浙江省普通高校“十三五”新形态教材

# 概率统计教程

## GAILü TONGJI JIAOCHENG

主编　邹海雷　谢强军

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江省普通高校“十三五”新形态教材

# 概率统计教程

## GAILü TONGJI JIAOCHENG

主编　邹海雷　谢强军



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率统计教程 / 邹海雷,谢强军主编. —杭州:
浙江大学出版社,2019.6
ISBN 978-7-308-19236-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①邹…②谢… Ⅲ.①概率统计—高
等学校—教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 125209 号

**概率统计教程**

邹海雷　谢强军　主编

---

**责任编辑**　王　波
**责任校对**　徐　霞
**封面设计**　周　灵
**出版发行**　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
**排　　版**　浙江时代出版服务有限公司
**印　　刷**　浙江省良渚印刷厂
**开　　本**　787mm×1092mm　1/16
**印　　张**　11
**字　　数**　234 千
**版 印 次**　2019 年 6 月第 1 版　2019 年 6 月第 1 次印刷
**书　　号**　ISBN 978-7-308-19236-1
**定　　价**　34.00 元

---

# 前 言

“概率论与数理统计”是理、工、经管类本科生必修的一门重要的基础课，也是工学、经济学硕士研究生入学考试的一门必考科目。概率论是一门研究随机现象统计规律性数量关系的数学学科，而数理统计是研究如何有效地收集、整理和分析受随机影响的数据，并做出统计推断、预测或者决策的一门学科，它是以概率论为基础的。概率统计的应用广泛，几乎遍及所有科学技术领域，是各学科分析与解决问题的工具。

本教材是参照教育部教学指导委员会颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求(修改稿)》和教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写的，突出了对这两个文本所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍与训练，内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求。本教材的主要特点是：

(1)通俗易懂，尽量使用较少的数学知识(只限于微积分和少量代数知识)，避免过于复杂的数学化论证，注重思想的剖析，保持叙述的严谨性。

(2)每节内容中都配有微课二维码，微课以知识点分类，每节课大约 10 分钟，为便于读者理解，教师全程手写板书，内容精要，重点突出。

(3)考虑到概率统计应用的广泛性，特别在书中相应章节插入了很多案例分析的二维码，主要介绍概率统计在工业、农业、工程、管理、经济、医药、商业等众多领域的经典案例，以帮助读者从不同的侧面理解概念，了解本课程的实际应用。

(4)考虑到越来越多的学生会参加考研，所以我们特意在附录部分汇集了最近几年的硕士研究生招生考试中的概率统计试题，并给出了答案，作为补充的课外提高练习，同时也为有志进一步学习的读者提供参考。

全书共分 8 章，其中第 1 章“随机事件及其概率”、第 2 章“随机变量及其分布”、第 3 章“多维随机变量及其分布”、第 4 章“随机变量的数字特征”、第 5 章“大数定理与中心极限定理”为概率论的内容；第 6 章“数理统计基础”、第 7 章“参数估计”、第 8 章“假设检验”为数理统计的内容。全书由邹海雷执笔，谢强军负责策划及统稿，许如星负责全书习题以及初稿勘误工作，最后何满喜教授审阅了全书。

在本书编写过程中，有关专家、学者提出了宝贵的意见，其他同行及浙江大学出版社编辑人员也提供了大力支持，在此一并表示感谢。

我们知道，一本便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的打磨和广大读者的支持与帮助。限于编者的水平和精力，本书难免存在不足之处，欢迎广大读者提出批评和建议。

# 目 录

# 第1章　随机事件及其概率

## 1.1　随机事件

微课1：样本空间和事件

### 1.1.1　随机试验与样本空间

在自然界和人类社会生活中，人们观察到的现象大致可以分为两种类型。一类是事前可以预知结果的，我们称之为确定性现象。比如：向上抛起一支粉笔，几秒之后它必将落在地上；每天的太阳总是从东边升起，西边落下；在标准大气压下，水加热到100℃时必定沸腾；等等。

