High School Math Competition Training Courses–Solution Method and Strategy of Plane Geometry (II)

HIT

全国优秀数学教师专著系列

高中数学竞赛培训教程——平面几何问题的求解方法与策略（下）

贺功保　叶美雄　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国优秀数学教师专著系列

高中数学竞赛培训教程——平面几何问题的求解方法与策略（下）

High School Math Competition Training Courses—Solution Method and Strategy of Plane Geometry (II)

● 贺功保 叶美雄 编著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书分上、下两册，共二十六讲，此为下册，共十四讲，主要介绍了关于平面几何问题的求解方法与策略，给出了一些平面几何中著名的定理、性质及其应用. 在每讲中都列举了相应的例题及详细的解答，有助于读者更好地去理解相应的定理或性质.

本书适合高中教师、学生以及数学爱好者阅读使用.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛培训教程：平面几何问题的求解方法与策略. 下/贺功保，叶美雄编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 6

ISBN 978 - 7 - 5603 - 7142 - 9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①贺… ②叶… Ⅲ. ①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 308403 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 关虹玲
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451 - 86414749
网　　址 http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 23. 75 字数 426 千字
版　　次 2018 年 6 月第 1 版 2018 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 7142 - 9
定　　价 78. 00 元

目录

西姆松定理及其应用

第十三讲

西姆松(Simson)定理 如图 1,过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边的垂线,则三垂足共线(此线常称为西姆松线).

证明 如图 1,设 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上任一点,从 P 向三边 BC,CA,AB 所在直线作垂线,垂足分别为 L,M,N. 联结 PA,PC,由 P,N,A,M 四点共圆,有

$$\angle PMN=\angle PAN=\angle PAB=\angle PCB=\angle PCL$$

又 P,M,C,L 四点共圆,有 $\angle PML=\angle PCL$,故 $\angle PMN=\angle PML$,即 L,N,M 三点共线.

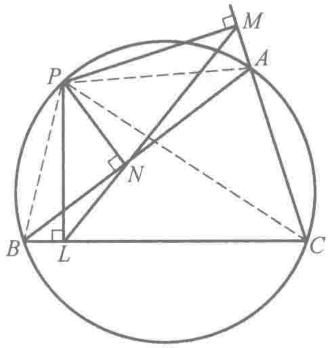

图 1

西姆松定理的逆定理 若一点在三角形三边所在直线上的射影共线,则该点在此三角形的外接圆上.

证明 如图 1,设点 P 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 所在直线上的射影分别为 L,M,N,且此三点共线.

由 $PN\perp AB$ 于点 N,$PM\perp AC$ 于点 M,$PL\perp BC$ 于点 L,知 P,B,L,N 及 P,N,A,M 分别四点共圆,而 AB 与 LM 相交于点 N,则 $\angle PBC=\angle PBL=\angle PNM=\angle PAM$,从而 P,B,C,A 四点共圆,即点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

点评　实际上西姆松定理和托勒密(Ptolemy)定理是等价的.证明如下:

先用西姆松定理证明托勒密定理.

如图2,$ABCD$为圆O的任意内接凸四边形,联结AC,过D向$\triangle ABC$各边作垂线,AB,AC,BC所在直线上的垂足分别为C_1,B_1,A_1,联结C_1B_1,B_1A_1,由西姆松定理知

$$C_1B_1+B_1A_1=C_1A_1 \quad ①$$

由A,C_1,B_1,D四点共圆,且AD为该圆的直径及正弦定理,有

$$C_1B_1=AD\cdot\sin\angle C_1DB_1=AD\cdot\sin\angle C_1AB_1$$

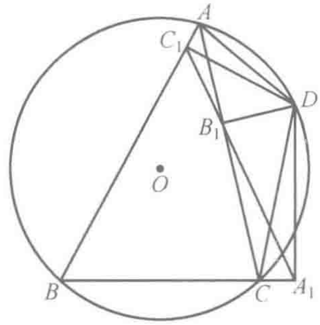

图2

设R为圆O的半径,则

$$\sin\angle C_1AB_1=\sin\angle BAC=\frac{BC}{2R}$$

故$C_1B_1=\dfrac{AD\cdot BC}{2R}$.

于是,由式①有

$$AD\cdot BC+CD\cdot AB=AC\cdot BD$$

此即为托勒密定理.

再用托勒密定理证明西姆松定理.

