

“十一五”国家重点图书



俄罗斯数学
教材选译

数学分析

(第二卷)(第7版)

□ B. A. 卓里奇 著
□ 李 植 译

高等教育出版社



俄罗斯数学
教材选译

“十一五”国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

数学分析

(第二卷)(第7版)

B. A. 卓里奇 著

李 植 译

高等教育出版社·北京

图字 : 01-2016-9974 号

В.А. Зорич *Математический анализ* Часть II. Седьмое издание, дополненное.
МЦНМО. Москва, 2015.

Originally published in Russian under the title

Mathematical Analysis by V. A. Zorich (Part II, 7th expanded edition, Moscow 2015)

MCCME (Moscow Center for Continuous Mathematical Education Publ.)

Copyright © V. A. Zorich

All Rights Reserved

数学分析·第二卷

Shuxue fenxi

图书在版编目(CIP)数据

数学分析:第7版·第二卷/(俄罗斯)B.A.卓里奇著;
李植译.—新1版.—北京:高等教育出版社,2019.2
ISBN 978-7-04-028756-1

I. ①数… II. ①B… ②李… III. ①数学分析—高等
学校—教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第285599号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 李鹏 李华英 吴晓丽 和静
封面设计 王凌波 责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
印刷 肥城新华印刷有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16
印张 39.75
字数 740千字
版次 2019年2月第1版
印次 2019年2月第1次印刷
定价 89.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,
请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
【物料号 28756-00】

内容简介

本书是作者在莫斯科大学力学数学系多遍讲授数学分析课程的基础上写成的,自1981年第1版出版以来,到2015年已经修订、增补至第7版。作者加强了分析学、代数学和几何学等现代数学课程之间的联系,重点关注一般数学中最有本质意义的概念和方法,采用适当接近现代数学文献的语言进行叙述,在保持数学一般理论叙述严谨性的同时,也尽量体现数学在自然科学中的各种应用。

全书共两卷,第二卷内容包括:连续映射的一般理论、赋范空间中的微分学、重积分、 \mathbb{R} 中的曲面和微分形式、曲线积分与曲面积分、向量分析与场论、微分形式在流形上的积分、级数和含参变量的函数族的一致收敛性和基本运算、含参变量的积分、傅里叶级数与傅里叶变换、渐近展开式。

与常见的数学分析教材相比,本卷内容相当新颖,系统地引进了现代数学(包括泛函分析、拓扑学和现代微分几何等)的基本概念、思想和方法,用微分形式语言对基本积分公式的叙述特别具有参考价值,有关应用的内容也更加贴近现代自然科学。

本书观点较高,内容丰富新颖,所选习题极具特色,是教材理论部分的有益补充。本书可作为综合大学和师范大学数学、物理、力学及相关专业的教师 and 学生的教材或主要参考书,也可供工科大学应用数学专业的教师和学生参考使用。

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005年10月

中文版序言

我很高兴这本数学分析教材有了新的中文版. 我希望读者至少浏览一下本书的第1版序言摘录和后续各版序言, 以便了解本书的结构和特点, 以及我针对其使用方法向学生和教师提出的一些建议. 呈献给广大读者的这个中文版是全新的, 不仅文字经过重新翻译, 版面也经过重新设计.

本书内容有显著增加——为了不影响正文, 在每一卷最后补充了一系列附录.

在第一卷中补充了六个附录(面向一年级学生的数学分析引言, 初论方程的数值解法, 初论勒让德变换, 初论黎曼-斯蒂尔切斯积分、 δ 函数和广义函数, 欧拉-麦克劳林公式, 再论隐函数定理), 在第二卷中也补充了六个附录(初论级数工具, 多重积分中的变量代换, 高维几何学与自变量极多的函数, 多元函数与微分形式及其热力学解释, 曲线坐标系中的场论算子, 现代牛顿-莱布尼茨公式与数学的统一).

这些附录对(数学专业和物理学专业的)学生和教师各有帮助. 最后一个附录可以视为全书的总结, 其中包括整个教材在观念上最重要的成就——建立了数学分析与数学其他分支之间的联系.

