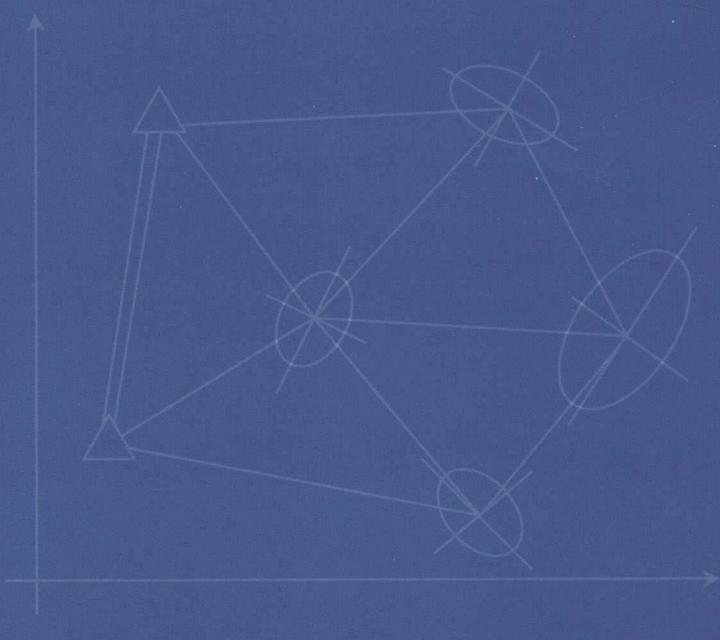
测量平差教程

张宏斌　刘学军
喻国荣　隋铭明　编著



科学出版社

测量平差教程

张宏斌　刘学军　喻国荣　隋铭明　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

测量平差是用于观测数据处理的一门应用数学。全书由三部分组成。第一部分介绍测量误差的基本理论，包括测量平差简介、误差及其定量指标、误差传播定律。第二部分阐述测量平差的基础方法，包括平差基本原理、条件平差、附有参数的条件平差、间接平差、附有限制条件的间接平差、概括平差、误差椭圆。第三部分讨论平差在测量中的应用。

本书可作为测绘类专业本科生、专科生的教材，也可供测绘工程技术人员及相关专业读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

测量平差教程 / 张宏斌等编著. —北京：科学出版社，2019.1
ISBN 978-7-03-059717-5

Ⅰ. ①测… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①测量平差-教材 Ⅳ. ①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 262467 号

责任编辑：杨　红　程雷星 / 责任校对：何艳萍
责任印制：张　伟 / 封面设计：陈　敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 1 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2019 年 1 月第一次印刷　印张：16 7/8
字数：419 000
定价：59.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最佳估值，并评定测量成果的精度。“测量平差”是测绘类专业中一门重要的理论基础课，是用于观测数据处理的一门应用数学。误差理论及测量平差中的数据处理与精度评定方法，在某种程度上，对其他专业和行业的数据分析也具有一定的参考价值。

该课程理论性较强，需要具备较扎实的高等数学、线性代数、概率与数理统计知识。编者在与兄弟院校的测量平差授课教师交流时发现，测绘类专业学生在学习该门课程时，普遍存在一定的畏难情绪，教学效果未达预期。学生的数学与测绘基础尚有欠缺固然是一方面的原因，但有一本面向学生的教材，对学生来说可能也很重要，故萌生了新编一本测量平差教程的想法。

本教程主要有以下特点：

（1）加强了测量学知识与测量平差知识之间的联系，强化了测量学知识到测量平差理论的过渡。

（2）平差公式推导时，加强了纯量形式与矩阵形式之间的联系，强化了纯量形式到矩阵形式的过渡。

（3）在第 4 章平差基本原理中，引入了近似平差到严密平差的过渡，并以一个简单的水准网为例，引出四种经典平差方法，强化第 4 章在全教程中的引领作用。

（4）为比较四种经典平差方法的优缺点和适用情形，在第 5 章条件平差、第 6 章附有参数的条件平差、第 7 章间接平差、第 8 章附有限制条件的间接平差四章中，综合例题部分采用同样的水准网、三角网、导线网 3 条例题。

（5）加强了平差在测量中应用部分的内容。本教程以传统工程控制网、全球导航卫星系统、地理信息系统、摄影测量、遥感、坐标变换和曲线拟合为例，结合实例，介绍平差在测量中的应用。