设$ABCD$是圆O的内接四边形,则由托勒密定理,有

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD \quad ②$$

作$DC_1\perp AB$于点C_1,作$DB_1\perp AC$于点B_1,则由A,C_1,B_1,D四点共圆,且AD为该圆直径及正弦定理,有

$$\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1DB_1}=\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1AB_1}=AD$$

即

$$C_1B_1=AD\cdot\sin\angle C_1AB_1=AD\cdot\frac{BC}{2R}(R\text{ 为圆 }O\text{ 半径})$$

亦即

$$AD\cdot BC=2R\cdot C_1B_1$$

同理

$$AB\cdot CD=2R\cdot A_1B_1,AC\cdot BD=2R\cdot A_1C_1$$

把上述三式代入式②,有$C_1B_1+A_1B_1=A_1C_1$.

故A_1,B_1,C_1三点共线,此即为西姆松定理.

因此,在应用中,我们应当注意灵活处置,若应用哪个定理方便,就应用哪个定理.

西姆松线有如下常用的性质,即:

定理 1 (斯坦纳(Steiner)定理)三角形外接圆上异于顶点的任一点的西姆松线平分该点与垂心的连线.

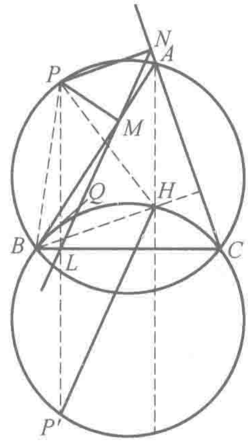

图 3

证明 如图3,设 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上异于顶点的任一点,其西姆松线为 LMN,$\triangle ABC$ 的垂心为 H.

作 $\triangle BHC$ 的外接圆,则此圆与圆 ABC 关于 BC 对称,延长 PL 交圆 BHC 于点 P',则 L 为 PP' 的中点. 设 PL 交圆 BHC 于点 Q,联结 $P'H$.

由 P,B,L,M 四点共圆,有

$$\angle PLM=\angle PBM=\angle PBA \xlongequal{m} \overset{\frown}{PA}=$$

$$\overset{\frown}{QH} \xlongequal{m} \angle QP'H$$

从而直线 $LMN \parallel P'H$,注意到直线 LMN 平分 PP',故直线 LMN 平分 PH.

例 1 如图 4,设 AD,BE,CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高线,自点 D 作 $DP\perp AB$ 于点 P,$DQ\perp BE$ 于点 Q,$DR\perp CF$ 于点 R,$DS\perp AC$ 于点 S,联结 PS. 求证:Q,R 在直线 PS 上.

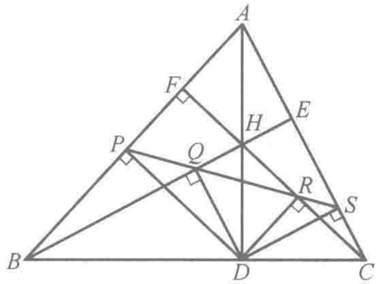

图 4

证明 由于 $\triangle BFH$ 的外接圆为圆 $BDHF$,而 D 为该圆上一点,且 D 在 $\triangle BFH$ 三边所在直线上的射影分别为 P,Q,R,于是,由西姆松定理知,P,Q,R 三点共线.

同理,可证 Q,R,S 是 $\triangle HEC$ 的西姆松线上的三点.

由于直线 PQR 与直线 QRS 有两个公共点 Q,R,所以这两直线重合,故 Q,R 在直线 PS 上.

例 2 如图 5,设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H,延长 CH 和外接圆的交点为 D,在外接圆的 $\overset{\frown}{BC}$ 上取一点 P,若 PD 和 AB 的交点为 E,则 EH 平行于关于点 P 的西姆松线 ZXY.

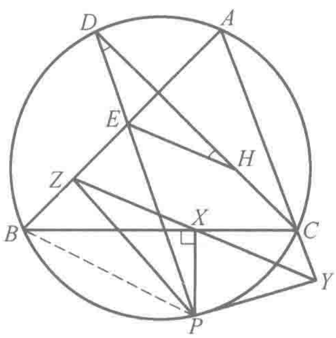

图 5

解 由垂心的性质可证得 AB 垂直平分 DH,因而 $\angle EHD=\angle EDH=\angle PBC$. 联结 PB,因 B,P,X,Z 四点共圆,有 $\angle PBX=\angle PZX$,所以 $\angle EHD=\angle PZX$,又 $DH\perp AB$,$PZ\perp AB$,

所以 $\angle HEA = \angle XZA$，故 $EH \parallel ZXY$.

例 3 自圆上任一点引三弦，并分别以它们为直径画圆，求证：三圆的其他三个交点共线. 已知如图 6，过圆 O 上任一点 S 引三弦 SA，SB，SC，分别以它们为直径的圆交于点 P，Q，R. 求证：P，Q，R 三点共线.

