“十二五”国家重点图书出版规划项目

现代声学科学与技术丛书

声学原理

（第二版 · 下卷）

程建春　著

科学出版社

现代声学科学与技术丛书

声学原理

(第二版·下卷)

程建春　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统介绍了流体介质中声波的激发、传播、接收和调控的基本原理和分析方法. 主要内容包括：理想流体中声波的基本性质；声波的辐射、散射和衍射；管道和腔体中的声场；非理想介质中的声波；层状和运动介质中的声传播以及有限振幅声波的传播及其物理效应.

本书分上下两卷，上卷第 1 ~ 4 章，下卷第 5 ~ 10 章.

本书可作为理工科高年级学生和研究生的教材，也可作为声学研究工作者和技术人员的参考书，希望本书能够对读者的科研工作提供帮助.

图书在版编目(CIP)数据

声学原理. 下卷/程建春著. —2 版. —北京：科学出版社，2019.5
(现代声学科学与技术丛书)
ISBN 978-7-03-061212-0

Ⅰ. ①声…　Ⅱ. ①程…　Ⅲ. ①声学　Ⅳ. ①O42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 090017 号

责任编辑：刘凤娟 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 5 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2019 年 5 月第一次印刷　印张：39
字数：747 000

定价：199.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

与第一版相比，第二版主要有三个方面的变化：错误修改，小节的名称变化，增加内容. 增加的内容大致分两部分：融入近年来新的科研工作，相关章节的延伸和扩展. 详细说明如下 (括号内的数字为出现的小节数).

新增加的科研工作包括：人工结构表面及广义 Snell 定律 (1.4.5)，周期分层结构与能带特性 (1.5.6)，声束的聚焦和声棱镜聚焦 (2.2.3)，任意弯曲声束的形成 (2.2.4)，Airy 声束和能量有限的 Airy 束 (2.2.5)，螺旋波模式及其相控阵生成方法 (2.3.6)，表面散射和声景的设计 (3.2.6)，刚性地面上的有限屏及数值计算 (3.4.5)，低频有效声速和各向异性 (3.5.2)，二维固体周期结构中的弹性波 (3.5.3)，一维均质化近似的多尺度展开理论 (3.5.4)，高维均质化近似和各向异性 (3.5.5)，周期旁支结构的管道和能带结构 (4.4.5)，扩散体和 Schroeder 扩散体 (5.3.5)，长房间的声场分布问题 (5.3.6)，阻抗型边界的层状波导 (7.1.5)，径向连续分布介质中的声线方程 (7.5.1)，幂次分布结构中的声线和声黑洞 (7.5.2)，基于波动方程的严格解 (7.5.3)，Gauss 声束入射时空间声场的分布 (7.5.4)，球坐标中径向分布的折射率 (7.5.5) 等.

延伸和扩展的内容包括：曲线坐标系中的声波方程 (1.1.6)，N 层结构的传递矩阵法 (1.5.4)，N 层结构的阻抗率传递法 (1.5.5)，声学中的随机信号和相关函数 (1.6.5)，圆锥区域内波动方程的解 (2.4.5)，平面上非相干源的辐射 (2.5.7)，散射的积分方程方法 (3.2.2)，有限长管道中的驻波和非均匀阻抗的反射 (4.2.6)，简正模式的微扰近似方法 (5.2.5)，障板上的 Helmholtz 共振腔阵列 (5.4.4)，微穿孔板的共振吸声及共振频率 (6.3.3)，能量守恒、流反转定理和修正的互易原理 (8.1.6)，径向分布的轴向流介质中的波动方程 (8.3.3)，非稳定流动介质中的近似波动方程 (8.3.4)，运动界面的声散射和 FW-H 方程 (8.4.3)，广义 Lighthill 理论及其积分解 (8.4.4)，微扰的重整化解和多尺度微扰展开 (9.2.6)，非生物介质中的温度场方程 (10.4.1)，温度场的 Green 函数解 (10.4.2)，生物介质中的温度场方程 (10.4.3)，生物传热的 Pennes 方程及其解析解 (10.4.4) 等.

总之，第二版继续保持第一版的基本结构，新增加的内容自然嵌入各个章节. 本书分上下两卷：上卷为第 1~4 章，下卷为第 5~10 章. 下卷的页码与章节顺接上卷.