（6）略去了平差系统的统计假设检验、近代平差的内容。

本书由南京师范大学刘学军，东南大学张宏斌、喻国荣，南京林业大学隋铭明共同编写。全书共 11 章，第 1、4 章由刘学军编写，第 2、3、5、6、7、8 章由张宏斌编写，第 9、10 章由喻国荣编写，第 11 章由张宏斌、隋铭明编写。全书由张宏斌统稿。

本书根据作者多年的教学与实践编写，由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

本书出版得到了东南大学交通学院、教务处及国家自然科学基金项目“插值条件下 DEM 误差的空间自相关模型研究”（项目号：41471373）的支持，在此一并表示感谢！

编　者

2018 年 6 月于南京

目　　录

前言
第 1 章　绪论……1
1.1　什么是测量平差……1
1.2　测量平差的发展简史……1
1.3　本教程的内容和结构……3
1.4　如何学好测量平差……5
第 2 章　误差及其定量指标……6
2.1　观测误差……6
2.2　偶然误差……10
2.3　偶然误差定量指标——精度……14
2.4　精度的理解与说明……19
2.5　精度的计算……22
2.6　延伸阅读……29
第 3 章　误差传播定律……32
3.1　为什么要有误差传播定律……32
3.2　方差-协方差阵……33
3.3　协因数阵……37
3.4　权阵……38
3.5　协方差与协因数传播律……41
3.6　非线性函数的误差传播定律……47
3.7　误差传播定律在测量中的应用……54
3.8　综合例题……62
3.9　延伸阅读……65
第 4 章　平差基本原理……67
4.1　必要观测与多余观测……67
4.2　近似平差……68
4.3　测量平差的数学模型……71
4.4　非线性函数线性化……77
4.5　平差模型的求解……79
4.6　公式汇编……85
第 5 章　条件平差……87
5.1　概述……87

5.2 条件平差原理……88
5.3 条件方程个数的确定……94
5.4 条件方程列立及其类型……100
5.5 精度评定……114
5.6 综合例题……119
5.7 延伸阅读和公式汇编……129
第 6 章 附有参数的条件平差……132
6.1 概述……132
6.2 附有参数的条件方程个数的确定……133
6.3 附有参数的条件平差原理……133
6.4 精度评定……136
6.5 综合例题……138
6.6 公式汇编……147
第 7 章 间接平差……149
7.1 概述……149
7.2 间接平差原理……149
7.3 误差方程列立及其线性化……154
7.4 精度评定……160
7.5 综合例题……164
7.6 公式汇编……174
第 8 章 附有限制条件的间接平差……175
8.1 概述……175
8.2 附有限制条件的间接平差方程个数的确定……176
8.3 附有限制条件的间接平差原理……177
8.4 精度评定……179
8.5 综合例题……182
8.6 公式汇编……191
第 9 章 概括平差……193
9.1 条件方程与参数……193
9.2 概括平差原理……194
9.3 精度评定……198
9.4 各种平差模型间的关系……201
9.5 平差结果的统计性质……206
9.6 公式汇编……212
第 10 章 误差椭圆……214
10.1 概述……214
10.2 点位任意方向的位差……218
10.3 误差椭圆原理……223

10.4　点位落入误差椭圆内的概率 ······ 228
10.5　公式汇编和延伸阅读 ······ 231
第 11 章　平差在测量中的应用 ······ 234
11.1　传统工程控制网 ······ 234
11.2　GNSS 网平差 ······ 238
11.3　平差在 GIS 中的应用 ······ 245
11.4　平差在摄影测量中的应用 ······ 249
11.5　平差在遥感中的应用 ······ 252
11.6　坐标变换的平差模型 ······ 255
11.7　平差在拟合模型中的应用 ······ 260
主要参考文献 ······ 262

第1章 绪　　论

“测量平差”（surveying adjustment）是测绘类专业中一门重要的理论基础课，是用于观测数据处理的一门应用数学。

1.1　什么是测量平差

为了测定两点间距离，如果仅丈量一次就可以得出其长度，实际工作中对该距离进行多次观测，各次重复观测的末位估读值可能不相等；欲确定一个平面三角形的形状，观测了其三个内角，三个内角观测值之和可能不等于理论值 180°；在水准网、三角网和导线网中，在多余观测了高差、角度和边长的情况下，也会出现高差、高程的矛盾和边角关系、平面坐标的矛盾，如高差闭合差、角度闭合差、纵横坐标增量闭合差等。