另一类现象则是事前无法预知结果的，即在相同条件下重复进行试验时，每次所得到的结果未必相同。比如：掷一枚均匀的硬币，落地后可能正面朝上，也可能反面朝上；汽车行驶至路口时，可能遇到红灯，也可能遇到绿灯，还可能是黄灯；从一大批产品中抽取一件产品，这件产品可能是正品，也可能是次品；等等。虽然，这类现象在一定条件下，可能出现这样或那样的结果，且在每次试验前都无法预知到底会出现哪个结果，但是，人们经过长期、反复的观察和实践，发现这类现象在大量重复试验和观察下，它们的结果却呈现出某种规律性。概率论就是研究和揭示随机现象规律性的一门数学学科。

在一定条件下，对自然与社会现象进行的观察或实验称为试验，在概率论中，把满足以下条件的试验称为随机试验(random experiment)：

(1)试验在相同条件下是可重复的；

(2)试验的全部可能结果不止一个，且都是事先可以知道的；

(3)每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果，至于是哪一个结果则事前无法预知。

为简单计，今后凡是随机试验简称试验，并记之以英文字母 $E$，称试验的每一个结果为样本点，并称全体样本点的集合为试验的样本空间，样本点与样本空间分别用希腊字母 $\omega$ 和 $\Omega$ 表示。

**例 1** 设试验 $E_1$:将一枚硬币连掷两次,观察两次中出现正面、反面的情况,此试验有 4 种结果,即 4 个样本点,样本空间是

$$\Omega_1 = \{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$$

其中样本点(正,正)表示第一、二次均掷出正面,其余类推。

**例 2** 设试验 $E_2$:掷一颗骰子,观察出现的点数,样本空间为

$$\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

**例 3** 观察某个城市某个月内交通事故发生的次数,其样本空间为

$$\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots\}$$

**例 4** 设试验 $E_4$ 为一台电视机的寿命(从开始使用到第一次维修的时间),则其样本空间为

$$\Omega_4 = \{\omega_x \mid x \geqslant 0\}$$

**例 5** 设试验 $E_5$:观察并记录某市每日中午 12 点时的气温,假设该市这一时刻的气温不会低于 4℃,也不会高于 35℃,则样本空间为

$$\Omega_5 = \{\omega_x \mid 4 \leqslant x \leqslant 35\}$$

**例 6** 设试验 $E_6$:观察顾客在超市购买的商品数,则样本空间为

$$\Omega_6 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$$

其中 $\omega_i$ 表示该顾客在超市购买的商品数。

### 1.1.2 随机事件

对于自然界中存在的更广泛的随机现象,我们更感兴趣的是在某次随机试验中到底会出现哪个可能结果。我们把这些结果称为随机事件,简称事件,习惯上,用 $A$、$B$、$C$、… 表示。如果在每次试验的结果中,某事件一定发生,则这一事件叫作必然事件,通常用 $\Omega$ 表示;相反地,如果某事件一定不发生,则叫作不可能事件,通常用 $\varnothing$ 表示。

**例 7** 抛一颗骰子,观察出现的点数。

显然,样本空间 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

事件 $A$:"出现奇数点";事件 $B$:"出现偶数点";事件 $C$:"出现的点数不超过 6";事件 $D$:"出现 7 点",等等,都是随机事件。

关于随机事件与样本空间的关系,需要指出以下两点:

(1) 任何事件都是样本空间的子集,如上例中的事件 $A$、$B$ 等。特别地,必然事件就是样本空间,如事件 $C$;而不可能事件就是空集,如事件 $D$。

(2) 事件 $A$ 发生当且仅当 $A$ 中某个样本点发生。如上例中,只要出现 1、3、5 中的一个样本点,事件 $A$ 就发生。

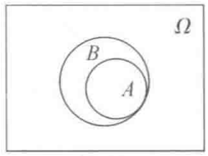
### 1.1.3 随机事件的关系及运算

既然事件是样本空间的某个子集,所以集合论中的包含、相等、并、交等概念以及集合的

运算对事件都应适用。那么这些关系与运算对事件而言相应赋予怎样的含义呢？

1. 事件的包含

若事件 $A$ 是事件 $B$ 的子集，则称 $A$ 包含于 $B$，或称 $B$ 包含 $A$，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$，即是说，事件 $A$ 发生必定导致事件 $B$ 发生。如图 1-1 所示。特别地，若事件 $A$、$B$ 互相包含，则称两事件 $A$、$B$ 相等，记作 $A = B$。