本书第二版的出版得到南京大学物理学院和中国科学院噪声与振动重点实验室的资助.

作　者

2018 年 10 月

第一版前言

声学是研究声波的产生、传播、接收及其效应的科学，属于物理学的一个分支. 声学具有极强的交叉性与延伸性，它与现代科学技术的大部分学科发生交叉，形成了若干丰富多彩的分支. 近年来，声学的研究与新材料、新能源、医学、通信、电子、环境以及海洋等学科紧密结合，取得了巨大的进展. 可以说声学在现代科学技术中起着举足轻重的作用，对当代科学技术的发展、社会经济的进步、国防事业的现代化，以及人民物质精神生活的改善与提高，发挥着极其重要，甚至不可替代的作用. 因此，声学学科已经大大超越了物理学的经典范畴，而成为包括信息、电子、机械、海洋、生命、能源等学科在内的充满活力的多学科交叉科学.

声音是人类最早研究的物理现象之一，声学是经典物理学中历史最悠久，并且当前仍处于前沿地位的物理学分支学科. 现代声学可以追溯到 1877 年瑞利出版的《声学原理》，该书总结了 19 世纪及以前三百年的大量声学研究成果，集经典声学的大成，开创了现代声学的先河. 20 世纪，由于电子学的发展，使用电声换能器和电子仪器设备可以产生、接收和利用各种频率、波形、强度的声波，大大拓展了声学研究的范围.

现代声学中最初发展的分支是建筑声学和电声学以及相应的电声测量；随着频率范围的扩展，又发展了超声学和次声学；由于手段的改善，进一步研究了听觉，发展了生理声学和心理声学；由于对语言和通信广播的研究，发展了语言声学；在第二次世界大战中，开始把超声广泛用于水下探测，促使水声学得到很大的发展；20 世纪初以来，特别是 20 世纪 50 年代以来，由于工业、交通等事业的巨大发展，出现了噪声环境污染问题，从而促进了噪声、噪声控制、机械振动和冲击研究的发展. 随着高速大功率机械的广泛应用，非线性声学受到普遍重视. 此外还有音乐声学、生物声学. 这样，逐渐形成了完整的现代声学体系. 现代声学是科学、技术，也是艺术的基础.

今天，人们研究的声波频率范围已从 10^{-4}Hz 到 10^{13}Hz, 覆盖 17 个数量级. 根据人耳对声波的响应不同，把声波划分为次声 (频率低于可听声频率范围，大致为 10^{-4} ~20Hz)、可听声 (频率在 20Hz~20kHz，即人耳能感觉到的声) 和超声 (频率在 20 kHz 以上的声). 根据声学与不同学科的交叉，声学又可分为若干个不同的分支，如水声学和海洋声学 (与海洋科学的交叉)、生物医学超声学 (与医学的交叉)、超声电子学 (与电子科学的交叉)、超声检测和成像技术 (与多学科的交叉)、通信声学和心理声学 (与生命科学、通信学科的交叉)、生物声学 (与生物学的交叉)、环

境声学 (与环境科学的交叉)、地球声学与能源勘探 (与地球科学的交叉)、语言声学 (与语言学、生命科学的交叉)，等等.

总之，声学的内容十分广博，各个学科分支也有其独特的研究方法和手段，以及研究对象. 因而本书写作的关键是内容的选择，通过分析现有 "声学基础" 和 "理论声学" 教材，作者仍然循着 "传播 — 辐射 — 散射 — 接收" 这个基本思路来选择内容. 但与传统的声学教材不同，本书忽略了振动部分的内容 (这部分的内容往往占到 "理论声学" 的三分之一)，而把所有的篇幅都用在讲述声学理论和方法上. 另外值得一提的是，本书完全没有涉及固体介质中的声场与波.

本书是为南京大学物理学院声学专业研究生开设 "理论声学" 课程而编写的，为了达到提高的目的，选择内容有一定深度. 此外，为了方便阅读，数学推导尽量详细. 主要内容叙述如下.