B. A. 卓里奇
莫斯科, 2016年

再版序言

我刚刚为这本教材最新的英文版写了序言,其中同样适用于俄文第7版的内容,我认为可以在这里重复一下。

本教材此前各版出版后,科学并没有停滞不前。例如,费马大定理和庞加莱猜想得到了证明,找到了希格斯玻色子,等等。诸多成就,不胜枚举。这些发展虽然可能与经典数学分析教材没有直接关系,但是其间接表现是,本教材的作者在这段时间里也学习、思考、理解了一些东西,扩展了自己的知识储备,而这些扩展的知识甚至在讨论似乎完全无关的其他事物时也是有用的^①。

除了俄文原版,本教材还有英文版、德文版和中文版。细心的各国读者在书中找到了很多错误。幸好,这都是一些局部的错误,主要是印刷错误。当然,这些错误在新版中已经得到修正。

俄文第7版与第6版的主要区别是在正文之后补充了新的附录。在第一卷中补充了一个附录(欧拉-麦克劳林公式),在第二卷中补充了三个附录(多元函数与微分形式及其热力学解释,曲线坐标系中的场论算子,现代牛顿-莱布尼茨公式与数学的统一)。这些附录对(数学专业和物理学专业的)学生和教师各有帮助。最后一个附录可以视为总结,其中包括整个教程在观念上最重要的成就——建立了数学分析与数学其他分支之间的联系。

让我感到欣慰的是,本书在某种程度上不仅可供数学和物理学专业师生参考,而且对高等工科院校工科专业师生深入学习数学也有帮助。这激励我写出与热力学有关的一个附录,让数学与内容基础但内涵相当丰富的热力学密切联系起来。

^① 与阿达马一样,爱尔迪希也是一位长寿的数学家,下面的趣闻正是关于他的。某一位记者在采访年事已高的爱尔迪希时,最后问他有多少岁。爱尔迪希稍微思考后回答:“我记得,当我很年轻时,科学证实地球存在了20亿年。而现在,科学表明地球已经存在45亿年。因此,我大概有25亿岁。”

我高兴地看到, 新一代已经站在老一代的肩膀上成长起来, 他们的思考更广泛, 理解更深刻, 本领也更高强.

B. A. 卓里奇
莫斯科, 2015 年

居住在不同国家的很多人利用各种机会向出版社或者我本人提供了在本书的俄、英、德或中文版中发现的各种错误 (印刷错误、谬误、遗漏), 我以自己和未来读者的名义向他们全体表示感谢. 在本书的俄文第 6 版中, 我考虑了这些意见并进行了相应修订.

现在已经清楚, 本书也适用于物理专业师生, 我对此非常欣慰. 无论如何, 我确实尽量把常规理论与它在数学内外的丰富应用实例结合起来.

第 6 版包括一系列附录, 它们可能对学生和教师有所帮助. 这首先是某些实际课堂材料 (例如第一和第三学期作为引言的头一次课的笔记), 其次是一些数学知识 (有些是当前正在研究的问题, 例如高维几何学与概率论的联系), 它们是本书基本内容的延伸.

B. A. 卓里奇
莫斯科, 2011 年

本书第 2 版与第 1 版的区别, 除订正了在第 1 版中发现的印刷错误外, 主要是: 重新撰写了 (希望是改进了) 个别专题的某些章节 (例如与傅里叶级数和傅里叶变换有关的章节); 给出了个别重要定理 (例如一般的有限增量定理) 的更清晰的证明; 补充了与相应章节的理论相衔接的一些新的应用实例和内容丰富的习题, 它们有时显著推广了理论; 列出了考试大纲和单元测试题; 增加了补充文献.

在后附第 1 版序言中进一步介绍了本书第二卷的内容和某些特点.

B. A. 卓里奇
莫斯科, 1998 年

第 1 版序言

我在本书第一卷的序言中已经足够详细地介绍了全书的特点, 所以在这里只给出关于第二卷内容的一些说明.

构成这一卷基本内容的材料, 一方面是重积分、曲线积分和曲面积分, 乃至一般的斯托克斯公式及其应用实例, 另一方面是级数和含参变量的积分, 包括傅里叶级数、傅里叶变换, 以及渐近展开式的概念.

因此, 第二卷基本对应着大学数学系二年级的教学大纲.

为了不使上述两大专题的先后顺序按照学期完全固定下来, 我实际上独立地叙述了各自的内容.

第九章和第十章, 即本卷的前两章, 在本质上用紧凑的一般形式重新叙述了第一卷中关于连续函数和可微函数的几乎全部最重要的内容. 虽然用星号标记的这两章是为补充第一卷而写的, 但其中许多概念现在已经成为写给数学系学生的任何数学分析教材的固定内容. 它们使第二卷在形式上几乎独立于第一卷, 但前提是读者已经受到充分训练, 即使没有大量的例题、启发和铺垫也能够顺利阅读这两章, 而在提出这里的体系之前, 这些材料都包含在第一卷中.