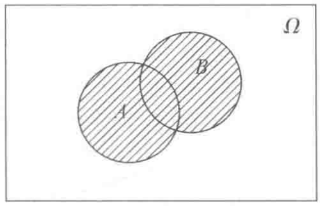
$B \supset A$

图 1-1

2. 事件的和（并）

“两事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一事件发生”，这一事件叫作事件 $A$ 与事件 $B$ 的和（并），记作 $A \cup B$。

$A \cup B$ 是由 $A$ 或 $B$ 的所有样本点组成的集合；$A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$，如图 1-2 所示。



$A \cup B$

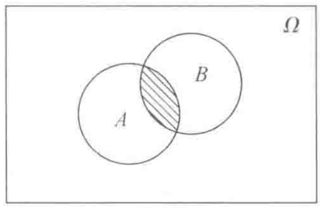
图 1-2

类似地，“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”，这一事件称为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件（并），记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$。

**例 8** 有两门火炮同时向一个目标各射击一次，设 $A$ 表示甲火炮击中目标，$B$ 表示乙火炮击中目标，$C$ 表示目标被击中，则 $C$ 意味着事件 $A$ 或 $B$ 至少有一个发生，即 $C = A \cup B$。

3. 事件的积（交）

“事件 $A$ 与 $B$ 同时发生”，这一事件称事件 $A$ 与事件 $B$ 的积事件（或交事件），记作 $A \cap B$ 或 $AB$。



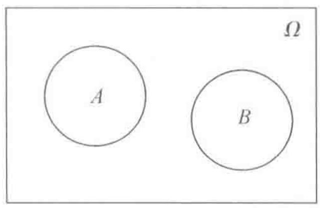
$A \cap B$

图 1-3

$AB$ 是由 $A$ 与 $B$ 的所有公共样本点组成的集合，如图 1-3 所示。类似地，“$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”，这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件（交事件），记作 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n} A_i$。

4. 互不相容事件（互斥事件）

如果 $AB = \varnothing$，即 $A$ 与 $B$ 不同时发生，则称 $A$ 与 $B$ 互斥（也称互不相容），如图 1-4 所示。

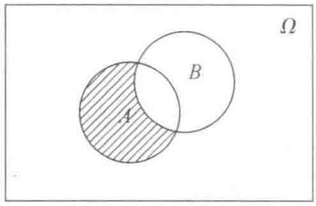


$AB=\phi$

图 1-4

5. 事件的差

“事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生”，这一事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差事件，记作 $A - B$。$A - B$ 是由属于 $A$ 但不属于 $B$ 的样本点组成的集合，如图 1-5 所示。




A-B

图 1-5

6. 对立事件(逆事件)

如果每次试验中,事件 $A$ 或者事件 $B$ 都有一个且只有一个发生,则称事件 $A$、$B$ 对立(或互逆),其中的一个事件是另一个事件的对立事件,记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$。显然,$\overline{\overline{A}}=A$,$A\overline{A}=\varnothing$,$A\cup\overline{A}=\Omega$。

7. 完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$,则称 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。

根据以上定义,容易得到以下事件之间的运算规律:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A;AB=BA$ (1.1)

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);(AB)C=A(BC)$ (1.2)

(3) 分配律 $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC);A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$ (1.3)

(4) 摩根律 $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B};\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$ (1.4)

(5) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$ (1.5)