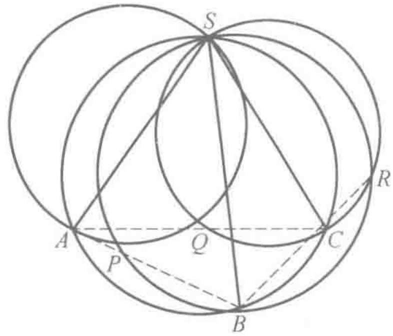

图 6

解 因 SA，SB 均为其圆直径，则 $\angle SPA$，$\angle SPB$ 都是直角，即 $SP \perp AB$ 于点 P. 同理 $SR \perp BC$ 于点 R.

于是，P，Q，R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上任一点 S 在三边所在直线上的射影，由西姆松定理知，P，Q，R 三点共线.

例 4 （2008 年第 5 届东南数学奥林匹克竞赛试题）如图 7，$\triangle ABC$ 的内切圆圆 I 分别切 BC，AC 于点 M，N，点 E，F 分别为边 AB，AC 的中点，D 是直线 EF 与 BI 的交点. 求证：M，N，D 三点共线.

分析 由题意，得 $IM \perp BC$，$IN \perp AC$，要证明 M，N，D 三点共线，只需证明 $ID \perp AD$，利用西姆松定理即可.

证明 如图 8，联结 AD 并延长交 BC 的延长线于点 G，联结 AI，CI，因为 $EF \parallel BC$，所以

$$\angle EDB = \angle DBC = \angle EBD$$

因此 $ED = BE$，所以

$$AB = 2BE = 2ED = BG$$

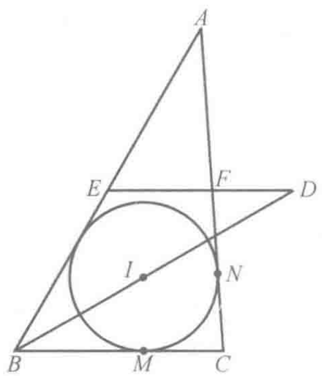

图 7

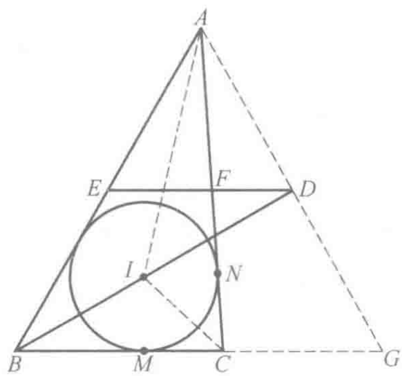

图 8

因为 BD 平分 $\angle ABG$，所以 $BD \perp AG$. 因为

$$\angle BAD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$$

所以

$$\angle IAD=\angle BAD-\angle BAI=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC-\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle ACB$$

所以 $\angle ICB=\angle IAG$，所以 I,A,C,G 四点共圆.

又因为 $IM\perp CG$，$IN\perp AC$，$ID\perp AG$，所以，由西姆松定理知，M,N,D 三点共线.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中，$AC>BC$，F 是 AB 的中点，过 F 作 $\triangle ABC$ 外接圆的直径 DE，使 C 和 E 在 AB 的同一侧. 又过 C 作 AB 的平行线交 DE 于点 L，求证

$$(AC+BC)^2=4DL\cdot EF$$

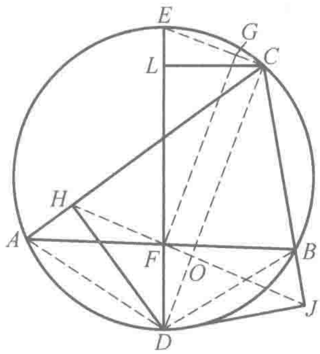

图 9

证明 如图 9，以 D 向 AC，CB 的延长线作垂线 DH，DJ，则由西姆松定理知 H,F,J 三点共线.

联结 DC 交 HJ 于点 O，过 F 作 $FG\mathbin{/\mkern-5mu/}DC$，交 CE 于点 G，则由 D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点知，DC 平分 $\angle ACB$.