受仪器、观测者和外界环境的影响，观测值中不可避免地存在测量误差，误差造成了重复观测值不相等、测量值不等于理论值、几何图形不闭合，产生了不符值或闭合差。测量平差的目的就是要合理地消除这些不符值，求出未知量的最佳估值并评定结果的精度。

综上所述，测量平差即是测量数据调整的意思。其基本的定义是，依据某种最优化准则，由一系列带有观测误差的测量数据，对观测误差进行合理分配，求定未知量的最佳估值（不是真值）及精度的理论和方法。

平差是一个由中国天文学会名词审定委员会审定发布的天文学专有名词中文译名。测量平差是测绘学中一个专有名词，而且是一个有悠久历史的名词。从其基本定义可以看出，其理论和方法对于其他任何学科，只要是处理带有误差的观测数据均可适用，可见测量平差的应用十分广泛。

“测量平差”一词在我国最早出现在夏坚白、王之卓和陈永龄三位教授合著的我国第一本测量方面的教材。“二十八年秋，著者三人同在昆明，分别任教于同济大学、西南联大及中山大学。教学之际，深感国内关于测量课本及参考书之缺乏，学者苦之，乃有编辑测量学丛书之决心，而以《测量平差法》一书为始”（引自《学部委员夏坚白》）。

1.2　测量平差的发展简史

测量平差与其他学科一样，是由于生产的需要而产生的，并在生产实践的过程中，随着科学技术的进步而发展，经历了经典平差和近代平差等阶段。

1）经典平差

经典平差主要研究观测值中仅含有偶然误差的情形。

18 世纪末，在测量学、天文测量学等实践中提出了如何消除由观测误差引起的观测量之间矛盾的问题，即如何从带有误差的观测值中找出未知量的最佳估值。

1794 年，年仅 17 岁的高斯（Gauss）首先提出了解决这个问题的方法——最小二乘法。他根据偶然误差的四个特性，并以算术平均值为待求量的最或然值作为公理，导出了偶然误差的概率分布，给出了在最小二乘原理下未知量最或然值的计算方法。当时高斯的这一理论并没有正式发表。

1801 年，意大利天文学家朱赛普•皮亚齐发现了第一颗小行星谷神星。经过 40 天的跟踪观测后，由于谷神星运行至太阳背后，使得皮亚齐失去了谷神星的位置。随后全世界的科学家利用皮亚齐的观测数据开始寻找谷神星，但是根据大多数人计算的结果来寻找谷神星都没有结果。时年 24 岁的高斯用最小二乘法也计算了谷神星的轨道。奥地利天文学家海因里希•奥尔伯斯根据高斯计算出来的轨道重新发现了谷神星。

1809 年，高斯在《天体运动的理论》一文中正式发表了他的方法。在此之前，1806 年，勒让德尔（Legendre）发表了《决定彗星轨道方法》一文，从代数观点也独立地提出了最小二乘法，并定名为最小二乘法，所以后人称它为高斯-勒让德尔方法。

自 19 世纪初到 20 世纪五六十年代的 100 多年来，测量平差学者在基于偶然误差的依最小二乘准则的平差方法上做了许多研究，提出了一系列解决各类测量问题的平差方法（经典测量平差），针对这一时期的计算工具的情况，还提出了高斯约化法（高斯-杜里特表格）、平方根法（乔勒斯基法）等解算线性方程组的方法和许多分组解算线性方程组的方法，以达到简化计算的目的。

2）近代平差

自 20 世纪五六十年代开始，随着计算技术的进步和生产实践中高精度的需要，测量平差得到了很大发展，主要表现在以下几个方面。

（1）偶然误差→系统误差+粗差。从单纯研究观测的偶然误差理论扩展到包含系统误差和粗差，在偶然误差理论的基础上，对误差理论及其相应的测量平差理论和方法进行全方位研究，大大扩充了测量平差学科的研究领域和范围。

（2）独立观测值→相关观测值。1947 年，铁斯特拉（Tienstra）提出了相关观测值的平差理论，限于当时的计算条件，直到 20 世纪 70 年代以后才被广泛应用。相关平差的出现，使观测值的概念广义化了，将经典的最小二乘平差法推向更广泛的应用领域。