**例 9** 掷一颗骰子,观察点数,令 $A$ 表示掷出奇数点,$B$ 表示掷出点数不超过 3,$C$ 表示掷出点数大于 2,$D$ 表示掷出 5 点,则

$$A=\{1,3,5\},B=\{1,2,3\},C=\{3,4,5,6\},D=\{5\}$$

于是 $$A\cup B=\{1,2,3,5\},B\cup C=\Omega,AB=\{1,3\},BD=\varnothing$$

$$\overline{A}=\{2,4,6\},\overline{A}C=\{4,6\},A-B=\{5\},B-A=\{2\}$$

**例 10** 某人连续购买体育彩票,令事件 $A$、$B$、$C$ 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖,试用 $A$、$B$、$C$ 及其运算表示下列事件:(1) 第三次未中奖;(2) 第三次才中奖;(3) 恰有一次中奖;(4) 至少有一次中奖;(5) 不止一次中奖;(6) 至多中奖两次。

**解** (1)$\overline{C}$ (2)$\overline{A}\,\overline{B}C$ (3)$\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}$ (4)$A\cup B\cup C$

(5)$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$ (6)$\overline{ABC}$

## 1.2 概　　率

微课 2:概率的定义及性质

### 1.2.1 频率和概率的统计定义

设随机事件 $A$ 在 $n$ 次试验中发生了 $m$ 次,则比值 $\dfrac{m}{n}$ 叫作随机事件 $A$ 发生的频率,记作 $W(A)$,用公式表示如下:

$$W(A) = \frac{m}{n} \tag{1.6}$$

显然,任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数,即 $0 \leqslant W(A) \leqslant 1$。对于必然事件,在任何试验序列中,总有 $m = n$,所以必然事件的频率恒等于 1,即 $W(\Omega) = 1$。

同理:$W(\varnothing) = 0$。

频率除了具有以上几个性质外,还有一个非常重要的性质,那就是频率具有稳定性。即是说,当一个随机试验的次数达到充分大时,事件的频率就会在一个固定的常数附近波动。

例如:我们来看表 1-1 所示的实验结果,表中 $n$ 表示抛硬币的次数,$m$ 表示正面向上的次数,$W = \frac{m}{n}$ 表示正面向上的频率。

**表 1-1　抛硬币的实验结果**

| 试 验 者 | 抛掷次数 $n$ | 出现正面的次数 $m$ | 出现正面的频率 $m/n$ |
|---|---|---|---|
| 德摩根 | 2048 | 1061 | 0.518 |
| 蒲　丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |
| 维　尼 | 30000 | 14994 | 0.4998 |

从表 1-1 中可以看出,频率具有一种随机波动性。当抛掷次数 $n$ 较小时,频率随机波动的幅度较大。但是,随着抛掷次数 $n$ 的不断增大,频率就会呈现出稳定性。我们看到,试验中的频率大致在 0.5 附近波动,且随着 $n$ 的增大逐渐稳定于常数 0.5。不仅仅是这个试验,我们在观察任何随机事件时,都会发现这样一个客观规律,事件的频率会与一个常数对应。这种"频率稳定性"就是通常所说的统计规律性,而所谓事件发生的可能性的大小,就是这个"频率的稳定值"。

### 1.2.2　概率的定义

既然随机事件的频率在试验次数 $n$ 充分大时会稳定于一个确定的常数,我们就可以用这个常数的大小来刻画事件发生的可能性大小,并把这个介于 0 到 1 之间的数称为随机事件 $A$ 的概率,记作 $P(A)$。概率的这个通俗的定义通常称为概率的统计定义。

概率的这个统计定义的优点是非常直观,有助于我们更好地理解概率这个概念。当实验次数充分大时,随机事件 $A$ 的频率 $W(A)$ 就会在它的概率 $P(A)$ 的附近波动。在以上抛硬币试验中,我们就可以认为出现正面向上的概率为 0.5。

在很多场合,求一件具体事件的概率是复杂的,甚至是无法完成的。只有在一些特殊条件下,才得以求出具体事件的概率大小。而概率的统计定义就很好地解决了这个问题,我们

可以用 $n$ 较大时事件的频率作为该事件的概率的近似值，即当试验次数 $n$ 充分大时，有

$$P(A) \approx W(A) = \frac{m}{n} \tag{1.7}$$

由概率的统计定义，我们可以得到概率的公理化定义。

随机试验的样本空间为$\Omega$，对随机事件$A$赋予一个实数$P(A)$，若满足下列三个公理，则称 $P(A)$ 为 $A$ 的概率。

(1) 非负性：$P(A) \geqslant 0$ (1.8)