联结 AD，BD，易证 $Rt\triangle CDH\cong Rt\triangle CDJ$，$Rt\triangle ADH\cong Rt\triangle BDJ$，即有 $CH=CJ$，$AH=BJ$，所以

$$CH=\frac{1}{2}(AC+BC) \quad ①$$

又 $DC\perp HJ$，而 $DC\perp CE$，所以 $EC\mathbin{/\mkern-5mu/}HJ$. 因此

$$CH^2=CO\cdot CD=GF\cdot CD \quad ②$$

又 $Rt\triangle DCL\backsim Rt\triangle FEG$，所以

$$DC:DL=FE:FG$$

即

$$GF\cdot DC=DL\cdot EF \quad ③$$

故由式①②③得，$(AC+BC)^2=4DL\cdot EF$.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，P 为 BC 的垂直平分线和 $\angle A$ 的内角平分线的交点，作 $PX\perp AB$，交 AB 的延长线于点 X，$PY\perp AC$ 交 AC 于点 Y，Z 为 XY 和 BC 的交点. 求 $\frac{BZ}{ZC}$ 的值.

解 如图 10，作 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O，记 $\overset{\frown}{BC}$（不包含点 A 的部分）的中点为 D，弦 BC 的中点为 M. 因为 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，所以 $BD=DC$，$\angle BAD=\angle CAD$，且 D 在 $\angle BAC$ 的内角平分线和 BC 的垂直平分线上.

又 $AC>AB$，$\angle BAC$ 的平分线和 BC 的垂直平分线不重合，从而它们至多有一个交点，故点 D 与点 P 重合.

所以 $DM \perp BC, DX \perp AB, DY \perp AC$，且 A，B, C, D 共圆.

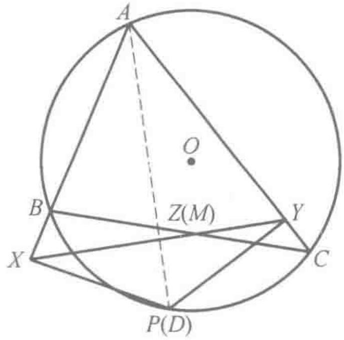

图 10

由西姆松定理知，X, M, Y 三点共线，即 M 为 BC 和 XY 的交点.

又 BC 和 XY 不重合，它们至多有一个交点，故 M 与 Z 重合，因此

$$\frac{BZ}{ZC}=\frac{BM}{MC}=1$$

点评　本题也可用梅涅劳斯(Menelaus)定理来解，请参考本讲巩固练习第 1 题.

例 7　如图 11，过正 $\triangle ABC$ 外接圆的$\overset{\frown}{AC}$上一点 P 作 $PD \perp$ 直线 AB 于点 D，作 $PE \perp AC$ 于点 E，作 $PF \perp BC$ 于点 F. 求证：$\frac{1}{PF}+\frac{1}{PD}=\frac{1}{PE}$.

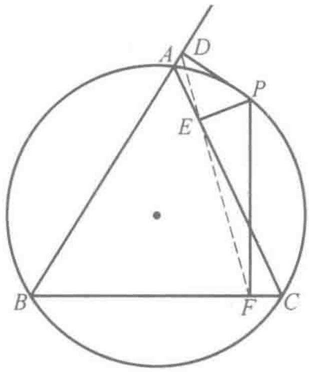

图 11

证明　由 $PD \perp$ 直线 AB 于点 D，$PE \perp AC$ 于点 E，$PF \perp BC$ 于点 F 知，A, E, P, D 及 E, F, C, P 分别四点共圆，则 $\angle DPE=\angle BAE=60^\circ$，$\angle EPF=\angle ECF=60^\circ$.

由西姆松定理知，D, E, F 三点共线，从而以 P 为视点对 $\triangle PDF$ 应用张角定理，有

$$\frac{\sin\angle DPF}{PE}=\frac{\sin\angle DPE}{PF}+\frac{\sin\angle EPF}{PD}$$

即

$$\frac{\sin 120^\circ}{PE}=\frac{\sin 60^\circ}{PF}+\frac{\sin 60^\circ}{PD}$$

故

$$\frac{1}{PF}+\frac{1}{PD}=\frac{1}{PE}$$

例 8　如图 12，P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上一点，作 $PA' \perp BC$ 交圆于点 A'，作 $PB' \perp$ 直线 AC 交圆于点 B'，作 $PC' \perp AB$ 交圆于点 C'. 求证 $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

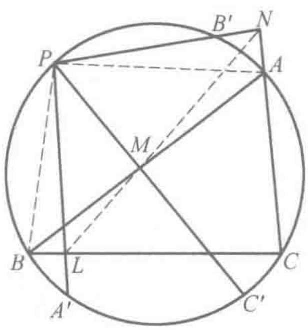

图 12

证明　设 $PA' \perp BC$ 于点 L，$PB' \perp AC$ 于点 N，$PC' \perp AB$ 于点 M，则由西姆松定理知，L, M, N 三点共线. 注意到 L, B, P, M 及 A', B, P, A 分别四点共圆，联结 BP，则

$\angle AMN=\angle BML=\angle BPL=\angle BPA'=\angle BAA'$

于是 $AA' /\!/ LN$.

