了一支由国内可靠性技术领域长江学者特聘教授、千人计划专家、国家杰出青年基金获得者、973项目首席科学家、国家

级奖获得者、大型企业质量总师、首席可靠性专家等领衔的高水平作者队伍,这些高层次专家的加盟奠定了丛书的权威性地位。

四是**覆盖全面**。从书选题内容不仅覆盖了航空航天、国防军工行业,还涉及了轨道交通、装备制造、通信网络等非军工行业。

这套丛书成功入选"十三五"国家重点出版物出版规划项目,主要著作同时获得国家科学技术学术著作出版基金、国防科技图书出版基金以及其他专项基金等的资助。为了保证这套丛书的出版质量,国防工业出版社专门成立了由总编辑挂帅的丛书出版工作领导小组和由可靠性领域权威专家组成的丛书编审委员会,从选题征集、大纲审定、初稿协调、终稿审查等若干环节设置评审点,依托领域专家逐一对入选丛书的创新性、实用性、协调性进行审查把关。

我们相信,本套丛书的出版将推动我国可靠性理论与技术的学术研究跃上一个新台阶,引领我国工业界可靠性技术应用的新方向,并最终为"中国制造2025"目标的实现做出积极的贡献。

康锐

2018年5月20日

前言

可靠性系统工程是以产品的寿命特征为主要研究对象的交叉学科,它涉及基础数学、技术科学以及管理科学的许多领域。近年来,国内外可靠性领域出现了诸多相关书籍,但针对数学模型的可靠性类书籍却相对较少,或者也只是以单一的概率论或者模糊理论为数学基础建立的可靠性数学模型。本书针对系统的不同寿命特征,分别采用概率论、模糊理论和随机模糊理论3种不同的数学工具对系统进行可靠性建模及分析,这也是本书的特色所在。本书的成果既能充实和完善传统可靠性理论,同时也会促进相关学科的发展,具有重要的理论意义。

本书分为6章,其中第3章、第4章和第6章汇集了作者多年的原创研究成果,这些成果曾受国家自然科学基金(11301382)、天津市自然科学基金(16JCYBJC18500)、天津市企业科技特派员项目(17JCTPJC54100)以及教育部人文社会科学研究青年基金(18YJC630108)的资助,内容多次在重要学术会议上进行报告。考虑到读者的广泛性,本书在第2章和第5章中也摘录了曹晋华教授和程侃教授的著作《可靠性数学引论》中的部分内容,方便读者将3种数学工具建立的可靠性数学模型进行对比。

第1章介绍不确定性数学理论的一些基础知识;第2章及第5章分别介绍随机情形下的不可修系统及可修系统的可靠性数学模型;第3章介绍模糊环境下的不可修系统可靠性数学模型;第4章及第6章分别介绍随机模糊环境下的不可修系统及可修系统可靠性数学模型。

本书可以作为理工科相关专业高年级本科生和研究生的教材,也可作为工程技术人员及数学工作者学习和了解可靠性基础理论的参考书。

在本书即将出版之际,作者向唐万生教授、赵瑞清教授和李孝忠教授表示衷心的感谢!向鼓励和支持作者出版本书的康锐教授、杨巨成教授和王艳萍教授表示衷心的感谢!向协助作者翻译及整理文献的研究生马瑶和刘冬雪表示衷心的感谢!向国防工业出版社白天明编辑为本套丛书编辑出版做出的努力表示衷心的感谢!

刘　颖

2018年6月于天津科技大学

目录

第 1 章

不确定性数学基础

1.1 概 率 论

概率论是一门研究随机现象数量规律的数学分支,其研究始于 17 世纪 Pascal 与 Fermat 对机会博弈中一些问题的讨论,发展历史比较悠久。之后,许多学者专门研究概率论。1931 年,von Mises[1]提出了样本空间的概念,使得概率论取得了重要进展。1933 年,Kolmogorov[2]给出了概率论完整的公理化基础。概率论基础的建立,使得概率论在科学和工程领域中得到了越来越广泛的应用。

1.1.1 概率测度

设 $\mathbf{\Omega}$ 是非空集合,$\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{\Omega}$ 上的 σ 代数。$\mathbf{A}$ 中的元素 A 称为一个事件。为了给出概率的公理化定义,提出以下 3 个公理:

公理 1.1.1(规范性) 对于全集 $\mathbf{\Omega}$, 有 $\Pr\{\mathbf{\Omega}\}=1$。

公理 1.1.2 (非负性) 对于任意事件 A, 有 $\Pr\{A\}\geqslant 0$。

公理 1.1.3(可列可加性) 对于任意可列个不相交的事件 $A_1,A_2,\cdots$, 有

$$\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr\{A_i\}$$

定义 1.1.1 若集函数 Pr 满足规范性、非负性和可列可加性,则 Pr 称为概率测度。

例 1.1.1 设 $\mathbf{\Omega}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$,$\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{\Omega}$ 上的幂集。假设 $p_1,p_2,\cdots$是非负实数且满足 $p_1+p_2+\cdots=1$, 定义一个 $\mathbf{A}$ 上的集函数

$$\Pr(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i, \quad A \in \mathbf{A}$$

则 Pr 为概率测度。

例 1.1.2 设 ϕ 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的非负可积函数,使得

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

定义一个 Borel 代数上的集函数

$$\Pr\{A\} = \int_{\mathbf{A}} \phi(x)\,\mathrm{d}x$$

则 Pr 为概率测度。

定义 1.1.2 设 $\mathbf{\Omega}$ 为非空集合,$\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{\Omega}$ 上的 σ 代数,Pr 为概率测度,则三元组($\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\Pr$)称为概率空间。

例 1.1.3 设 $\mathbf{\Omega}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$,$\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{\Omega}$ 上的幂集,Pr 为例 1.1.1 中定义的概率测度,则($\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\Pr$)为一个概率空间。

定理 1.1.1(概率连续性定理) 设($\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\Pr$)是一个概率空间。若($A_1,A_2,\cdots$)$\in\mathbf{A}$ 且 $\lim\limits_{i\to+\infty}A_i$ 存在,那么

$$\lim_{i\to+\infty}\Pr\{A_i\} = \Pr\{\lim_{i\to+\infty}A_i\}$$

定理 1.1.2(乘积概率定理) 设($\mathbf{\Omega}_k,\mathbf{A}_k,\Pr_k$)($k=1,2,\cdots$)分别为概率空间。令 $\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}_1\times\mathbf{\Omega}_2\times\cdots$,$\mathbf{A}=\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2\times\cdots$,则在 $\mathbf{A}$ 上存在唯一的概率测度 Pr 使得

$$\Pr\left\{\prod_{k=1}^{+\infty}A_k\right\} = \prod_{k=1}^{+\infty}\Pr_k\{A_k\}$$

其中 A_k 分别是 $\mathbf{A}_k$($k=1,2,\cdots$)中的任意事件。该结论称作乘积概率定理。该概率测度称作乘积概率测度,记作 $\Pr=\Pr_1\times\Pr_2\times\cdots$。

定义 1.1.3 设($\mathbf{\Omega}_k,\mathbf{A}_k,\Pr_k$)($k=1,2,\cdots$)为概率空间。若 $\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}_1\times\mathbf{\Omega}_2\times\cdots$,$\mathbf{A}=\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2\times\cdots$且 $\Pr=\Pr_1\times\Pr_2\times\cdots$,则三元组($\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\Pr$)称为乘积概率空间。

1.1.2 随机变量

定义 1.1.4 随机变量 ξ 定义为从概率空间($\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\Pr$)到实数集的函数,若对于任意 Borel 集 B,$\{\xi\in B\}$ 为一个事件。

例 1.1.4 令($\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\Pr$)为 $\{\omega_1,\omega_2\}$,$\Pr\{\omega_1\}=\Pr\{\omega_2\}=0.5$,那么函数

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega=\omega_1 \\ 1, & \omega=\omega_2 \end{cases}$$

是随机变量。

定义 1.1.5 随机变量 ξ 被称作:

(1) 非负随机变量,若 $\Pr\{\xi<0\}=0$;

(2) 正的随机变量,若 $\Pr\{\xi\leqslant 0\}=0$;

(3) 连续的随机变量,若 $\Pr\{\xi=x\}$ 关于 x 是连续的函数;

(4) 简单的随机变量,若存在有限序列 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 使得 $\Pr\{\xi\neq x_1,\xi\neq x_2,\cdots,\xi\neq x_m\}=0$;

(5) 离散的随机变量,若存在可数序列 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 使得 $\Pr\{\xi\neq x_1,\xi\neq x_2,\cdots\}=0$。

定义 1.1.6　设 ξ 和 η 为定义在概率空间$(\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\mathrm{Pr})$上的随机变量,那么 $\xi=\eta$ 当且仅当对于每个 $\omega\in\mathbf{\Omega}$, 都有 $\xi(\omega)=\eta(\omega)$。

