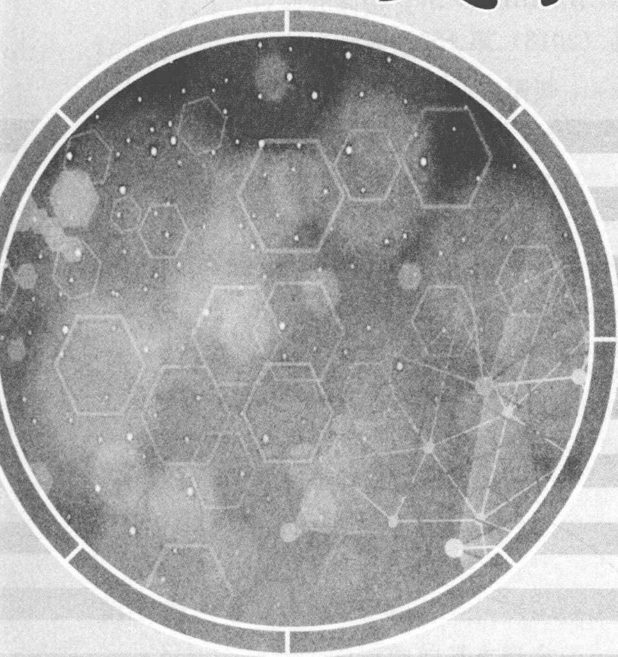
线性代数

罗海滨◆主编

辽宁大学出版社
LIAONING UNIVERSITY PRESS

线性代数

罗海滨◆主编



辽宁大学出版社
LIAONING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/罗海滨主编. 一沈阳：辽宁大学出版社，2019.1

ISBN 978-7-5610-9371-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①罗… Ⅲ.①线性代数一高等学校一教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 159982 号

线性代数

XIANXINGDAISHU

出 版 者：辽宁大学出版社有限责任公司

（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　　邮政编码：110036）

印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂

发 行 者：辽宁大学出版社有限责任公司

幅面尺寸：170mm×240mm

印　　张：13

字　　数：200 千字

出版时间：2019 年 1 月第 1 版

印刷时间：2019 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑：祝恩民

封面设计：徐澄玥

责任校对：齐　悦

书　　号：ISBN 978-7-5610-9371-9

定　　价：30.00 元

联系电话：024-86864613

邮购热线：024-86830665

网　　址：http://press.lnu.edu.cn

电子邮件：lnupress@vip.163.com

目 录

第 1 章

行列式

行列式是线性代数中的一个基本工具，也是其他数学分支中的一个重要工具。本章介绍行列式的概念、性质、计算方法及在解线性方程组中的应用。

§1.1　行列式的定义

一、排列及其逆序数

自然数 $1,2,\cdots,n$ 按某种次序排成一列，称为一个 n 阶排列，记为 $j_1j_2\cdots j_n$。例如 132、3214、12345 分别是 3 阶、4 阶、5 阶排列。由 1,2,3 这三个数组成的所有的 3 阶排列有：123、132、213、231、312、321 共 $6=3!$ 种不同的情况，每一种情况就是一个排列。一般地，一个 n 阶排列有 $n!$ 个。如果 $1,2,3,\cdots,n$，共 n 个数按照从小到大的自然顺序排列成 $1\ 2\ 3\cdots n$，我们说这是一个**标准排列**。

在一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果某个较大的数 j_t 排在了较小的数 j_s 的前面，称 j_t 与 j_s 构成了一个**逆序**。例如在排列 3214 中，3 与 2、3 与 1、2 与 1 都构成了逆序。一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中所有逆序的总和叫作这个**排列的逆序数**，记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。例如 $\tau(3214)=3$，$\tau(n\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{(n-1)n}{2}$。

逆序数是奇数的排列叫作**奇排列**，逆序数是偶数的排列叫作**偶排列**。例如由 $\tau(312)=2$ 知 312 是偶排列，由 $\tau(321)=3$ 知 321 是奇排列。容易看到 1,2,3 这 3 个数所构成的 6 个排列中，有 3 个奇排列和 3 个偶排列(即奇排列和偶排列各占一半)。

在一个排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，将 j_s 与 j_t 两个数的位置对调，得到另一个排列 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，这样的变换称为一个**对换**。