本卷关于多元函数积分学的新内容主要始自第十一章. 其实, 在本教程第一卷之后可以从这一章开始阅读第二卷, 而不会影响理解的连贯性.

在介绍曲线积分和曲面积分理论时阐述并使用了微分形式的语言. 首先基于初等材料引入全部基本的几何概念和解析结构, 然后由它们构成一系列抽象定义, 从而得到一般的斯托克斯公式.

第十五章也这样总结了流形上的微分形式积分理论. 我认为, 这是对必学的第十一章至第十四章中的理论叙述和实际应用的非常恰当的系统性补充.

关于级数和含参变量的积分的章节既包含传统材料,也包含关于积分的渐近级数和渐近式的初步知识(第十九章),因为这无疑是大有用处的高效的分析工具.

为了便于查阅,用星号标记出了补充材料,即在初次阅读时可以略过的章节.

本卷各章和插图的序号延续了已经出版的第一卷中的相应序号.

这里只给出了在第一卷中没有提及的学者的生平简介.

为了阅读方便和行文简洁,与第一卷一样,分别用符号 ◀ 和 ▶ 表示证明的开始和结束,而在合适的时候用专门的记号 $:=$ 或 $=:$ (按照定义相等) 引入定义,其中冒号与被定义的对象位于同一边.

本卷保持了第一卷的风格,既关注数学结构本身的简洁性和逻辑性,也关注理论在自然科学中的丰富应用的展示.

B. A. 卓里奇
莫斯科, 1982 年

目 录

《俄罗斯数学教材选译》序.....	i
中文版序言.....	iii
再版序言.....	iv
第 1 版序言.....	vi
* 第九章 连续映射 (一般理论)	1
§1. 度量空间.....	1
1. 定义和实例 (1) 2. 度量空间的开子集和闭子集 (4) 3. 度量空间的子空间 (6)	
4. 度量空间的直积 (7) 习题 (7)	
§2. 拓扑空间.....	8
1. 基本定义 (8) 2. 拓扑空间的子空间 (11) 3. 拓扑空间的直积 (11) 习题 (12)	
§3. 紧集.....	13
1. 紧集的定义和一般性质 (13) 2. 度量紧集 (14) 习题 (16)	
§4. 连通的拓扑空间.....	16
习题 (17)	
§5. 完备度量空间.....	18
1. 基本定义和实例 (18) 2. 度量空间的完备化 (21) 习题 (24)	
§6. 拓扑空间的连续映射.....	24
1. 映射的极限 (24) 2. 连续映射 (26) 习题 (29)	

§7. 压缩映射原理	29
习题 (34)	
* 第十章 更一般观点下的微分学 (一般理论)	35
§1. 线性赋范空间	35
1. 数学分析中线性空间的实例 (35) 2. 线性空间中的范数 (36) 3. 向量空间中 的标量积 (38) 习题 (41)	
§2. 线性算子和多重线性算子.....	42
1. 定义和实例 (42) 2. 算子的范数 (45) 3. 连续算子空间 (48) 习题 (52)	
§3. 映射的微分	53
1. 在一点可微的映射 (53) 2. 一般的微分法则 (54) 3. 某些实例 (55) 4. 映射 的偏导数 (60) 习题 (61)	
§4. 有限增量定理及其应用实例	63
1. 有限增量定理 (63) 2. 有限增量定理的应用实例 (65) 习题 (68)	
§5. 高阶导映射	68
1. n 阶微分的定义 (68) 2. 沿向量的导数和 n 阶微分的计算 (69) 3. 高阶微分 的对称性 (71) 4. 附注 (72) 习题 (73)	
§6. 泰勒公式和极值研究.....	74
1. 映射的泰勒公式 (74) 2. 内部极值研究 (74) 3. 实例 (76) 习题 (80)	
§7. 一般的隐函数定理	82
习题 (89)	
第十一章 重积分	91
§1. n 维区间上的黎曼积分	91
1. 积分的定义 (91) 2. 黎曼可积函数的勒贝格准则 (93) 3. 达布准则 (96) 习 题 (98)	
§2. 集合上的积分	99
1. 容许集 (99) 2. 集合上的积分 (100) 3. 容许集的测度 (体积) (101) 习题 (102)	
§3. 积分的一般性质	103
1. 积分是线性泛函 (103) 2. 积分的可加性 (103) 3. 积分的估计 (104) 习题 (106)	
§4. 重积分化为累次积分.....	107
1. 富比尼定理 (107) 2. 一些推论 (109) 习题 (112)	
§5. 重积分中的变量代换.....	113
1. 问题的提出和变量代换公式的启发式推导 (113) 2. 可测集和光滑映射 (115) 3. 一维情况 (116) 4. \mathbb{R}^n 中最简微分同胚的情况 (118) 5. 映射的复合与变量代	