定义 1.1.7　n 维随机向量定义为从概率空间$(\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\mathrm{Pr})$到 n 维实数向量集的可测函数。

定理 1.1.3　向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为随机向量当且仅当 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为随机变量。

定义 1.1.8(单一概率空间上的随机运算)　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为概率空间$(\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\mathrm{Pr})$上的随机变量,$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为可测函数,则 $\xi=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$也为随机变量,定义为

$$\xi(\omega)=f(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega)),\quad \forall\omega\in\mathbf{\Omega}$$

例 1.1.5　设 ξ_1,ξ_2 为定义在概率空间$(\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\mathrm{Pr})$上的随机变量,则 ξ_1 与 ξ_2 的和为

$$(\xi_1+\xi_2)(\omega)=\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega),\quad \forall\omega\in\mathbf{\Omega}$$

ξ_1 与 ξ_2 的乘积为

$$(\xi_1\times\xi_2)(\omega)=\xi_1(\omega)\times\xi_2(\omega),\quad \forall\omega\in\mathbf{\Omega}$$

定义 1.1.9(不同概率空间上的随机运算)　设 ξ_i 为概率空间$(\Omega_i,\mathbf{A}_i,\mathrm{Pr}_i)$$(i=1,2,\cdots,n)$上的随机变量,$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为可测函数,则 $\xi=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为乘积空间$(\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\mathrm{Pr})$上的随机变量,定义为

$$\xi(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)=f(\xi_1(\omega_1),\xi_2(\omega_2),\cdots,\xi_n(\omega_n)),\quad \forall(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\in\mathbf{\Omega}$$

例 1.1.6　设 ξ_1 和 ξ_2 分别为定义在概率空间$(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{A}_1,\mathrm{Pr}_1)$及$(\mathbf{\Omega}_2,\mathbf{A}_2,\mathrm{Pr}_2)$上的随机变量,则 ξ_1 与 ξ_2 的和为

$$(\xi_1+\xi_2)(\omega_1,\omega_2)=\xi_1(\omega_1)+\xi_2(\omega_2),\quad \forall(\omega_1,\omega_2)\in\mathbf{\Omega}_1\times\mathbf{\Omega}_2$$

ξ_1 与 ξ_2 的乘积为

$$(\xi_1\times\xi_2)(\omega_1,\omega_2)=\xi_1(\omega_1)\times\xi_2(\omega_2),\quad \forall(\omega_1,\omega_2)\in\mathbf{\Omega}_1\times\mathbf{\Omega}_2$$

1.1.3　概率分布

定义 1.1.10　随机变量 ξ 的概率分布 $\Phi:\mathbf{R}\to[0,1]$定义为

$$\Phi(x)=\mathrm{Pr}\{\xi\leqslant x\},\quad x\in\mathbf{R}$$

例 1.1.7　令$(\mathbf{\Omega},\mathbf{A},\mathrm{Pr})$为$\{\omega_1,\omega_2\}$,$\mathrm{Pr}\{\omega_1\}=\mathrm{Pr}\{\omega_2\}=0.5$。我们定义一个随机变量

$$\xi(\omega)=\begin{cases}0, & \omega=\omega_1\\ 1, & \omega=\omega_2\end{cases}$$

则 ξ 的概率分布为

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.5, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

定理 1.1.4(概率分布的充要条件)　函数 $\Phi:\mathbf{R}\to[0,1]$ 为概率分布当且仅当它是一个递增的右连续函数,且

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=1$$

定理 1.1.5　概率分布函数为 Φ 的随机变量 ξ 是:

(1) 非负的,若对于所有 $x<0$, 当且仅当 $\Phi(x)=0$;

(2) 正的,若对于所有 $x\leqslant 0$, 当且仅当 $\Phi(x)=0$;

(3) 简单的,当且仅当 Φ 在有限点上取非零值;

(4) 离散的,当且仅当 Φ 在可数点上取非零值;

(5) 连续的,当且仅当 Φ 是连续函数。

定义 1.1.11　随机变量 ξ 的概率密度 $\phi:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ 定义为对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 有