同理,注意到 A,B,P,B' 及 A,M,P,N 分别四点共圆,联结 PA,则

$$\angle ABB'=\angle APB'=\angle APN=\angle AMN$$

于是 $BB' /\!/ LN$.

由 A,P,C',C 四点共圆知,$\angle ACC'+\angle APC'=180^\circ$. 注意到

$$\angle APC'=\angle APM=\angle ANM=\angle CNM$$

则 $\angle ACC'+\angle CNM=180^\circ$,于是 $CC' /\!/ LM$,故 $AA' /\!/ BB' /\!/ CC'$.

例 9 如图 13,设 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上 $\overset{\frown}{BC}$ 内一点,过 P 作 $PD\perp BC$ 于点 D,作 $PF\perp AB$ 于点 F,设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,延长 PD 交 AB 于点 P',使得 $PD=P'D$. 求证:$HP' /\!/ DF$.

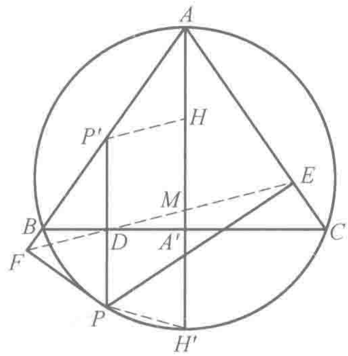

图 13

证明 联结 AH 并延长交 BC 于点 A',交圆于点 H',则有

$$\angle HCB=\angle BAH'=\angle BCH'$$

$$HA'=A'H'$$

又由已知 $PP'\perp BC$,且 $P'D=DP$,联结 PH',则知 PH' 与 $P'H$ 关于 BC 对称,从而 $\angle PH'H=\angle P'HH'$.

由于从点 P 已向 $\triangle ABC$ 的两边所在直线 AB,BC 引了垂线 PF,PD,再过点 P 向边 AC 所在的直线作垂线 PE,垂足为 E,则由西姆松定理知,E,D,F 三点共线,设西姆松线 EF 与 HA' 交于点 M. 此时,又由 P,C,E,D 四点共圆,有 $\angle CPE=\angle CDE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCE$ 中,$\angle CPE$ 与 $\angle ECP$ 互余;在 $\mathrm{Rt}\triangle MDA'$ 中,$\angle A'DM=\angle CDE$ 与 $\angle DMA'$ 互余. 故 $\angle DMA'=\angle PCE=\angle PCA=\angle PH'H=\angle P'HH'$,由此即知 $HP' /\!/ EF$,故 $HP' /\!/ DF$.

例 10 如图 14,设 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上一点,过点 P 分别作 $PL\perp BC$ 于点 L,$PN\perp AB$ 于点 N,直线 LN 交边 BC 上的高于点 K,设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 求证:$PK /\!/ LH$.

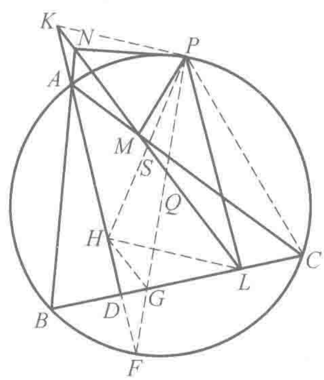

图 14

证明 由于从点 P 引了 $\triangle ABC$ 的边 BC,BA 所在直线的垂线,再过点 P 作 $PM\perp AC$ 于点 M,则由西姆松定理知,L,M,N 三点共线,即 L,M,N,K 四点共线.

设边 BC 上的高线为 AD,延长 AD 交圆于点 F,联结 PF 交 BC 于点 G,交西姆松线 NL 于点 Q,

联结 PH 交西姆松线 NL 于点 S. 由 P,C,L,M 及 A,F,C,P 分别四点共圆，再联结 PC，知

$$\angle MLP = \angle MCP = \angle PFA = \angle LPF$$

从而 $QP = QL$，即 Q 为 $\mathrm{Rt}\triangle PLG$ 的斜边 PG 的中点. 联结 HG，由 $\angle DFC = \angle ABC = \angle DHC$ 知，$HD = DF$，则

$$\angle HGD = \angle DGF = \angle LGP = \angle QLG$$

从而 $HG \parallel ML$，即 SQ 是 $\triangle PHG$ 的中位线，亦即 $HS = SP$.