（3）非随机参数→随机参数。经典的最小二乘法平差，所选平差参数（未知量）假设是非随机变量。随着测量技术的进步，需要解决观测量和平差参数均为随机变量的平差问题，20 世纪 60 年代末提出并经 70 年代的发展，产生了顾及随机参数的最小二乘平差方法。它起源于最小二乘内插和外推重力异常的平差问题，由莫里茨（Moritz）、克拉鲁普（Krarup）提出，取名为最小二乘滤波、推估和配置，也称为拟合推估法。

（4）满秩→秩亏。经典的最小二乘平差法是一种满秩平差问题，即平差时的法方程组是满秩的，方程组有唯一解。20 世纪 60 年代，迈塞尔（Meissl）提出了针对非满秩平差问题的内制约平差原理，后经 70～80 年代多位国内外学者的深入研究，现已形成了一整套秩亏自由网平差的理论体系和多种解法，并广泛应用于测量实践。

（5）先验定权→后验定权。随着微波测距技术在测量中的应用，经典平差中的定权理论和方法也有所革新。许多学者致力于将经典的先验定权方法改进为后验定权方法的研究。在 20 世纪 80 年代，方差-协方差估计理论已经形成，并应用于测量实践。

（6）偶然误差→系统误差。观测中既然包含系统误差，那么系统误差特性、传播、检验、分析的理论研究自然展开，相应的平差方法也就产生，如附有系统参数的平差法等。为了检验系统误差的存在和影响，引进了数理统计学中的假设检验方法，结合平差对象和特点，测量学者发展了统计假设检验理论，提出了与平差同时进行的有效的检验方法。

（7）偶然误差→粗差。观测中有可能包含粗差，相应的误差理论也得到发展。其中最著名的是 20 世纪 60 年代后期荷兰巴尔达（Baarda）教授提出的测量系统的数据探测法和可靠性理论，为粗差的理论研究和实用检验方法奠定了基础。到目前为止，已经形成了粗差定位、估计和假设检验等理论体系。处理粗差问题，一种途径是进行数据探测，对粗差定位和消除；另一种途径是放弃最小二乘法，提出了在数学中称为稳健估计的方法，或称抗差估计。稳健估计理论研究和测量平差中的应用还在深入中。

另外，测量平差还从主要研究函数模型扩展到深入研究随机模型，从无偏估计扩展到有偏估计，从最小二乘估计准则扩展到其他多种估计准则，从线性模型的参数估计扩展到非线性模型的参数估计，从仅处理静态数据扩展到处理动态数据，从处理误差扩展到处理不确定性问题。

总之，自 20 世纪 70 年代以来，特别是近 20 多年来，测量平差与误差理论得到了充分发展。这些研究成果在常规测量技术中的应用已经相当普遍，但相对于不断出现和发展的测绘新技术，如何应用已有的方法，以及研究提出新的平差理论和方法，以适应现代数据处理的需要，是一个值得研究的课题。

1.3 本教程的内容和结构

本教程主要介绍偶然误差理论基础知识，讲述经典测量平差的基本理论和基本方法，数据处理的对象是带有偶然误差的观测列。教学目的是使学生掌握误差理论与经典测量平差基本原理，为进一步学习和研究近代误差理论和测量平差打好基础；学会经典测量平差的各种方法，使学生能独立地解决测绘工程中经常遇到的测量平差实际问题。

本教程主要讨论带有偶然误差的观测值平差处理问题，其内容为：

（1）偶然误差理论（第 2～3 章）。包含偶然误差特性和分布、偶然误差的传播、精度指标及其估计、权与中误差的定义及其估计方法。

（2）各类测量平差数学模型及其解算方法（第 4～10 章）。介绍各类测量平差的函数模型和随机模型的概念和建立、最小二乘原理及方法。分条件平差法、附有参数的条件平差法、间接平差法和附有限制条件的间接平差法，按最小二乘原理导出平差计算和精度评定的公式，4 种平差方法通过 3 条同样的综合例题比较其应用。还介绍了各种平差方法的概括和联系及误差椭圆。

（3）平差在测量中的应用（第 11 章）。介绍了误差理论与测量平差在传统工程控制网、全球导航卫星系统（global navigation satellite system，GNSS）、地理信息系统（geographic information system，GIS）、摄影测量、遥感（remote sensing，RS）、坐标变换和拟合模型等空间数据处理中的应用。