第 1 章讲述理想流体中声波的基本性质，介绍声波方程、声场的基本性质、行波解和平面波展开、平面界面上声波的反射和透射，以及声波的度量和分析方法；第 2 章讲述无限空间中声波的辐射，介绍多极子展开方法、柱和球状声源的辐射、界面附近的声源辐射、有限束超声场和非衍射波，以及声波与声源的相互作用；第 3 章讲述声波的散射和衍射，介绍柱体和球的散射、非均匀区域的散射、屏和楔的声衍射，以及逆散射和衍射 CT 理论；第 4 和第 5 章讲述管道和腔体中的声场，介绍等截面波导中声波的传播和激发、突变截面波导及平面波近似、缓变截面管道中平面波的传播、腔体中的模式展开理论、扩散声场、Helmholtz 共振腔，以及二个腔的耦合；第 6 章讲述非理想介质中的声波，介绍非理想流体中的声波方程、耗散介质中的声波、管道和狭缝中的平面波、黏滞对声辐射的影响，以及流体和生物介质中声吸收；第 7 章讲述层状介质中的声波，介绍平面层状波导、连续变化层状波导、WKB 近似方法，以及几何声学；第 8 章讲述运动介质中的声波，介绍匀速流动介质中的声波、运动声源激发的声波、缓变非均匀流动介质中的声波，以及不稳定流产生的声；第 9 和第 10 章讲述有限振幅声波的传播及其产生的物理效应，介绍理想介质中的有限振幅平面波、黏滞和热传导介质中的有限振幅波、色散介质中的有限振幅声波，有限振幅声束的传播. 物理效应主要介绍声辐射压力和声悬浮、声流理论以及声空化效应.

本书的出版得到南京大学 985(III) 工程、国家自然科学基金委员会和江苏高校优势学科建设工程资助项目的资助.

作　者

2011 年 12 月

目 录

(下 卷)

第 5 章 腔体中的声场 …… 579
5.1 简正模式理论 …… 579
5.1.1 刚性壁面腔体的简正模式和展开 …… 579
5.1.2 阻抗壁面腔体的简正模式 …… 583
5.1.3 阻抗壁面腔体中声波方程的频域解 …… 587
5.1.4 阻抗壁面腔体中声波方程的时域解 …… 589
5.1.5 不规则腔体中声场的模式展开方法 …… 593
5.1.6 腔内声场与壁面振动的耦合 …… 596
5.2 规则形腔中的简正模式 …… 599
5.2.1 刚性壁面的矩形腔和模式的简并 …… 600
5.2.2 阻抗壁面的矩形腔和模式的衰减 …… 605
5.2.3 刚性和阻抗壁面的球形腔 …… 607
5.2.4 刚性和阻抗壁面的圆柱形腔 …… 610
5.2.5 简正模式的微扰近似方法 …… 615
5.2.6 不规则腔体的变分近似方法 …… 624
5.3 高频近似和扩散声场 …… 629
5.3.1 腔内的稳态和瞬态声场 …… 629
5.3.2 扩散声场的基本特性和统计方法 …… 633
5.3.3 扩散场中声压的空间相关特性 …… 642
5.3.4 扩散声场中界面的声吸收和透射 …… 645
5.3.5 扩散体和 Schroeder 扩散体 …… 649
5.3.6 长房间的声场分布问题 …… 658
5.4 低频近似和 Helmholtz 共振腔 …… 663
5.4.1 封闭腔的低频近似和 Helmholtz 共振腔 …… 663
5.4.2 高阶模式引起的共振频率管端修正 …… 666
5.4.3 无限大障板上的 Helmholtz 共振腔及管端修正 …… 670
5.4.4 障板上的 Helmholtz 共振腔阵列 …… 674