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(y)\,\mathrm{d}y$$

成立,其中 Φ 为 ξ 的概率分布函数。

定理 1.1.6　设 ξ 为随机变量且概率密度函数 ϕ 存在,那么对于任何 Borel 集 $\mathbf{B}$, 有

$$\Pr\{\xi\in\mathbf{B}\}=\int_{\mathbf{B}}\phi(y)\,\mathrm{d}y$$

下面我们介绍几类常用的随机变量。

定义 1.1.12　随机变量 ξ 服从均匀分布,若其概率密度函数为

$$\phi(x)=\frac{1}{b-a},\quad a\leqslant x\leqslant b$$

其中 a,b 为实数且 $a<b$, 记作 $\xi\sim U(a,b)$。

定义 1.1.13　随机变量 ξ 服从指数分布,若其概率密度函数为

$$\phi(x)=\frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),\quad x\geqslant 0$$

其中 β 为正数,记作 $\xi\sim\exp\left(\frac{1}{\beta}\right)$。

定义 1.1.14　随机变量 ξ 服从正态分布,若其概率密度函数为

$$\phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\quad -\infty<x<+\infty$$

其中 μ 和 σ 为实数且 $\sigma>0$,记作 $\xi\sim LN(\mu,\sigma^2)$。

定义 1.1.15　随机变量 ξ 服从对数正态分布,若其概率密度函数为

$$\phi(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\quad x>0$$

其中 μ 和 σ 为实数且 $\sigma>0$,记作 $\xi\sim LN(\mu,\sigma^2)$。

定义 1.1.16　随机变量 ξ 服从 Γ 分布,若其概率密度函数为

$$\phi(x)=\frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-\lambda x},\quad x\geqslant 0;\lambda,\alpha>0$$

其中 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, α 称作形状参数,λ 为尺度参数,记作 $\xi\sim\Gamma(\alpha,\lambda;x)$。

定义 1.1.17　随机变量 ξ 服从 Weibull 分布,若其概率密度函数为

$$\phi(x)=\lambda\alpha\,(\lambda x)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda x)^{\alpha}},\quad x\geqslant 0;\alpha,\lambda>0$$

其中 α 称作形状参数,λ 为尺度参数,记作 $\xi\sim W(\alpha,\lambda;x)$。

定义 1.1.18　随机变量 ξ 服从参数为 p 的两点分布,若

$$\Pr\{\xi=1\}=p;\ \Pr\{\xi=0\}=q,\quad p+q=1$$

定义 1.1.19　随机变量 ξ 服从参数为 (n,p) 的二项分布,若

$$\Pr\{\xi=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

其中 $p,q>0$ 且 $p+q=1$。

定义 1.1.20　随机变量 ξ 服从参数为 p 的几何分布,若

$$\Pr\{\xi=k\}=pq^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $p,q>0$ 且 $p+q=1$。

定义 1.1.21　非负整数值随机变量 ξ 服从参数为 (α,p) 的负二项分布,若

$$\Pr\{\xi=k\}=\binom{-\alpha}{k}p^{\alpha}\,(-q)^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\alpha,p,q>0$ 且 $p+q=1$。

定义 1.1.22　非负整数值随机变量 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布,若

$$\Pr\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots;\lambda>0$$

定义 1.1.23　假设 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathbf{A},\Pr)$ 上的随机向量,如果函数 $\Phi:\mathbf{R}^n\to[0,1]$ 满足

$$\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Pr\{\omega\in\Omega\,|\,\xi_1(\omega)\leqslant x_1,\xi_2(\omega)\leqslant x_2,\cdots,\xi_n(\omega)\leqslant x_n\}$$

则称 Φ 为随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的联合概率分布函数。

定义 1.1.24　若对所有 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, 存在函数 $\phi:\mathbf{R}^n\to[0,+\infty)$ 满足

$$\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\phi(y_1,y_2,\cdots,y_n)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$$

则称 ϕ 为随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的联合概率密度函数。

1.1.4 独立性

定义 1.1.25 随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 称作相互独立的,若对任意 Borel 集 B_1, $B_2,\cdots,B_m$, 有

$$\Pr\left\{\bigcap_{i=1}^{m}\{\xi_i\in B_i\}\right\}=\prod_{i=1}^{m}\Pr\{\xi_i\in B_i\}$$