定理 1.1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

证　首先讨论两个元素处于相邻位置的情形：

设排列为 $j_1j_2\cdots j_sj_t\cdots j_{n-1}j_n$，对换 j_s 与 j_t 得到新排列 $j_1j_2\cdots j_tj_s\cdots j_{n-1}j_n$。

显然,除 j_s 与 j_t 外其余元素的逆序数没有改变,只有 j_s 与 j_t 的逆序数发生了变化,当 $j_s<j_t$ 时对换后的逆序数增加了一个;而当 $j_s>j_t$ 时对换后的逆序数减少了一个,所以排列 $j_1j_2\cdots j_sj_t\cdots j_{n-1}j_n$ 与排列 $j_1j_2\cdots j_tj_s\cdots j_{n-1}j_n$ 的奇偶性不同。

再讨论一般情况:排列为 $j_1j_2\cdots aj_{s+1}j_{s+2}\cdots j_{s+t}b\cdots j_{n-1}j_n$,对换 a,b 得新排列 $j_1j_2\cdots bj_{s+1}j_{s+2}\cdots j_{s+t}a\cdots j_{n-1}j_n$,此新排列可以通过一系列相邻两个元素的对换来实现,即 $j_1j_2\cdots aj_{s+1}j_{s+2}\cdots j_{s+t}b\cdots j_{n-1}j_n$ 经 t 次对换得到$j_1j_2\cdots j_{s+1}j_{s+2}\cdots j_{s+t}ab\cdots j_{n-1}j_n$,此排列再经 $t+1$ 次对换得到 $j_1j_2\cdots bj_{s+1}j_{s+2}\cdots j_{s+t}a\cdots j_{n-1}j_n$,共经过 $2t+1$ 次对换使原排列化为新排列,所以两个排列的奇偶性相反。

推论 1 任一 n 阶排列都可以经过若干次对换化为 n 阶标准排列,且对换次数的奇偶性与这个 n 阶排列的奇偶性相同。

推论 2 全部 $n!$ 个 n 阶排列中,偶排列和奇排列各占一半,均为$\frac{n!}{2}$ 个。

二、n 阶行列式的定义

为了得出 n 阶行列式的定义,我们先研究三阶行列式的结构:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}。$$

可以看出三阶行列式的特点:

1. 它是一个含有 $3!=6$ 项的代数和;2. 它的每一项都是 3 个元素的乘积,且这 3 个元素取自于所有不同行不同列;3. 它的每一项的符号由当行标为标准排列时,列标排列的奇偶性来确定。根据这三个特点,三阶行列式的定义如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}。$$

仿此,给出 n 阶行列式的定义:

定义 1.1 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots n)$ 组成的 **n 阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 阶排列求和,共有 $n!$ 项;$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是取自于所有不同行不同列元素的乘积且行标为标准化排列;$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示列标排列

的逆序数，$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_s)}$ 表示 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号。

例 1 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}。$$

这种主对角线下方的元素全为零的行列式称为**上三角形行列式**。此例表明上三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积。类似的有**下三角形行列式**（主对角线上方的元素全为零的行列式）的值也等于主对角线元素的乘积。主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角形行列式**，由定义可以得出对角形行列式的值也等于主对角线元素的乘积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}。$$

在行列式的定义中，每一项的符号是由当行标按标准排列时，列标排列的逆序数确定的。实际上由于对换乘积中两个元素的次序，行标排列和列标排列同时作了相应的对换，则行标排列和列标排列的逆序数之和的奇偶性并不改变，所以当列标为标准排列时，可由行标的逆序数确定每一项的符号，即

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}。$$

所以 n 阶行列式的定义也可以表示为：

定义 1.2
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}。$$

例 2 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$= (-1)^{\tau(n \cdots 321)} a_{n1} a_{n-1\,2} \cdots a_{1n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} a_{n-1\,2} \cdots a_{1n}$；

同理：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} a_{n-12} \cdots a_{1n}$。

由于数的乘法具有交换律，所以行列式中每一项的 n 个元素的次序可以任意排列成 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$。 而且可以证明这项所带的符号为 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$。

于是行列式还可以有更一般的定义：

定义 1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!\ 项} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}。$$

§1.2 行列式的性质

用定义去计算行列式计算量很大，是非常麻烦的。为简化计算，下面来介绍行列式的一些基本性质。

$$若\ \boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，称\ \boldsymbol{D}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为行列式 $\boldsymbol{D}$ 的转置行列式。

$$例如\ \boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix}，则\ \boldsymbol{D}^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}。$$