本教程的知识体系和组织结构如图 1-3-1 所示。

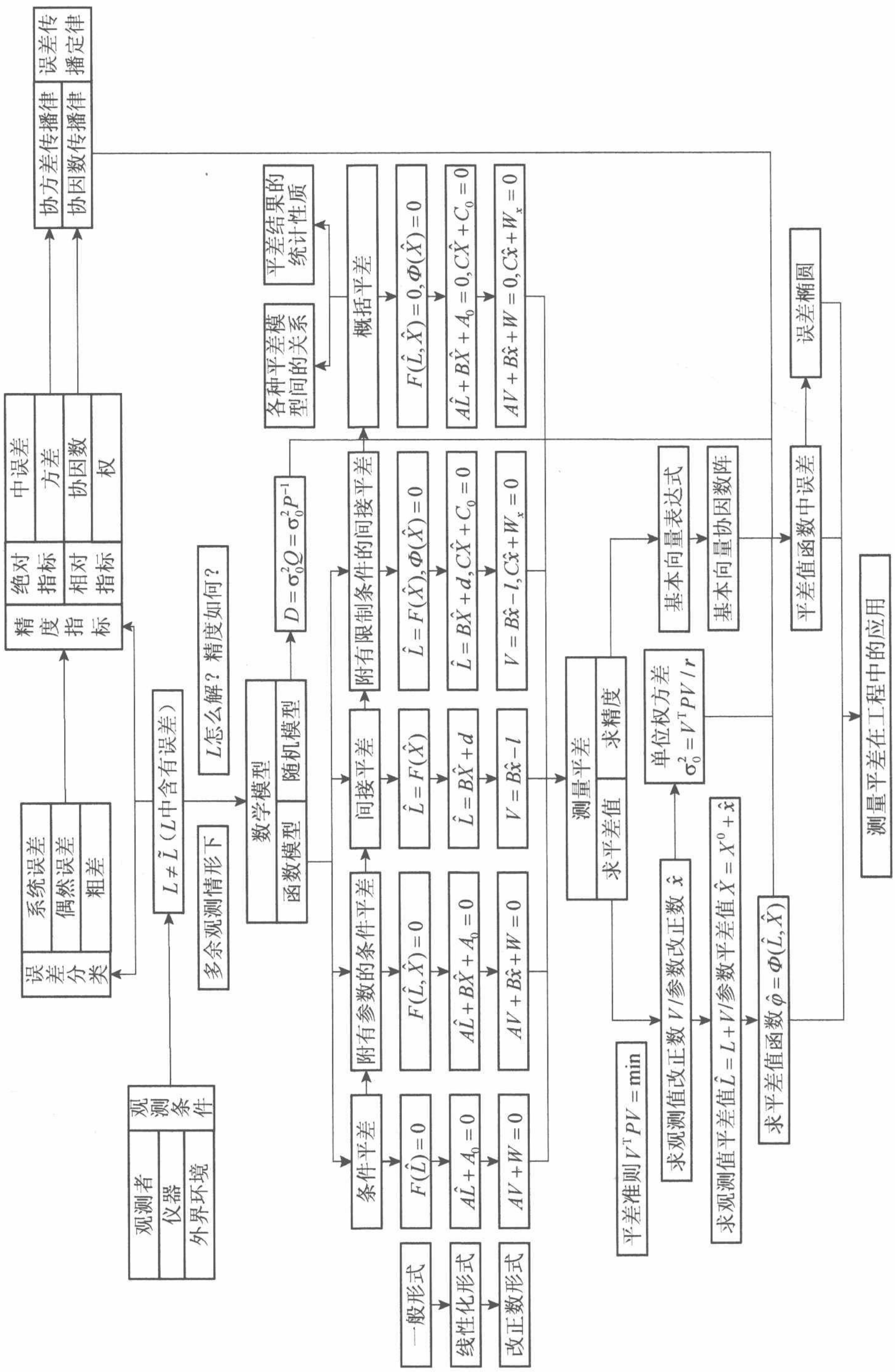


图 1-3-1　本教程的知识体系和组织结构图

1.4　如何学好测量平差

学好测量平差，需要做到以下几点。

（1）理解测量过程。测量平差主要研究观测数据的误差产生、传播及其处理，因此有必要熟悉和理解测量全过程。

（2）灵活运用数学知识。测绘类专业学生需学习高等数学、线性代数、概率与数理统计、数值分析等课程。在经典测量平差中，需要灵活运用微分、矩阵、概率等数学知识。

（3）学会运用 Matlab 或其他数据处理工具。测量平差的计算工作量很大，动辄高阶矩阵运算，手工计算费时且易算错。20 世纪 90 年代前，测绘类专业学生进行手工平差计算，甚至出现全班无两人计算结果完全一致的情形。因此有必要使学生学会运用某种数据计算和处理工具。