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$ (1.9)

(3) 可加性：$A$ 与 $B$ 互不相容，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (1.10)

以上三条不难从频率的性质中引申得到。

概率的公理化定义最早是由苏联伟大数学家柯尔莫哥洛夫在众多前人的工作基础上，综合已有的大量成果，于 19 世纪 30 年代正式提出的。概率的公理化结构，明确了概率的基本概念，使得概率成为一门真正严谨的数学分支，概率论也由此得到了突飞猛进的发展。公理中的三条，也被称为概率的基本性质，其他性质都将从这三条基本性质推导得到。

### 1.2.3 概率的性质

由概率的定义，我们可以得到概率的下列性质。

(1) $P(\varnothing) = 0$ (1.11)

**证明** $\Omega = \Omega \cup \varnothing$，且 $\Omega\varnothing = \varnothing$，即 $\Omega$ 与 $\varnothing$ 互不相容，由公理(1.9)(1.10) 可得：

$$1 = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 + P(\varnothing)\text{，所以 } P(\varnothing) = 0$$

由公理(1.10)，可得性质(2)。

(2) 有限个互不相容事件的和概率等于这些事件的概率的和：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.12}$$

由此可得下面的推论：

**推论 1** 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备的事件组，则这些事件的概率的和等于 1，即

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \tag{1.13}$$

**推论 2** 对立事件的概率的和等于 1，即

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{1.14}$$

**推论 3** 若 $B \supset A$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$；$P(A - B) = 0$ (1.15)

(3) 对任意两个随机事件 $A$、$B$，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.16}$$

**证明** 因为 $A \cup B = A \cup \overline{A}B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B)$$

又 $\quad B = AB + \overline{A}B$

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) \qquad P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$$

所以 $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

**推论 4** $\quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) -$

$$P(AC) - P(BC) + P(ABC) \tag{1.17}$$

**推论 5** $\quad P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1.18}$$

**例 1** 袋中有 20 个球，其中 15 个白球，5 个黑球，从中任取 3 个，求至少取到一个白球的概率。

**解** 设 $A$ 表示至少取到一个白球，$A_i$ 表示刚好取到 $i$ 个白球($i = 0,1,2,3$)，则

方法 1（利用互不相容和的概率等于概率之和）：

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$= \frac{C_{15}^1 C_5^2}{C_{20}^3} + \frac{C_{15}^2 C_5^1}{C_{20}^3} + \frac{C_{15}^3 C_5^0}{C_{20}^3} = 0.1316 + 0.4605 + 0.3991 = 0.9912$$

方法 2（利用对立事件的概率关系）：

$A$ 的对立事件表示“没有一个是白球”，即 $\overline{A} = A_0$，所以

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = 0.9912$$

**例 2** 已知某校的学生有 20% 戴项链，30% 戴戒指，10% 既戴项链又戴戒指，现从学校中任取一名学生，求该学生在项链和戒指中至少佩戴一件的概率。

**解** 设 $A$ 表示随机取到的学生佩戴项链，$B$ 表示佩戴戒指，$C$ 表示所求事件的概率，则

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= 20\% + 30\% - 10\% = 40\%$$

**例 3** 设 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$，就下列三种情况：(1) $A$ 与 $B$ 互不相容；(2) $A \subset B$；(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$，求 $P(B - A)$。

**解** 由减法公式：$P(B - A) = P(B) - P(AB)$

(1) 由于 $A$ 与 $B$ 互不相容，即 $AB = \varnothing$，故 $P(AB) = 0$，所以 $P(B - A) = P(B) = \frac{1}{2}$。

(2) $A \subset B$，故 $AB = A$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A) = \frac{1}{4}$。

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$，则 $P(B - A) = P(B) - P(AB) = \frac{3}{8}$。