又 $PL \parallel KH$，有 $\angle LPS = \angle KHS$，$\angle PSL = \angle HSK$，于是 $\triangle PSL \cong \triangle HSK$，即有 $PL \parallel KH$，$PL = KH$，亦即四边形 $PKHL$ 为平行四边形，故 $PK \parallel LH$.

点评 由此例可得，联结三角形外接圆上一点 P 与垂心 H 的线段 PH，被关于点 P 的西姆松线所平分. 这是西姆松线的一条重要性质.

例 11 如图 15，延长凸四边形 $ABCD$ 的边 AB，DC 交于点 E，延长 AD，BC 交于点 F. 试证：$\triangle BCE$，$\triangle CDF$，$\triangle ADE$，$\triangle ABF$ 的四个外接圆共点.

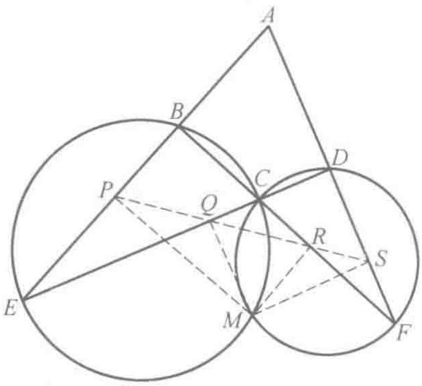

图 15

证明 设 $\triangle BCE$ 与 $\triangle CDF$ 的两个外接圆除相交于点 C 外，另一个交点为 M. 设点 M 在直线 BE，EC，BC 上的射影分别为 P,Q,R，则由西姆松定理知，P,Q,R 三点共线.

同理，点 M 在直线 DC，CF，DF 上的射影 Q,R,S 也三点共线，故 P,Q,R,S 四点共线. 在 $\triangle ADE$ 中，P 在 AE 上，Q 在 DE 上，S 在边 AD 所在的直线上，且 P,Q,S 三点共线，则由西姆松定理的逆定理知，点 M 在 $\triangle ABE$ 的外接圆上.

在 $\triangle ABF$ 中，P 在直线 AB 上，R 在 BF 上，S 在 AF 上，且 P,Q,S 三点共线，则由西姆松定理的逆定理知，点 M 在 $\triangle ABF$ 的外接圆上. 故 $\triangle BCE$，$\triangle CDF$，$\triangle ADE$，$\triangle ABF$ 的四个外接圆共点.

点评 此例题的结论实际为完全四边形 $ABECFD$ 的四个三角形 $\triangle BCE$，$\triangle CDF$，$\triangle ADE$，$\triangle ABF$ 共点，此点称为密克尔(Miquel) 点，直线 $PQRS$ 称为完全四边形的西姆松线.

例 12 (第 35 届 IMO 预选题) 如图 16，一条直线 l 与圆心为 O 的圆不相交，E 是 l 上一点，$OE \perp l$，M 是 l 上任意异于 E 的点，从 M 作圆 O 的两条切线，分别切圆 O 于点 A 和 B，C 是 MA 上的点，使得 $EC \perp MA$，D 是 MB 上的点，使得 $ED \perp MB$，直线 CD 交 OE 于点 F. 求证：点 F 的位置不依赖点 M 的位置.

证明 令 $OE=a$，圆 O 的半径为 R，联结 EA,EB,OA,OB,OM,AB，设 AB 交 OM 于点 G，交 OE 于点 Q，则 $OA\perp MA,OB\perp MB,OM\perp AB$.

由射影定理，得 $OG\cdot OM=OB^2$，又由 M,E,Q,G 四点共圆，有

$$OQ\cdot OE=OG\cdot OM=OB^2=R^2$$

从而知 $OQ=\frac{R^2}{a}$. 由 $OB^2=OQ\cdot OE$，有 $\triangle OEB\backsim\triangle OBQ$，所以 $\angle BEO=\angle OBQ=\angle BAO$，即 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$. 由此得

$$\angle MEB+\angle MAB=$$
$$(90^\circ+\angle 1)+(90^\circ-\angle 3)=180^\circ$$

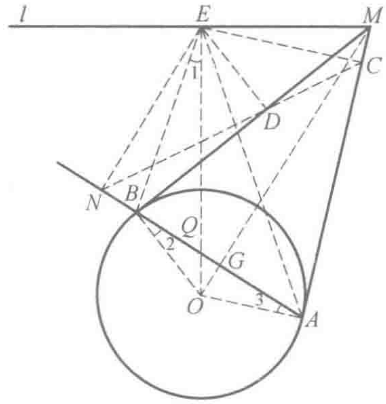

图 16

故 A,B,E,M 四点共圆.