换公式 (119) 6. 积分的可加性和积分中变量代换公式的最终证明 (120) 7. 重积分中变量代换公式的一些推论和推广 (121) 习题 (124)	
§6. 反常重积分	126
1. 基本定义 (126) 2. 反常积分收敛性的比较检验法 (128) 3. 反常积分中的变量代换 (131) 习题 (133)	
第十二章 \mathbb{R}^n 中的曲面和微分形式	136
§1. \mathbb{R}^n 中的曲面	136
习题 (143)	
§2. 曲面的定向	144
习题 (148)	
§3. 曲面的边界及边界的定向	149
1. 带边曲面 (149) 2. 曲面定向与边界定向的相容性 (151) 习题 (154)	
§4. 欧氏空间中曲面的面积	154
习题 (159)	
§5. 微分形式的初步知识	162
1. 微分形式的定义和实例 (162) 2. 微分形式的坐标记法 (165) 3. 外微分形式 (167) 4. 向量和微分形式在映射下的转移 (170) 5. 曲面上的微分形式 (173) 习题 (173)	
第十三章 曲线积分与曲面积分	176
§1. 微分形式的积分	176
1. 原始问题、启发性思考和实例 (176) 2. 微分形式在定向曲面上的积分的定义 (181) 习题 (184)	
§2. 体形式, 第一类积分与第二类积分	188
1. 物质面的质量 (188) 2. 曲面面积是微分形式的积分 (188) 3. 体形式 (189) 4. 体形式在笛卡儿坐标下的表达式 (191) 5. 第一类积分与第二类积分 (192) 习题 (194)	
§3. 数学分析的基本积分公式	196
1. 格林公式 (196) 2. 高斯-奥斯特洛格拉德斯基公式 (200) 3. \mathbb{R}^3 中的斯托克斯公式 (203) 4. 一般的斯托克斯公式 (204) 习题 (207)	
第十四章 向量分析与场论初步	211
§1. 向量分析的微分运算	211
1. 标量场与向量场 (211) 2. \mathbb{R}^3 中的向量场与各种形式 (211) 3. 微分算子 grad, rot, div 和 ∇ (213) 4. 向量分析的一些微分公式 (217) *5. 曲线坐标下的向量运算 (218) 习题 (226)	

§2. 场论的积分公式.....	227
1. 用向量表示的经典积分公式 (227) 2. div , rot , grad 的物理解释 (230) 3. 后续的某些积分公式 (233) 习题 (235)	
§3. 势场.....	237
1. 向量场的势 (237) 2. 势场的必要条件 (238) 3. 向量场是势场的准则 (239) 4. 区域的拓扑结构与势 (241) 5. 向量势, 恰当微分形式与闭微分形式 (243) 习题 (246)	
§4. 应用实例.....	249
1. 热传导方程 (249) 2. 连续性方程 (251) 3. 连续介质动力学基本方程 (252) 4. 波动方程 (253) 习题 (255)	
* 第十五章 微分形式在流形上的积分.....	257
§1. 线性代数回顾.....	257
1. 形式代数 (257) 2. 斜对称形式代数 (258) 3. 线性空间的线性映射和对偶空间的对偶映射 (261) 习题 (262)	
§2. 流形.....	263
1. 流形的定义 (263) 2. 光滑流形与光滑映射 (267) 3. 流形及其边界的定向 (269) 4. 单位分解和流形在 \mathbb{R}^n 中的曲面形式 (272) 习题 (275)	
§3. 微分形式及其在流形上的积分.....	277
1. 流形在一个点的切空间 (277) 2. 流形上的微分形式 (280) 3. 外微分 (282) 4. 微分形式在流形上的积分 (282) 5. 斯托克斯公式 (284) 习题 (286)	
§4. 流形上的闭微分形式和恰当微分形式.....	290
1. 庞加莱定理 (290) 2. 同调与上同调 (293) 习题 (297)	
第十六章 一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算.....	299
§1. 逐点收敛性与一致收敛性.....	299
1. 逐点收敛性 (299) 2. 基本问题的提法 (300) 3. 依赖于参数的函数族的收敛性和一致收敛性 (302) 4. 一致收敛性的柯西准则 (304) 习题 (305)	
§2. 函数项级数的一致收敛性.....	306
1. 级数一致收敛性的基本定义和判别准则 (306) 2. 级数一致收敛性的魏尔斯特拉斯检验法 (308) 3. 阿贝尔-狄利克雷检验法 (309) 习题 (313)	
§3. 极限函数的函数性质.....	313
1. 问题的具体提法 (313) 2. 两个极限运算可交换的条件 (314) 3. 连续性与极限运算 (315) 4. 积分运算与极限运算 (318) 5. 微分运算与极限运算 (320) 习题 (324)	
*§4. 连续函数空间的紧子集和稠密子集.....	327
1. 阿尔泽拉-阿斯科利定理 (327) 2. 度量空间 $C(K, Y)$ (329) 3. 斯通定理	