5.4.5 自由场中的 Helmholtz 共振腔及管端修正 ······ 680
5.4.6 黏滞和热传导的影响 ······ 683
5.5 二个腔的耦合 ······ 687
5.5.1 腔耦合的声场激发和活塞辐射近似 ······ 687
5.5.2 腔耦合的简正频率和模式 ······ 693
5.5.3 扩散场近似腔的耦合和隔声测量 ······ 697
5.5.4 两个低频近似腔的耦合 ······ 704
5.5.5 封闭腔中的 Helmholtz 共振腔 ······ 706
第 6 章 非理想流体中声波的传播和激发 ······ 709
6.1 黏滞和热传导流体中的声波方程 ······ 709
6.1.1 黏滞流体的本构方程 ······ 709
6.1.2 黏滞和热传导流体中的守恒定律和声波方程 ······ 713
6.1.3 等温声速和等熵声速 ······ 719
6.1.4 能量守恒关系和能量密度 ······ 722
6.1.5 边界条件和运动体积的守恒定律 ······ 724
6.2 耗散介质中声波的传播和散射 ······ 730
6.2.1 无限大耗散介质中的平面波模式 ······ 730
6.2.2 声学边界层理论及声边界条件 ······ 735
6.2.3 边界层的声能量损失 ······ 740
6.2.4 刚性边界上平面波的反射 ······ 741
6.2.5 耗散介质中微球的散射 ······ 744
6.3 管道和狭缝中声波的传播和耗散 ······ 751
6.3.1 粗圆管中平面波的传播和衰减 ······ 751
6.3.2 毛细管中平面波的传播和微穿孔材料 ······ 756
6.3.3 微穿孔板的共振吸声及共振频率 ······ 763
6.3.4 狭缝中平面波的传播和衰减 ······ 771
6.3.5 热声效应和热声致冷 ······ 773
6.4 黏滞和热传导对声辐射的影响 ······ 779
6.4.1 黏滞介质中的多极展开 ······ 779
6.4.2 平面声源以及活塞辐射的柱函数表示 ······ 782
6.4.3 球面声源和“小”球面声源 ······ 787
6.4.4 一般尺度声源以及标量势和矢量势 ······ 791
6.5 流体和生物介质中声波的衰减 ······ 795
6.5.1 经典衰减和经典衰减公式 ······ 796
6.5.2 分子弛豫衰减理论和声波方程 ······ 797

6.5.3 生物介质中的声衰减和时间分数导数 ……801
6.5.4 含有分数 Laplace 算子的声波方程 ……807
6.5.5 Kramers-Kronig 色散关系 ……810
第 7 章 层状介质中的声波和几何声学 ……815
7.1 平面层状波导 ……815
7.1.1 单一均匀层波导中的简正模式和截止频率 ……815
7.1.2 点源单频激发和镜像反射形式的解 ……819
7.1.3 Pekeris 波导中的简正模式和 Airy 波 ……823
7.1.4 Pekeris 波导中声波的单频激发 ……831
7.1.5 阻抗型边界的层状波导 ……834
7.2 连续变化平面层状介质 ……839
7.2.1 连续变化介质平面波导 ……839
7.2.2 线性变化波导和 Airy 函数 ……843
7.2.3 浅海平面波导 ……847
7.2.4 大气中点源激发的声场 ……849
7.2.5 平面波的反射和透射 ……853
7.3 WKB 近似方法 ……859
7.3.1 WKB 近似理论和近似条件 ……859
7.3.2 转折点附近的解和高阶转折点 ……862
7.3.3 渐近匹配方法 ……865
7.3.4 连续变化层状波导的 WKB 近似解 ……870
7.3.5 转折点波导中声波的激发 ……873
7.4 几何声学近似 ……876
7.4.1 程函方程和输运方程 ……876
7.4.2 Fermat 原理和 Hamilton 形式 ……881
7.4.3 平面层状介质中的声线 ……883
7.4.4 射线管的能量守恒 ……887
7.4.5 圆弧焦散线附近的声场 ……889
7.5 径向分布介质中的声传播 ……891
7.5.1 径向连续分布介质中的声线方程 ……891
7.5.2 幂次分布结构中的声线和声黑洞 ……894
7.5.3 基于波动方程的严格解 ……897
7.5.4 Gauss 声束入射时空间声场的分布 ……902
7.5.5 球坐标中径向分布的折射率 ……905