作 $EN\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 N，由西姆松定理知，C,D,F,N 四点共线. 注意到 A,N,E,C 与 A,O,E,M 均四点共圆，则有 $\angle ENF=\angle EAM=\angle EOM$. 又由 $EN\ /\!/\ OM$，有 $\angle EOM=\angle NEF$，故 $\angle ENF=\angle NEF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle NEQ$ 中，由上推知 F 为 EQ 的中点，因此

$$EF=\frac{1}{2}EQ=\frac{1}{2}(OE-OQ)=\frac{a^2-R^2}{2a}$$

故点 F 的位置不依赖点 M 的位置.

例 13 由 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引另外两顶点的内、外角平分线的垂线，垂足分别为 F,G,E,D，则 F,G,E,D 四点共线，且此线与 $\triangle ABC$ 的中位线重合.

证明 如图 17，延长 BE,CD 交于点 K，设 CG,BE 相交于点 I，则 I 为 $\triangle ABC$ 的内心. 由

$$\angle CAI=\frac{1}{2}\angle A$$

$$\angle CKI=90^\circ-\angle CIK=90^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)=\frac{1}{2}\angle A$$

知 A,I,C,K 四点共圆.

对 $\triangle ICK$ 及点 A 应用西姆松定理知，G,E,D 三点共线.

同理，对 $\triangle BCL$ 及点 A 应用西姆松定理知，F,G,E 三点共线. 故 F,G,E,D 四点共线.

由于 A 为 $\triangle ICK$ 的垂心，则由定理 1 知，直线 GED 平分 AC. 同理，直线 FGE 平分 AB，故直线 FD 与 $\triangle ABC$ 的中位线重合.

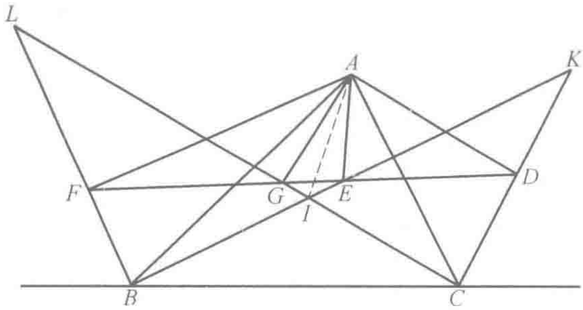

图 17

巩固练习

1.(2005年第2届中国东南数学奥林匹克试题)如图18,圆O(圆心为O)与直线l相离,作$OP \perp l$,P为垂足.设点Q是l上任意一点(不与点P重合),过点Q作圆O的两条切线QA和QB,A和B为切点,AB与OP相交于点K.过点P作$PM \perp QB$,$PN \perp QA$,M和N为垂足.求证:直线MN平分线段KP.

证明 如图19,作$PI \perp AB$,I为垂足,记J为直线MN与线段PK的交点.易知$\angle QAO=\angle QBO=\angle QPO=90°$,故$O,B,Q,P,A$均在以线段$OQ$为直径的圆周上.

由于$PN \perp QA$,$PM \perp QB$,$PI \perp AB$,所以由西姆松定理知,$\triangle QAB$的外接圆上一点P在其三边的垂足N,M,I三点共线,即M,N,J,I四点共线.

因为$QO \perp AB$,$PI \perp AB$,所以$QO \parallel PI$,所以$\angle POQ=\angle IPO$,又因为P,A,I,M四点共圆,所以P,A,O,Q也四点共圆,所以

$$\angle PIJ=\angle PIM=\angle PAM=\angle POQ$$

所以在$\mathrm{Rt}\triangle PIK$中,$\angle PIJ=\angle JPI$,所以J为PK的中点,因此直线MN平分线段KP.

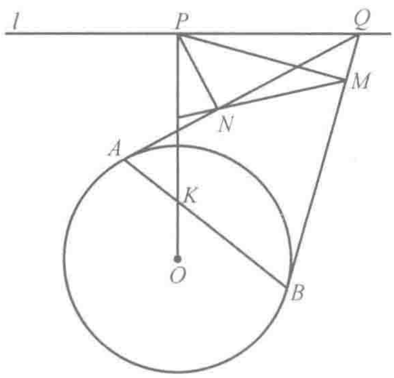

图 18

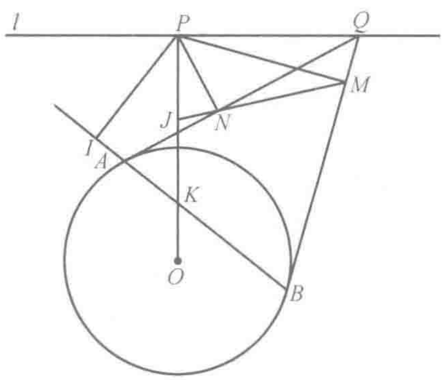

图 19

2. 如图 20,设 P 为四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 外接圆上任一点,点 P 在直线 A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_1 上的射影分别为 B_1,B_2,B_3,B_4,又点 P 在直线 B_1B_2,B_2B_3,B_3B_4,B_4B_1 上的射影分别为 C_1,C_2,C_3,C_4. 求证:C_1,C_2,C_3,C_4 共线.