（4）多练习。测量平差是观测数据处理的一门应用数学课，即使经典平差部分，一些理论和方法也较难理解和掌握。需要多练习、多思考，学以致用，理论联系实际，才能更好地领悟其概念与方法。

第 2 章　误差及其定量指标

受观测者、测量仪器、外界环境等方面的影响，观测值不可避免地存在着测量误差。本章主要介绍测量误差的基本知识，描述单个观测量重复观测时的误差及其定量指标。论述测量误差产生的原因、测量误差分类、偶然误差的特性、衡量偶然误差的定量指标，在此基础上，阐述精度的理论定义和理论计算公式。

2.1　观 测 误 差

2.1.1　观测条件与观测误差

对某一客观存在的量进行多次观测，例如，为求某段距离，往返丈量若干次；或为求某角度，重复观测几测回。其多次测量结果之间总是存在着差异，这说明观测值中不可避免地存在着测量误差。

产生测量误差的原因很多，概括起来有以下三方面。

1）仪器的原因

任何仪器只具有一定限度的精密度，使观测值的精密度受到限制。例如，在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时，就难以保证估读的毫米值完全准确。同时，仪器因装配、搬运、磕碰等存在着自身的误差，如水准仪的视准轴不平行于水准管轴，就会使观测结果产生误差。

2）观测者的原因

由于观测者的视觉、听觉等感观的鉴别能力有一定的局限，所以在仪器的安置、使用中都会产生误差，如整平误差、照准误差、读数误差等。同时，观测者的工作态度、技术水平和观测时的身体状况等也对观测结果的质量有直接影响。

3）外界环境的影响

测量工作都是在一定的外界环境条件下进行的，如温度、风力、大气折光等因素，这些因素的差异和变化都会直接对观测结果产生影响，必然使观测结果产生误差。

人、仪器、外界环境是测量工作的观测条件（即测量工作三要素），受这些条件的影响，观测结果总会产生这样或那样的观测误差，即在测量工作中观测误差是不可避免的。测量外业工作的责任就是要在一定的观测条件下，确保观测成果具有较高的质量，将观测误差减少或控制在允许的限度内。

按测量时所处的观测条件，观测可分为等精度观测和不等精度观测。在相同的观测条件下，即用同一精度等级的仪器、设备，用相同的方法和在相同的外界条件下，由具有大致相同技术水平的人所进行的观测称为等精度观测，其观测值称为等精度观测值；反之，则称为不等精度观测，其观测值称为不等精度观测值。例如，两人用 DJ6 经纬仪各自测得的一测回

水平角度属于等精度观测值；若一人用 DJ2 经纬仪、一人用 DJ6 经纬仪测得的一测回水平角度，或都用 DJ6 经纬仪但一人测二测回、一人测四测回，各自所得到的均值则属于不等精度观测值。

例 2-1-1　某同学在某时间段内用某台仪器测量 AB 间水平距离五次，分别测得 110.010m、110.005m、110.000m、109.995m、109.990m。讨论：此五次数据中哪个数据的精度最高？

提示：五次数据的精度同样高。某同学、某台仪器、某时间段说明人、仪器、外界环境相同，为等精度观测。若测量过程中换不同精度仪器，则为不等精度观测。

2.1.2　观测误差分类及其处理

测量误差按其对观测结果影响性质的不同，分为系统误差、偶然误差和粗差三类。

1）系统误差

在相同的观测条件下，对某量进行的一系列观测中，数值大小和正负符号固定不变或按一定规律变化的误差，称为系统误差。

例如，用名义长度为 30.000m，而实际长度为 30.006m 的钢卷尺量距，每量一尺段就有 0.006m 的误差，其量距误差的影响符号不变，且与所量距离的长度成正比。

系统误差具有累积性，它随着单一观测值观测次数的增多而积累，系统误差的存在必将给观测成果带来系统的偏差，反映了观测结果的准确度。准确度是指观测值对真值的偏离程度或接近程度。