性质 1 行列式经转置后其值不变，即 $\boldsymbol{D}^T=\boldsymbol{D}$。

性质 2 若行列式的某一行（列）元素全为零，则此行列式值为零。

上述两条性质由行列式定义即可推得。

性质 3 交换行列式的两行（或两列），行列式的值变号。

证 设 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

交换 s、t 两行得

$$\boldsymbol{D}_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

$$\boldsymbol{D}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n},$$

$$\boldsymbol{D}_0=\sum(-1)^{\tau(1\cdots t\cdots s\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n}。$$

比较 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{D}_0$ 可知，在 $\boldsymbol{D}$ 中行标按标准排列，在 $\boldsymbol{D}_0$ 中仅仅交换元素 a_{sj_s} 与 a_{tj_t} 元素的行序，故乘积不变，即 $a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}=a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n}$。下面来看符号，由排列性质可知，进行一次对换就改变排列的奇偶性，

故 $(-1)^{\tau(1\cdots t\cdots s\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$，

符号相反，即 $\boldsymbol{D}_0=-\boldsymbol{D}$。

性质 4 若行列式的某两行（列）对应元素相同，则此行列式值为零。

证 将这相同的两行（两列）互换，有 $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}$，故 $\boldsymbol{D}=0$。

性质 5 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式外面，或者说一个数乘一个行列式，相当于把这个数乘到行列式的某一行（列）的所有元素上。

证 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots ka_{sj_s} \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

例如：$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 6a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-1) \times 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

性质 6 若行列式的某两行(列)元素对应成比例，则此行列式值为零。

此性质可由性质 5 及性质 4 推出。

性质 7 若行列式 $\boldsymbol{D} = |a_{ij}|$ 的某一行(列)的元素都是两个数的和，如 $a_{s1} = b_{s1} + c_{s1}, a_{s2} = b_{s2} + c_{s2}, \cdots, a_{sn} = b_{sn} + c_{sn}$，则 $\boldsymbol{D}$ 可写成两个行列式的和：$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2$。其中：

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} + c_{s1} & b_{s2} + c_{s2} & \cdots & b_{sn} + c_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

证 由行列式定义知道：

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{sj_s} + c_{sj_s}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= D_1 + D_2。 \end{aligned}$$

此性质可推广到某一行(列)都是 $m(m>2)$ 个数的和的情形。

性质 8 若将行列式的某一行(列)的所有元素同乘一个数加到另一行(列)的对应元素上,则行列式的值不变。

证 设把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第 t 行的每个元素同乘 k 加到第 s 行对应的元素上得

$$D_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1}+ka_{t1} & a_{s2}+ka_{t2} & \cdots & a_{sn}+ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 7}} D+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{t1} & ka_{t2} & \cdots & ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 6}} D+0=D。$$

利用行列式的上述性质,可以化简行列式的计算。

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & a-2 \\ b & 1 & b-2 \\ c & 1 & c-2 \end{vmatrix}$$的值。

解 用性质 8,把第 1 列的所有元素乘(－1) 加到第 3 列的对应元素上,即

$$D\xlongequal{①\times(-1)+③\text{ 列}}\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ b & 1 & -2 \\ c & 1 & -2 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{性质 6}} 0。$$

在第 1 节的例 1 中,我们很容易地用定义求出了三角形行列式的值。对一般的行列式,我们可以通过利用行列式的性质将其化为三角形行列式的方法来计算其值。

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$的值。

解 $$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}\xlongequal[i=4,3,2]{(i-1)\times(-1)+(i)\text{行}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由第 1 节例 2 的结论}} 4。$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$的值。

解　把所有列乘 1 都加到第 1 列上，得

$$D=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 5}}(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}\xlongequal[\text{其他行上去}]{\text{① 行}\times(-1)\text{ 加到}}$$

$$(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$。

例 4　计算爪型行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$，其中 $a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$。