例 1.1.8 设 $\xi_1(\omega_1)$和$\xi_2(\omega_2)$分别是概率空间$(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{A}_1,\Pr_1)$和$(\mathbf{\Omega}_2,\mathbf{A}_2,\Pr_2)$上的随机变量。因此它们也是乘积概率空间$(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{A}_1,\Pr_1)\times(\mathbf{\Omega}_2,\mathbf{A}_2,\Pr_2)$上的随机变量。对于任意 Borel 集 B_1 和 B_2, 有

$$\begin{aligned}
&\Pr\{(\xi_1\in B_1)\cap(\xi_2\in B_2)\}\\
&=\Pr\{(\omega_1,\omega_2)\mid\xi_1(\omega_1)\in B_1,\xi_2(\omega_2)\in B_2\}\\
&=\Pr\{(\omega_1\mid\xi_1(\omega_1)\in B_1)\times(\omega_2\mid\xi_2(\omega_2)\in B_2)\}\\
&=\Pr_1\{\omega_1\mid\xi_1(\omega_1)\in B_1\}\times\Pr_2\{\omega_2\mid\xi_2(\omega_2)\in B_2\}\\
&=\Pr\{\xi_1\in B_1\}\times\Pr_2\{\xi_2\in B_2\}
\end{aligned}$$

因此 ξ_1 和 ξ_2 在乘积概率空间上是独立的。实际上,若随机变量定义在不同的概率空间上,则它们总是独立的。

定理 1.1.7 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是相互独立的随机变量,$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是可测函数,则$f_1(\xi_1),f_2(\xi_2),\cdots,f_n(\xi_n)$也是相互独立的随机变量。

定理 1.1.8 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是相互独立的随机变量,概率分布分别为 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$, $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为可测函数,则随机变量 $\xi=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的概率分布为

$$\Phi(x)=\int_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant x}\mathrm{d}\Phi_1(x_1)\,\mathrm{d}\Phi_2(x_2)\cdots\mathrm{d}\Phi_n(x_n)$$

注 1.1.1 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的概率密度函数分别为 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$, 则 $\xi=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的概率分布为

$$\Phi(x)=\int_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant x}\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

因为 $\mathrm{d}\Phi_i(x_i)=\phi_i(x_i)\,\mathrm{d}x_i(i=1,2,\cdots,n)$。

例 1.1.9 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为相互独立的随机变量,且它们的概率分布分别为 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$, 则它们的和

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$$

的概率分布为

$$\Phi(x)=\int_{x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant x}\mathrm{d}\Phi_1(x_1)\,\mathrm{d}\Phi_2(x_2)\cdots\mathrm{d}\Phi_n(x_n)$$

特别地,若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 的概率分布分别为 Φ_1 和 Φ_2, 则 $\xi=\xi_1+\xi_2$ 的概率分

布为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(x-y)\,\mathrm{d}\Phi_2(y)$$

即函数 Φ_1 和 Φ_2 的卷积。

例 1.1.10　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为相互独立的随机变量，且它们的概率分布分别为 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$，则其最大值

$$\xi=\xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_n$$

的概率分布为

$$\Phi(x)=\Phi_1(x)\Phi_2(x)\cdots\Phi_n(x)$$

例 1.1.11　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为相互独立的随机变量，且它们的概率分布分别为 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$，则其最小值

$$\xi=\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n$$

的概率分布为

$$\Phi(x)=1-(1-\Phi_1(x))(1-\Phi_2(x))\cdots(1-\Phi_n(x))$$

1.1.5　同分布

定义 1.1.26　随机变量 ξ 和 η 被称作同分布的，若对任意 Borel 集 B，有

$$\Pr\{\xi \in B\}=\Pr\{\eta \in B\}$$

定理 1.1.9　随机变量 ξ 和 η 被称作同分布的，当且仅当它们有相同的概率分布。

定理 1.1.10　令 ξ 和 η 为随机变量且它们的概率密度函数存在，则 ξ 和 η 被称作同分布的，当且仅当它们有相同的概率密度函数。

1.1.6　期望值

定义 1.1.27　设 ξ 是随机变量，ξ 的期望值定义为

$$E[\xi]=\int_0^{+\infty}\Pr\{\xi \geqslant x\}\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^0\Pr\{\xi \leqslant x\}\,\mathrm{d}x$$

只要两个积分至少有一个是有限的。

例 1.1.12　假设 ξ 是离散型随机变量，取值为 x_i 的概率为 $p_i(i=1,2,\cdots,m)$，那么

$$E[\xi]=\sum_{i=1}^{m} p_i x_i$$

例 1.1.13　若随机变量 $\xi \sim U(a,b)$，则 $E[\xi]=\dfrac{a+b}{2}$。

例 1.1.14　若随机变量 $\xi \sim \exp\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$，则 $E[\xi]=\beta$。