## 1.3 古典概型与几何概型

### 1.3.1 古典概型

**例 1** 掷一枚均匀的硬币，只有“正面向上”或“反面向上”两种结果，而且这两种结果出现的可能性相同，均为 1/2。

**例 2** 从 100 件同类型的产品中，任意抽取 1 件进行质量检查，则共有 100 种抽法，且每种出现的可能性大小相同，均是 1%。

微课 3：
古典概型
（一）投球问题

这两个试验的共同特点是：

(1) 每次试验中，所有可能发生的结果只有有限个，即样本空间 $\Omega$ 是个有限集，即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

微课 4：
古典概型
（二）抽球问题

(2) 每次试验中，每一种可能结果发生的可能性相同，即

$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n)$，其中 $A_i = \{\omega_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$。

满足以上这两个条件的数学模型称为古典概型。

设试验结果共 $n$ 个基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \cdots, \{\omega_n\}$，而且这些事件的发生具有相同的可能性，而事件 $A$ 由其中的 $m$ 个基本事件组成，则事件 $A$ 的概率

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数 } m}{\text{试验的基本事件总数 } n} = \frac{m}{n} \tag{1.19}$$

在这里显然 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \cdots, \{\omega_n\}$ 构成完备事件组，用这种方法算得的概率称为古典概率，古典概率的计算主要基于排列与组合。

**例 3** 掷一颗均匀骰子，设 $A$ 表示掷出的结果为“偶数点”，求 $P(A)$。

**解** 样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A = \{2, 4, 6\}$

所以

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**例 4** 设在 100 件产品中，有 4 件次品，其余均为正品，求：

(1) 这批产品的次品率；

(2) 任取 3 件，全是正品的概率；

(3) 任取 3 件，恰好有 2 件正品的概率。

**解** 设$A$表示这批产品的次品率，$A_0$表示任取3件，全是正品，$A_1$表示任取3件，恰好有2件正品。

(1) 基本事件总数$n_1=100$，$A$包含的基本事件数$m_A=4$，故

$$P(A)=\frac{4}{100}=0.04$$

(2) 基本事件总数$n_2=C_{100}^3$，$A_0$包含的基本事件数为$C_{96}^3$，故

$$P(A_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\approx 0.8836$$

(3) 基本事件总数仍为$C_{100}^3$，事件$A_1$包含的基本事件数为$C_{96}^2C_4^1$，故

$$P(A_1)=\frac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}\approx 0.1128$$

**例5(盒子模型)** 将$n$个球随机地放入$N(n\leqslant N)$个盒子中，若盒子的容量无限制，求每个盒子至多有一球的概率。

**解** 每个球都可以放入到$N$个盒子中的任意一个，故共有$N^n$种不同的放法，且每种放法都是等可能的，而“每个盒子中至多有一个球”(记为事件$A$)共有$N(N-1)\cdots(N-n+1)$种放法，因此，所求概率为

$$P(A)=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}$$

此模型的应用很多，比如，考虑“$n(n\leqslant 365)$个人中至少有两个人生日相同”的概率。可以通过求其对立事件“$n$人中生日各不相同”的概率，并将人看成球，365天看成365个盒子，从而计算得到。

**例6** 袋内有$a$个白球与$b$个黑球。每次从袋中任取一球，取出的球不再放回去。接连取$k$个球$(k\leqslant a+b)$，求第$k$次取得白球的概率。

**解** 由于考虑到取球的顺序，这相当于从$a+b$个球中任取$k$个球的选排列，所以基本事件的总数为

$$A_{a+b}^k=(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$$

设事件$B_k$表示第$k$次取得白球，则因为第$k$次取得的白球可以是$a$个白球中的任一个，有$a$种取法；其余$k-1$个球可在前$k-1$次中顺次地从$a+b-1$个球中任意取出，有$A_{a+b-1}^{k-1}$种取法。所以，事件$B_k$所包含的基本事件数为

$$A_{a+b-1}^{k-1}\cdot a=(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)\cdot a$$

案例1：免费抽奖的性质

因此，所求概率为

$$P(B_k)=\frac{(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)\cdot a}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}$$

可见，第$k$次摸到白球的概率与$k$无关，这个有趣的结果具有很强的现实意义。例如，在实际生活中，我们经常用“抽签”的方法来解决一些难以分配的、容易出现争议的问题，本例