解　从第二行起，每一行都提出 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \frac{c_1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{c_2}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{c_n}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{(i+1)\text{列}\times(-\frac{c_i}{a_i})+\text{① 列}}$$

$$a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i})。$$

§1.3　行列式按一行(列)展开

一般地,低阶行列式的计算要比高阶行列式的计算简便。因此,我们要研究行列式计算中的降阶问题。

一、子式、余子式、代数余子式

在一个 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中,任意选定 k 行和 k 列,把相交处的元素按原有的相对位置排成一个 k 阶行列式 $\boldsymbol{N}_k$,称 $\boldsymbol{N}_k$ 为 $\boldsymbol{D}$ 的一个 **k 阶子式**;在 $\boldsymbol{D}$ 中将这 k 行 k 列元素划去,剩下的元素按原有相对位置,又排成一个 $n-k$ 阶子式记为 $\boldsymbol{M}_k$,称 $\boldsymbol{M}_k$ 为 $\boldsymbol{N}_k$ 的余子式;自然 $\boldsymbol{N}_k$ 也可以叫作 $\boldsymbol{M}_k$ 的**余子式**,可以说 $\boldsymbol{M}_k$ 与 $\boldsymbol{N}_k$ 是行列式 $\boldsymbol{D}$ 的一对互余的子式。假设 $\boldsymbol{N}_k$ 位于序号为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 的各行及序号为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 的各列上,则称 $\boldsymbol{A}_k=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}\boldsymbol{M}_k$ 为 $\boldsymbol{N}_k$ 的代数余子式,记为 $\boldsymbol{A}_k$。

例如:$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$ 中,第二、三行和第四、五两列交叉处的四个元素按原有顺序可组成一个二阶子式

$\boldsymbol{N}_2=\begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}$,它的余子式为 $\boldsymbol{M}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}$,代数余子式为 $\boldsymbol{A}_2=(-1)^{2+3+4+5}\boldsymbol{M}_2$。

行列式的一阶子式就是它的一个元素,我们把每个一阶子式的余子式叫作对应**元素的余子式**,记元素 a_{ij} 的余子式为 $\boldsymbol{M}_{ij}$,

$$\text{于是 } \boldsymbol{M}_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$。

例 1 设三阶行列式为

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix},\text{求 } \boldsymbol{M}_{11},\boldsymbol{M}_{23},\boldsymbol{M}_{31} \text{ 及 } \boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{23},\boldsymbol{A}_{31}。$$

解 $\boldsymbol{M}_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1,\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-1,$

$$\boldsymbol{M}_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,\boldsymbol{A}_{23}=(-1)^{2+3}\boldsymbol{M}_{23}=-2,$$

$$\boldsymbol{M}_{31}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\boldsymbol{A}_{31}=(-1)^{3+1}\boldsymbol{M}_{31}=1。$$

二、行列式按行、按列展开

引理 若 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|$ 的第 i 行元素中,除 $a_{ij}\neq 0$ 外,其余元素均为零,则 $\boldsymbol{D}=a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}$。

证 1. 先假定 $\boldsymbol{D}$ 的第 n 行元素除 $a_{nn}\neq 0$ 外,其余全是零,即

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们来证明 $\boldsymbol{D}=a_{nn}\boldsymbol{A}_{nn}$。

按定义,行列式 $\boldsymbol{D}$ 的每一项都含有第 n 行的一个元素,但第 n 行只有 $a_{nn}\neq 0$,故 $\boldsymbol{D}$ 中一般项具有 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nn}$ 形式,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1j_2j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nn}\\&=a_{nn}\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}\\&=a_{nn}\boldsymbol{M}_{nn}=a_{nn}(-1)^{n+n}\boldsymbol{M}_{nn}=a_{nn}\boldsymbol{A}_{nn},\end{aligned}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 是列标 $1,2,\cdots,n-1$ 的一个 $n-1$ 阶排列，且 $\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)=\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})$。

2. 考虑一般情形，即

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

先依次交换第 i 行与其下边各行的位置，直到把它换至第 n 行为止，共交换 $n-i$ 次，得

$$\boldsymbol{D}=(-1)^{n-i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

再依次交换第 j 列与其右边各列的位置，直到把它换到第 n 列为止，共交换 $n-j$ 次，得

$$\boldsymbol{D}=(-1)^{2n-(i+j)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} & a_{i-1j} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} & a_{i+1j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix},$$

右边的行列式是(1) 的情形，元素 a_{ij} 的余子式就是它在行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的余子式 $\boldsymbol{M}_{ij}$，且 $(-1)^{2n-(i+j)}=(-1)^{i+j}$，因此 $\boldsymbol{D}=(-1)^{i+j}a_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}=a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}$。

定理 1.2　n 阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行的所有元素与它们对应的代数余子式之积之和，即

$$\boldsymbol{D}=a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)。\tag{1}$$

证　把行列式 $\boldsymbol{D}$ 写成下面形式