第 8 章 运动介质中的声传播和激发 ······ 910
8.1 匀速运动介质中的声波 ······ 910
8.1.1 匀速流动介质中的波动方程和速度势 ······ 910
8.1.2 平面声波的反射和透射以及边界条件 ······ 914
8.1.3 无限大空间中频域 Green 函数 ······ 918
8.1.4 管道中声波的传播以及主波的衰减 ······ 925
8.1.5 均匀流管道中的 Green 函数 ······ 929
8.1.6 能量守恒、流反转定理和修正的互易原理 ······ 931
8.2 运动声源激发的声波 ······ 938
8.2.1 亚音速匀速运动和 Lorentz 变换 ······ 939
8.2.2 超音速匀速运动 ······ 943
8.2.3 针状物超音速运动产生的场 ······ 948
8.2.4 运动声源的辐射功率 ······ 952
8.2.5 非匀速运动的声源 ······ 957
8.3 非均匀流动介质中的声波 ······ 959
8.3.1 无旋流介质中的等熵声波和能量守恒 ······ 959
8.3.2 分层流介质中的声波和点质量源激发 ······ 964
8.3.3 径向分布的轴向流介质中的波动方程 ······ 968
8.3.4 非稳定流动介质中的近似波动方程 ······ 969
8.3.5 缓变稳定流动介质中的几何声学 ······ 972
8.3.6 缓变非稳定流动介质的几何声学 ······ 976
8.4 湍流产生的声波 ······ 982
8.4.1 Lighthill 理论和八次方定律 ······ 982
8.4.2 固定界面的声散射和 Curle 方程 ······ 986
8.4.3 运动界面的声散射和 FW-H 方程 ······ 988
8.4.4 广义 Lighthill 理论及其积分解 ······ 995
8.4.5 气流噪声的谱分布以及平均流的作用 ······ 998
8.4.6 漩涡产生的声波 ······ 1000
第 9 章 有限振幅声波的传播 ······ 1008
9.1 理想介质中的有限振幅平面波 ······ 1008
9.1.1 等熵流中的简单波以及非等熵过程 ······ 1008
9.1.2 冲击波的形成以及间断面的不连续性 ······ 1014
9.1.3 Bessel-Fubini 解和 Blackstock 桥函数 ······ 1017
9.1.4 Fenlon 解以及声波对声波的抑制 ······ 1021
9.1.5 复合波声场和 Riemann 不变量 ······ 1025

9.2 黏滞和热传导介质中的有限振幅波 ······ 1027
9.2.1 非线性方程的微扰展开 ······ 1027
9.2.2 一维有限振幅行波及 Burgers 方程 ······ 1034
9.2.3 Burgers 方程的 Fay 解和 N 型激波解 ······ 1037
9.2.4 有限振幅球面波和柱面波 ······ 1042
9.2.5 Westervelt 方程和声压场的 Burgers 方程 ······ 1045
9.2.6 微扰的重整化解和多尺度微扰展开 ······ 1047
9.3 色散介质中的有限振幅波 ······ 1052
9.3.1 弛豫介质中的有限振幅平面波 ······ 1052
9.3.2 球或柱坐标下的广义 Burgers 方程 ······ 1059
9.3.3 管道中的有限振幅平面波 ······ 1060
9.3.4 生物介质中含有分数导数的 Burgers 方程 ······ 1064
9.3.5 含气泡液体中的有限振幅波及强非线性 ······ 1065
9.4 有限振幅声束的传播 ······ 1073
9.4.1 不同介质中的 KZK 方程 ······ 1074
9.4.2 准线性理论及 Gauss 束非线性声场 ······ 1076
9.4.3 参量阵理论及低频定向声束 ······ 1086
9.4.4 非线性自解调效应 ······ 1092
9.4.5 二级近似下的强非线性声束 ······ 1094
第 10 章 有限振幅声波的物理效应 ······ 1096
10.1 声辐射压力和声悬浮 ······ 1096
10.1.1 声辐射应力张量和声辐射压力 ······ 1096
10.1.2 声喷泉效应 ······ 1101
10.1.3 刚性小球的声悬浮 ······ 1104
10.1.4 可压缩球的声悬浮 ······ 1109
10.1.5 入射 Gauss 束的声悬浮 ······ 1112
10.2 声流理论 ······ 1115
10.2.1 Eckart 理论及其修正 ······ 1116
10.2.2 Nyborg 声流理论 ······ 1123
10.2.3 刚性平面界面附近的声流 ······ 1127
10.2.4 刚性小球附近的微声流 ······ 1131
10.3 声空化效应 ······ 1135
10.3.1 液体的空化核理论 ······ 1136
10.3.2 不可压缩液体中气泡的振动 ······ 1138
10.3.3 可压缩液体的 Trlling 模型 ······ 1143