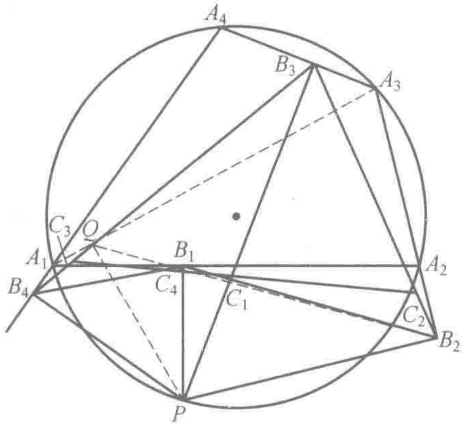

图 20

证明 联结 A_1A_3,过 P 作 A_1A_3 的垂线,垂足为 Q,从而点 P 关于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的西姆松线为 QB_1B_2. 同理,点 P 关于 $\triangle A_1A_3A_4$ 的西姆松线为 B_3QB_4.

由 $\angle A_1B_4P=\angle A_1QP=\angle A_1B_1P$ 知,点 P 在 $\triangle QB_1B_4$ 的外接圆上,由西姆松定理知,点 P 在 $\triangle QB_1B_4$ 三边上的垂足 C_1,C_3,C_4 共线.

同理,C_1,C_2,C_4 三点也共线.

故 C_1,C_2,C_3,C_4 四点共线(此直线称为点 P 关于圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的西姆松线).

3. 如图 21,设 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上任一点,点 P 关于边 BC,AC 所在直线的对称点分别为 P_1,P_2. 求证:P_1P_2 经过 $\triangle ABC$ 的垂心 H.

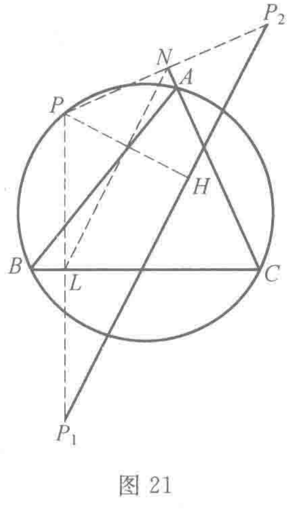

图 21

证明 由于 P_1,P_2 分别为点 P 关于直线 BC,AC 的对称点,设 PP_1 交直线 BC 于点 L,PP_2 交直线 AC 于点 N,则 L,N 分别为点 P 在 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA 所在直线上的射影,且 L,N 分别为线段 PP_1,PP_2 的中点.

由西姆松定理知,LN 为西姆松线,此时 $LN /\!/ P_1P_2$.

又由前面的例 5 知,当 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心时,直线 LN 平分线段 PH. 于是,可知点 H 在 P_1P_2 上,即 P_1P_2 经过点 H.

4. 求证：四条直线两两相交所构成的四个三角形的外接圆相交于一点，且由该点向四条直线所作垂线的垂足在一条直线上.

证明 如图22，设四条直线 AB，BC，CD，DA 中 AB，CD 相交于点 E，BC，AD 相交于点 F，圆 BCE 与圆 CDF 的另一个交点为 G，则

$$\angle BGF = \angle BGC + \angle CGF = \angle BEC + \angle CDA$$

所以 $\angle BGF + \angle A = \pi$，这说明圆 ABF 过点 G.

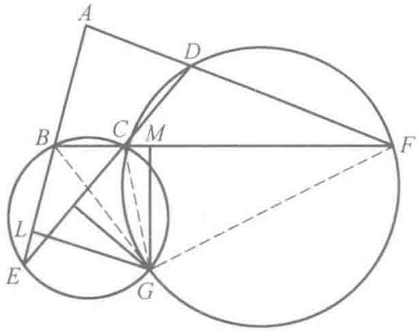

图 22

同理，可以证明圆 AED 也过点 G，即圆 BCE，CDF，ABF，AED 交于同一点 G.

若由 G 向 AB，BC，CD，DA 所作垂线的垂足分别为 L，M，N，P，则由西姆松定理可知，L，M，N 三点共线，M，N，P 三点共线，故 L，M，N，P 四点共线.