JINBANG BOOKS·SINCE 1997
金榜图书
北京时代巨流文化有限公司

2020 全国各大考研辅导机构通用教材

李永乐·王式安考研数学系列

线性代数辅导讲义

主编◎李永乐

★本书特点★ 名师教学内容集结，多年经验积累，体系结构不断丰富完善

用微信扫码看视频

微信扫书中二维码观看重难点视频讲解（获取方式详见封二使用说明）

讲义，纸质的课程，追求化繁为简

承载着每一位学生的美好期望

专属福利 金榜图书 网易 7大礼包 详见封三

关注公众号
回复关键字
"2020考研数学"
可免费获取
复习规划视频课程
不定时
还会更新小福利哟

知识成就未来，金榜助他成才！

微信扫码 查询真伪

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

2020 全国各大考研辅导机构**通用教材**

李永乐·王式安考研数学系列

线性代数
辅导讲义

主编◎李永乐

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是为准备考研的学生复习线性代数而编写的一本辅导讲义，由编者近年来的辅导班笔记改写而成。本书也可作为大一新生学习线性代数时的参考书。

全书共分六章及一个附录，每章均由知识结构网络图、基本内容与重要结论、典型例题分析选讲以及练习题精选四部分组成。为的是方便同学们总结归纳以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲义 / 李永乐主编. —西安：西安交通大学出版社，2017.12
ISBN 978-7-5605-7331-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 004049 号

书　　名 线性代数辅导讲义
主　　编 李永乐
策划编辑 张瑞娟
责任编辑 聂　燕

出版发行 西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049）
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 三河市燕山印刷有限公司

开　　本 787mm×1092mm　1/16　**印张**　12　**字数**　275 千字
版次印次 2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-7331-1
定　　价 49.80 元

前　言

本书是为准备考研的学生复习线性代数而编写的一本辅导讲义，由编者近年来的辅导班笔记改写而成。本书也可作为大一新生学习线性代数时的参考书。

此次修订，补充、更换、编写了一些新题，同时，针对同学们不太好理解或不大注意的地方，也相应增加了一些新的说明。

全书共分六章及一个附录，每章均由知识结构网络图、基本内容与重要结论、典型例题分析选讲以及练习题精选四部分组成。为的是方便同学们总结归纳以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换。

本书力求在较短的时间内，用不多的篇幅，帮助同学们搞清基本概念，掌握基本理论和公式，了解重点和难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。一方面，通过对典型例题的分析讲评，帮助同学们梳理解题的思路，熟悉常用的方法和技巧；另一方面，精编适量的练习题，帮助同学们更好地理解和掌握基本内容、基本解题方法，达到巩固、悟新与提高的目的。另外，题后的点评与评注，其目的在于帮助同学们弄清重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题。

在考研数学中，线性代数占 5 个考题(2 个选择，1 个填空，2 个解答)，分值为 34 分，其平均用时应当为 40 分钟左右。因而我们在附录中设计了 45 分钟的水平测试，希望同学们在复习完本书之后，用两套自测题及时地进行查漏补缺。线性代数考试大纲对于数学一、二、三来说基本上一样，近年来考题也是趋同，本书中除向量空间仅数一考生要准备外，其余部分大家都应复习。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo. com@清华李永乐考研数学辅导团队。

新浪微博:清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号:金榜图书考研

总之，经过修订再版，希望本书能对同学们的复习备考有更大的帮助。由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2019 年 1 月

＜ …

永乐讲线代

李永乐，原清华大学应用数学系（现清华大学数学科学系）教师，最受学生欢迎的“线代”老师，编著多部考研数学抢手复习资料，对出题形式、考试重点了如指掌，解题思路极其灵活，辅导针对性极强，受到广大学员交口称赞。

55篇原创文章 15位朋友关注

进入公众号 | 取消关注

20课程 ≡ | 公式定理 ♂

微信扫一扫 跟李老师学线代

线代

永乐讲线代

金榜图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐 王式安 章纪民	2018 年 6 月
经济类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2019 年 1 月
农学门类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2019 年 1 月
数学基础过关 660 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2018 年 12 月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥 季文铎	2018 年 12 月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥 季文铎	2019 年 1 月
数学历年真题全精解析·试卷版(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥 季文铎	2019 年 2 月
数学公式的奥秘	单立波	2019 年 1 月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2019 年 1 月
线性代数辅导讲义	李永乐	2019 年 1 月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2019 年 1 月
高等数学(微积分)辅导讲义	曹显兵、刘喜波	2019 年 3 月
概率论与数理统计辅导讲义	曹显兵	2019 年 3 月
数学强化通关 330 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2019 年 6 月
李永乐数学决胜冲刺 6+2(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2019 年 11 月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐 刘喜波 章纪民	2019 年 11 月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018 年 12 月
大学数学高等数学辅导	武忠祥 章纪民	2019 年 3 月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2019 年 3 月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2019 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2019 年 5 月

思想政治理论大串讲	米鹏	2019 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2019 年 10 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语水平自测 3 套卷:英语一	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语水平自测 3 套卷:英语二	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 1 月
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 1 月
考研英语阅读理解精雕细刻 80 篇	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 5 月
考研英语历年真题精析及复习思路:英语一(试卷版)	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语历年真题精析及复习思路:英语二(试卷版)	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语写作的奥秘:英语一	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
考研英语写作的奥秘:英语二	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 3 月
你还在背"单"词吗?	刘晓艳	2019 年 1 月
不就是语法和长难句吗?	刘晓艳	2019 年 1 月
就这样征服阅读和完形	刘晓艳	2019 年 5 月
写作和翻译不过如此	刘晓艳	2019 年 5 月
考研词伙	李超	2019 年 1 月
考研句伙	李超	2019 年 1 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 12 月
考研英语语法长难句抓分攻略	欧阳栾天	2018 年 9 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上册)	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(下册)	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上册)试题	贺银成	2018 年 11 月

贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(下册)答案及精析	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2018 年 11 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2018 年 11 月
乡村全科执业助理医师资格考试考点精编	高鑫	2018 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试实践技能应试指南	高鑫	2018 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试考点精练精析	王大群 刘恩钊	2018 年 12 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2019 年 1 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2019 年 1 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2019 年 1 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2019 年 1 月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
逻辑复习指南	房文学	2019 年 1 月
写作复习指南	房文学	2019 年 5 月
数学复习指南	罗瑞	2019 年 1 月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月

呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
哈姆雷特	[英]威廉·莎士比亚	2019 年 3 月
李尔王	[英]威廉·莎士比亚	2019 年 3 月
仲夏夜之梦	[英]威廉·莎士比亚	2019 年 3 月
皆大欢喜	[英]威廉·莎士比亚	2019 年 3 月
罗密欧与朱丽叶	[英]威廉·莎士比亚	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

以上图书书名及出版时间仅供参考，以实际出版物为准，均属北京时代巨流文化有限公司

目 录

第一章 行列式

第二章 矩阵

第三章 n维向量

第四章 线性方程组

第五章　特征值与特征向量

第六章　二次型

附录　45 分钟水平测试

第一章　行列式——每章都有应用

一、知识结构网络图

- **行列式**
  - 概念——不同行不同列元素乘积的代数和(共 $n!$ 项)
  - 性质
    - 经转置行列式的值不变,即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$
    - 某行有公因数 k,可把 k 提到行列式外.特别地,某行元素全为 0,则行列式的值为 0.
    - 两行互换行列式变号.特别地,两行相等,行列式值为 0;两行成比例,行列式值为 0.
    - 某行所有元素都是两个数的和,则可写成两个行列式之和.
    - 某行的 k 倍加至另一行,行列式的值不变.
  - 展开式——代数余子式
    - $|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$　(按 i 行展开)
    - $|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$　(按 j 列展开)
  - 计算
    - 数字型
      - 三角化法
      - 公式法
      - 递推法
      - $\xrightarrow[\text{技巧}]{\text{常用}}$
        - 直接按行(列)展开
        - 把第 1 行(列)的 k_i 倍加到第 i 行(列)
        - 把每行(列)都加到第 1 行(列)
        - 逐行(列)相加
    - 抽象型
      - 用行列式性质
      - 用矩阵性质
      - 用特征值　$|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$,相似
  - 证 $|\boldsymbol{A}|=0$
    - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 反证法
    - $r(\boldsymbol{A})<n$
    - 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
    - $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$
  - 应用
    - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 伴随矩阵求逆法
    - 线性相关(无关)判定
    - 可逆的证明
    - 克拉默法则
    - 特征值计算
    - 二次型正定判定

对于二、三阶行列式有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

注意这样的计算方法对 4 阶及 4 阶以上行列式不适用.

学习札记：

【评注】 (1) 对行列式的性质 4 要理解正确. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]$，由于行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 中每一行都是两个数的和，所以若用性质 4 把行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 拆开，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应当是 2^n 个 n 阶行列式之和. 因此一般情况下 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

特别地，

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

(先将第一行拆分，其它行不变，依此拆分第二、三行)

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(2) 要会用行列式的性质及展开定理计算数字型行列式.

(3) 要熟悉抽象型行列式的计算.

今年考题

(2019,2) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 中 (i,j) 元的代数余子式，则 $A_{11}-A_{12}=$ ________.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

定义 1.1　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1)称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

例如，若已知 $a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项，那么根据行列式的定义，它应是不同行不同列元素的乘积. 因此必有 $j=3$.

由于 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 对应的逆序数

$$\tau(4312)=3+2+0=5$$

是奇数，所以该项所带符号为负号.

【评注】　(1) 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列. 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

(2) 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. **一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数**. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例如，在排列 25134 中，有逆序 21,51,53,54，因此排列 25134 的逆序数为 4，即 $\tau(25134)=4$. 所以排列 25134 是偶排列.

学习札记：

定义 1.2 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.2}$$

例如，若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=2$，即已知

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2,$$

从而 $a=3$.

重要定理

定理 1.1 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}\quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.3}$$

公式(1.3) 称为行列式按第 k 行的展开公式.

定理 1.1′ n 阶行列式 D 等于它的任意一列的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}\quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

公式(1.4) 称为行列式按第 k 列的展开公式.

学习札记：

定理 1.2 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，当 $i \neq k\quad (i,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0; \tag{1.5}$$

当 $j \neq k\quad (j,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0. \tag{1.6}$$

【评注】 根据代数余子式的性质(1.3)与(1.5)，对于

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 和行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，我们有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

类似地由(1.4)与(1.6)有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

这是一个重要的公式，要会灵活运用(详见第二章伴随矩阵).

主要公式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.7}$$

学习札记:

(2) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \qquad (1.8)$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|, \qquad (1.9)$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\,|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|, \qquad (1.10)$$

m,n 分别是矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的阶数.

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j). \qquad (1.11)$$

(5) 特征多项式

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+s_2\lambda-|\boldsymbol{A}|, \qquad (1.12)$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

【评注】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量,若

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},$$

则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0} \Rightarrow (\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$

知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解,故系数行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

关于(1.12) 的推导请参看 P_2 之评注(1).

特别地,若秩 $r(\boldsymbol{A})=1$,由(1.12) 知特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \lambda^3-(\sum a_{ii})\lambda^2 = (\lambda-\sum a_{ii})\lambda^2.$$

那么,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii}, \lambda_2=\lambda_3=0$.

方阵的行列式

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$; (1.13)