为了提高观测成果的准确度，首先要根据数理统计的原理和方法判断一组观测值中是否含有系统误差，其大小是否在允许的范围以内。然后采用适当的措施消除或减弱系统误差的影响，通常有以下三种处理方法。

（1）检定系统误差的大小，对观测值加以改正。例如，用钢尺量距时，通过对钢尺的检定求出尺长改正数，对观测结果加尺长改正数和温度变化改正数，来消除尺长误差和温度变化引起的误差这两种系统误差。

（2）采用对称观测的方法，使系统误差在观测值中以相反的符号出现，加以抵消。例如，水准测量时，采用前、后视距相等的对称观测，以消除视准轴不平行于水准管轴所引起的系统误差；经纬仪测角时，用盘左、盘右两个观测值取中数的方法可以消除视准轴误差、竖盘指标差等系统误差的影响。

（3）检校仪器，将仪器存在的系统误差降低到最低限度，或限制在允许的范围内，以减弱其对观测结果的影响。例如，经纬仪照准部水准管轴不垂直于竖轴的误差对水平角的影响，可通过精确检校仪器并在观测中仔细整平的方法，来减弱其影响。

系统误差的计算和消除，取决于人们对它的了解程度。用不同的测量仪器和测量方法，系统误差的存在形式不同，消除系统误差的方法也不同。必须根据具体情况进行检验、定位和分析研究，采取不同措施，使系统误差减小到可以忽略不计的程度。

系统误差的处理还有一种方法：在平差计算中考虑系统误差的存在，并将其当作附加参数纳入平差函数模型中，一并解算。

2）偶然误差

在相同的观测条件下对某量进行一系列观测，单个误差的出现没有一定的规律性，其数值的大小和符号都不固定，表现出偶然性，这种误差称为偶然误差，又称为随机误差。

例如，用经纬仪测角时，就单一观测值而言，受照准误差、读数误差、外界条件变化所

引起的误差、仪器自身不完善引起的误差等的综合影响，测角误差的大小和正负号都不能预知，具有偶然性，所以测角误差属于偶然误差。

偶然误差反映了观测结果的精密度。精密度（又称精度）是指在同一观测条件下，用同一观测方法对某量多次观测时，各观测值之间相互的离散程度。

3）粗差

由于观测者使用仪器不正确或疏忽大意，如测错、读错、听错、算错等造成的错误，或外界条件发生意外的显著变动引起的差错称粗差。粗差的数值往往偏大，使观测结果显著偏离真值，因此，一旦发现含有粗差的观测值，应将其从观测成果中剔除出去。

一般情况下，只要严格遵守测量规范，工作中仔细谨慎，并对观测结果作必要的检核，粗差是可以发现和避免的。但在使用现今的高新测量技术，如全球导航卫星系统（GNSS）、地理信息系统（GIS）、遥感（RS）及其他高精度的自动化数据采集中，经常使粗差混入信息之中，识别粗差源并不是用简单方法就可以达到目的的，需要通过数据处理方法进行识别和消除其影响。

2.1.3 平差中三类误差的地位

在观测过程中，系统误差和偶然误差往往是同时存在的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差呈现出系统的性质；反之，呈现出偶然的性质。因此，对一组剔除了粗差的观测值，首先应寻找、判断和排除系统误差，或将其控制在允许的范围内。然后根据偶然误差的特性对该组观测值进行数学处理，求出最接近未知量真值的估值，称为最或是值。同时，评定观测结果质量的优劣，即评定精度。这项工作在测量上称为测量平差，简称平差。

本教程主要讨论偶然误差及其平差方法，即总是假定：含粗差的观测值已被消除，含系统误差的观测值已经经过适当的改正。因此，在观测误差中，仅含有偶然误差，或者偶然误差占主导地位。

2.1.4 几个预备知识

下面介绍随机变量的数字特征：数学期望、方差、协方差、相关系数。

1）数学期望

随机变量 X 的数学期望定义为随机变量取值的概率平均值，记作 $E(X)$。

如果 X 是离散型随机变量，其可能取值为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，且 $X=x_i$ 的概率 $P(X=x_i)=p_i$，则

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i \tag{2-1-1}$$

如果 X 是连续型随机变量，其分布密度为 $f(x)$，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x \tag{2-1-2}$$