10.3.4 可压缩液体的 Keller-Miksis 模型 ········ 1145
10.3.5 气泡振动分析 ········ 1148
10.4 热效应和高强度聚焦超声 ········ 1152
10.4.1 非生物介质中的温度场方程 ········ 1152
10.4.2 温度场的 Green 函数解 ········ 1155
10.4.3 生物介质中的温度场方程 ········ 1158
10.4.4 生物传热的 Pennes 方程及其解析解 ········ 1160
主要参考书目 (上下卷) ········ 1164
附录 ········ 1166
附录 A 常见物体的声参数 ········ 1166
附录 B 矢量场的运算 ········ 1167
附录 C 球和柱坐标中的本构关系 ········ 1170
附录 D 张量运算公式 ········ 1171
附录 E 特殊函数的常用公式 ········ 1173
附录 F 热力学关系 ········ 1175
附录 G 英汉人名对照 ········ 1175
索引 (上下卷) ········ 1177
《现代声学科学与技术丛书》出版书目

(上 卷)

第 1 章 理想流体中声波的基本性质
第 2 章 无限和半无限空间中声波的辐射
第 3 章 声波的散射和衍射
第 4 章 管道中的声传播和激发

第 5 章　腔体中的声场

由于壁面的反射，有限空间 (腔体) 中的声场将是驻波的形式. 如果空间的几何形状不规则，声场将非常复杂，必须采用近似的方法来研究声场的特性. 采用何种近似方法与腔体的大小和声波的波长有关. 三种常用的方法是: 甚低频 $\sqrt[3]{V} \ll \lambda$(其中 V 是腔的体积，λ 是所考虑的波长)，腔体中的声场与空间坐标无关，为均匀声场，见 5.4 节讨论；高频 $\sqrt[3]{V} \gg \lambda$，几何声学适用，可用统计能量法研究声场的特性，见 5.3 节讨论；低中频 $\sqrt[3]{V} \sim (1/3 \sim 3)\lambda$，必须用简正模式理论来严格讨论.

5.1　简正模式理论

简正模式理论是求解有限空间中声场的基本方法. 简正模式的物理意义也非常明显，每个简正模式代表一个驻波模式，而每个简正模式的简正频率就是腔的共振频率，这是实验中可测量的物理量. 声源在腔中激发各种简正模式，而腔内的总声场就是被激发的各个简正模式的叠加.

5.1.1　刚性壁面腔体的简正模式和展开

如图 5.1.1, 设闭区域 V 的边界为刚性边界 S, 边界的法向为 $\boldsymbol{n}$(与内壁的法向 $\boldsymbol{n}_S$ 相反). 在频率域，声波方程和边界条件满足

$$\begin{gathered}\nabla^2 p(\boldsymbol{r},\omega) + k_0^2 p(\boldsymbol{r},\omega) = -\Im(\boldsymbol{r},\omega) \quad (k_0 = \omega/c_0) \\ \boldsymbol{n}\cdot\nabla\, p(\boldsymbol{r},\omega) \equiv \left.\frac{\partial p(\boldsymbol{r},\omega)}{\partial n}\right|_S = 0\end{gathered} \tag{5.1.1a}$$

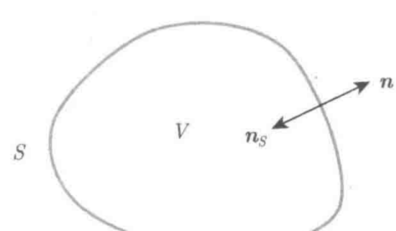

图 5.1.1　腔体 V: 区域边界的法向 $\boldsymbol{n}$ 与内壁的法向 $\boldsymbol{n}_S$ 相反

其中，$\Im(\boldsymbol{r},\omega)$ 是体源分布. 为了求声场分布，我们首先求 V 内的简正模式 $\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)$ 和简正频率 ω_λ，它们是下列齐次问题的非零解

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)+k_\lambda^2\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)=0\ (k_\lambda=\omega_\lambda/c_0)\\ \left.\frac{\partial\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)}{\partial n}\right|_S=0\end{gathered} \tag{5.1.1b}$$