(330) 习题 (332)

第十七章 含参变量的积分	335
§1. 含参变量的常义积分	335
1. 含参变量的积分的概念 (335) 2. 含参变量的积分的连续性 (336) 3. 含参变量的积分的微分运算 (337) 4. 含参变量的积分的积分运算 (340) 习题 (340)	
§2. 含参变量的反常积分	341
1. 反常积分对参变量的一致收敛性 (341) 2. 反常积分中的极限运算与含参变量的反常积分的连续性 (347) 3. 含参变量的反常积分的微分运算 (350) 4. 含参变量的反常积分的积分运算 (352) 习题 (356)	
§3. 欧拉积分	358
1. β 函数 (358) 2. Γ 函数 (359) 3. β 函数与 Γ 函数之间的联系 (362) 4. 实例 (362) 习题 (364)	
§4. 函数的卷积和广义函数的初步知识	367
1. 物理问题中的卷积 (启发式讨论) (367) 2. 卷积的一些一般性质 (369) 3. δ 型函数族与魏尔斯特拉斯逼近定理 (371) *4. 分布的初步概念 (376) 习题 (385)	
§5. 含参变量的重积分	390
1. 含参变量的常义重积分 (390) 2. 含参变量的反常重积分 (390) 3. 具有变奇异性的反常积分 (391) *4. 高维情形下的卷积、广义函数和基本解 (395) 习题 (404)	
第十八章 傅里叶级数与傅里叶变换	409
§1. 与傅里叶级数有关的一些主要的一般概念	409
1. 正交函数系 (409) 2. 傅里叶系数和傅里叶级数 (415) *3. 数学分析中的正交函数系的一个重要来源 (423) 习题 (427)	
§2. 傅里叶三角级数	432
1. 经典傅里叶级数收敛性的基本形式 (432) 2. 傅里叶三角级数逐点收敛性的研究 (435) 3. 函数的光滑性和傅里叶系数的下降速度 (443) 4. 三角函数系的完备性 (447) 习题 (453)	
§3. 傅里叶变换	459
1. 函数的傅里叶积分表达式 (459) 2. 函数的微分性质和渐近性质与它的傅里叶变换之间的相互关系 (469) 3. 傅里叶变换的最重要的运算性质 (472) 4. 应用实例 (476) 习题 (480)	
第十九章 渐近展开式	487
§1. 渐近公式和渐近级数	489
1. 基本定义 (489) 2. 渐近级数的一般知识 (493) 3. 渐近幂级数 (497) 习题 (499)	

§2. 积分的渐近法 (拉普拉斯方法)	502
1. 拉普拉斯方法的思路 (502) 2. 拉普拉斯积分的局部化原理 (505) 3. 一些典型积分和它们的渐近式 (506) 4. 拉普拉斯积分的渐近式主项 (509) *5. 拉普拉斯积分的渐近展开式 (511) 习题 (521)	
单元测试题	527
考试大纲	530
期末考试试题	533
期中测试题	534
附录一 初论级数工具	535
附录二 多重积分中的变量代换 (公式推导和初步讨论)	541
附录三 高维几何学与自变量极多的函数 (测度聚集与大数定律) ...	547
附录四 多元函数与微分形式及其热力学解释	554
附录五 曲线坐标系中的场论算子	563
附录六 现代牛顿-莱布尼茨公式与数学的统一 (总结)	573
参考文献	581
基本符号	588
名词索引	592
人名译名对照表	611
译后记	614