数学期望有如下性质，即运算规则如下。

设 C 为一常数，则

$$E(C)=C \tag{2-1-3}$$

这一性质是很明显的，即任意常数的理论平均值仍为该常数本身。

设 C 为一常数，X 为一随机变量，则

$$E(CX)=CE(X) \tag{2-1-4}$$

因为

$$E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cxf(x)\,\mathrm{d}x=C\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=CE(X)$$

设有随机变量 X 和 Y，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{2-1-5}$$

因为

$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}y\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)\,\mathrm{d}y\\&=E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

式中，$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 和 $f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 分别为 X 和 Y 的边界分布密度，不论 X 、Y 是否相互独立，上式均成立。推广之，则有

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) \tag{2-1-6}$$

若随机变量 X 、Y 相互独立，则

$$E(X,Y)=E(X)E(Y) \tag{2-1-7}$$

因为当 X 、Y 相互独立时，$f(X,Y)=f_1(X)f_2(Y)$，故有

$$E(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)\,\mathrm{d}y=E(X)E(Y)$$

推广之，如有随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两相互独立，则有

$$E(X_1,X_2,\cdots,X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n) \tag{2-1-8}$$

以上数学期望运算规则也称为数学期望传播规律，在以后的公式推导中常要用到。

2）*方差*

随机变量 X 的方差记作 $D(X)$，其定义为

$$D(X)=E\left[X-E(X)\right]^2 \tag{2-1-9}$$

式中，$E(X)$ 为 X 的数学期望。

如果 X 是离散型随机变量，其可能取值为 $x_i(i=1,2,\cdots)$，且 $X=x_i$ 的概率 $P(X=x_i)=p_i$，则

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[x-E(X)\right]^2p_i \tag{2-1-10}$$

如果 X 是连续型随机变量，其分布密度为 $f(x)$，则

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2-1-11}$$

方差的运算有如下性质。

设 C 为一常数：

$$D(C)=0 \tag{2-1-12}$$

此性质可由方差定义式（2-1-9）直接得出。

设 C 为一常数，X 为一随机变量，则

$$D(CX)=C^2D(X) \tag{2-1-13}$$

这是因为

$$D(CX)=E\left[CX-E(CX)\right]^2=C^2E\left[X-E(X)\right]^2=C^2D(X)$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2 \tag{2-1-14}$$

这是因为

$$\begin{aligned}D(X)&=E\left[X-E(X)\right]^2=E\left[X^2-2XE(X)+E^2(X)\right]\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+E^2(X)=E(X^2)-E^2(X)\end{aligned}$$

若随机变量 X 和 Y 相互独立，则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y) \tag{2-1-15}$$

这是因为

$$\begin{aligned}D(X+Y)&=E\left[X+Y-E(X+Y)\right]^2\\&=E\left\{\left[X-E(X)\right]+\left[Y-E(Y)\right]\right\}^2\\&=D(X)+2\sigma_{XY}+D(Y)\end{aligned}$$

式中，$\sigma_{XY}=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$，由下面的式（2-1-17）定义；当 X 和 Y 相互独立时，$\sigma_{XY}=0$，故式（2-1-15）成立。

推广之，若有随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两相互独立，则有

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n) \tag{2-1-16}$$

3）协方差

协方差用于描述两随机变量 X、Y 的相关程度，记作 σ_{XY}，定义为

$$\sigma_{XY}=E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\} \tag{2-1-17}$$

当 X 和 Y 的协方差 $\sigma_{XY}=0$ 时，表示这两个随机变量互不相关；如果 $\sigma_{XY}\neq 0$，则表示它们是相关的。

4）相关系数

两随机变量 X、Y 的相关性还可用相关系数来描述，相关系数定义为

$$\rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{2-1-18}$$

式中，$\sqrt{D(X)}=\sigma_X$ 和 $\sqrt{D(Y)}=\sigma_Y$ 分别称为随机变量 X 和 Y 的标准差。相关系数具有如下性质：

$$-1\leqslant\rho\leqslant 1$$

2.2 偶然误差

2.2.1 偶然误差的分析实验

测量中的被观测量，客观上都存在着一个真实值，简称真值。对该量进行观测得到观测值，真值与观测值之差，称为真误差。设某一量的真值为 $\tilde{L}$，对此量进行 n 次观测，得到的观测值（不包含系统误差）为 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，在每次观测中发生的偶然误差（又称真误差）为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，则定义：