与第 4 章的二维波导情况类似，三维 Laplace 算子 $-\nabla^2$ 在刚性边界条件下是 Hermite 对称算子，即简正模式 $\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)$ 和简正频率 ω_λ 同样具有三个基本性质：① 简正频率 ω_λ 是实数；② 简正模式 $\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)$ 相互正交；③ 简正系

$$\{\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda),\lambda=0,1,2,\cdots\} \tag{5.1.1c}$$

构成完备系，即定义在 V 上的平方可积函数 $p(\boldsymbol{r},\omega)$ 可作广义 Fourier 级数展开

$$p(\boldsymbol{r},\omega)\cong\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda) \tag{5.1.2a}$$

其中，展开系数为

$$a_\lambda=\int_V p(\boldsymbol{r},\omega)\psi_\lambda^*(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{5.1.2b}$$

方程 (4.1.4d) 修改为

$$\int_V\nabla\psi_\lambda^*\cdot\nabla\psi_\mu\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=k_\lambda k_\mu\int_V\psi_\lambda^*\psi_\mu\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=k_\mu^2\delta_{\lambda\mu} \tag{5.1.2c}$$

频域 Green 函数 对声场激发问题，把方程 (5.1.2a) 代入 (5.1.1a) 得到

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda[\nabla^2\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)+k_0^2\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)]=-\Im(\boldsymbol{r},\omega) \tag{5.1.3a}$$

由方程 (5.1.1b)

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(k_0^2-k_\lambda^2)\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)=-\Im(\boldsymbol{r},\omega) \tag{5.1.3b}$$

利用 $\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)$ 的正交归一性

$$a_\lambda=\frac{1}{k_\lambda^2-k_0^2}\int_V\Im(\boldsymbol{r},\omega)\psi_\lambda^*(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{5.1.3c}$$

上式代入方程 (5.1.2a)

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{r},\omega)&=\int_V\Im(\boldsymbol{r}',\omega)\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{k_\lambda^2-k_0^2}\psi_\lambda^*(\boldsymbol{r}',\omega_\lambda)\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\ &\equiv\int_V G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\Im(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{aligned} \tag{5.1.4a}$$

其中，$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)$ 定义为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega) \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{k_\lambda^2 - k_0^2} \psi_\lambda^*(\boldsymbol{r}',\omega_\lambda)\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda) \tag{5.1.4b}$$

显然，当 $\Im(\boldsymbol{r},\omega) = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 时，方程

$$\begin{gathered} \nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega) + k_0^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega) = -\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \\ \left.\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)}{\partial n}\right|_S = 0 \end{gathered} \tag{5.1.5}$$

的解就是 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)$. 因此，方程 (5.1.4b) 就是 Green 函数 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)$ 用简正模式展开的表达式.

时域 Green 函数 对瞬态问题

$$\begin{gathered} \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - \nabla^2 p(\boldsymbol{r},t) = \Im(\boldsymbol{r},t) \quad (t>0) \\ \left.\frac{\partial p(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right|_S = 0, \quad p(\boldsymbol{r},t) = \left.\frac{\partial p(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{gathered} \tag{5.1.6a}$$

方程 (5.1.2a) 的展开系数与时间有关

$$p(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(t)\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda) \tag{5.1.6b}$$

代入方程 (5.1.6a) 得

$$\begin{gathered} \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left[k_\lambda^2 a_\lambda(t) + \frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 a_\lambda(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]\psi_\lambda(\boldsymbol{r},\omega_\lambda) = \Im(\boldsymbol{r},t) \\ a_\lambda(t)|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}a_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \end{gathered} \tag{5.1.6c}$$

因此, 展开系数满足

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}^2 a_\lambda(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_\lambda^2 a_\lambda(t) = f_\lambda(t) \\ a_\lambda(t)|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}a_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \end{gathered} \tag{5.1.6d}$$

其中, 为了方便定义

$$f_\lambda(t) \equiv c_0^2 \int_V \Im(\boldsymbol{r},t)\psi_\lambda^*(\boldsymbol{r},\omega_\lambda)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{5.1.6e}$$

容易求得

$$a_\lambda(t) = \frac{1}{\omega_\lambda}\int_0^t \sin[\omega_\lambda(t-\tau)]f_\lambda(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.1.6f}$$